Written according to the Syllabi of plus two courses (Classes XI and XII) in Mathematics of the West Bengal Council of Higher Secondary Education.

উচ্চ মাধ্যমিক গণিত

প্রথম খণ্ড

বীজগণিত * সমতল ত্রিকোণমিতি *
দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

TEXTS IN MATHEMATICS

For plus 2 Courses

মাইতি ও ঘোষ প্রণীত

১ উচ্চ মাধ্যমিক গণিত : প্রথম খণ্ড
(বীজগণিত, সমতল ত্রিকোণমিতি ও দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি)

২। উচ্চ মাধ্যমিক গণিত : দ্বিতীয় খণ্ড
(কলনশাস্ত্র ও বলবিদ্যা)

In English

HIGHER SECONDARY MATHEMATICS : vol. one
—*Maity & Ghosh*

Part 1 : **ALGEBRA**
Part 2 : **PLANE TRIGONOMETRY**
Part 3 : **ANALYTICAL GEOMETRY OF TWO DIMENSIONS**

HIGHER SECONDARY MATHEMATICS : vol. two
—*Maity & Ghosh*

Part 1 : **CALCULUS**
(Containing Elements of Differential Calculus, Integral Calculus and Differential Equations)
Part 2 : **ELEMENTS OF MECHANICS**

For Degree Courses

DIFFERENTIAL CALCULUS (An Introduction to Analysis)
—*Maity & Ghosh*

INTEGRAL CALCULUS (An Introduction to Analysis)
—*Maity & Bagchi*

AN INTRODUCTION TO DIFFERENTIAL EQUATIONS
—*Ghosh & Bagchi*

A FIRST COURSE IN VECTOR ANALYSIS
—*Maity & Ghosh*

DIFFERENTIAL CALCULUS for Pass Course
—*Maity & Ghosh*

INTEGRAL CALCULUS including an introduction to **DIFFERENTIAL EQUATIONS** for Pass Course
—*Maity & Bagchi*

উচ্চ মাধ্যমিক গণিত

প্রথম খণ্ড

বীজগণিত * সমতল ত্রিকোণমিতি * দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

অধ্যাপক কান্তীশ চন্দ্র মাইতি

কলিকাতা আশুতোষ কলেজের গণিত বিভাগের প্রধান অধ্যাপক

এবং

অধ্যাপক রামকৃষ্ণ ঘোষ

কলিকাতা সেণ্ট্ জেভিয়ার্স কলেজের গণিত বিভাগের প্রবীণ অধ্যাপক

এবং বিজ্ঞান বিভাগের ডীন

এবং

কল্যাণী বিশ্ববিদ্যালয়ের গণিত শাস্ত্রের পার্টটাইম লেকচারার

এবং ঘানা কেপকোষ্ট বিশ্ববিদ্যালয়ের গণিত শাস্ত্রের প্রাক্তন

প্রবীণ লেকচারার

নিউ সেন্ট্রাল বুক এজেন্সী

৮/১, চিন্তামণি দাস লেন : কলিকাতা-৭০০০০৯

(এই পুস্তক ভারত সরকার কর্তৃক প্রদত্ত সুলভ দামের কাগজে মুদ্রিত।)

প্রকাশক
শ্রীযোগেন্দ্র নাথ সেন
নিউ সেণ্ট্রাল বুক এজেন্সী
৮।১ চিন্তামণি দাস লেন
কলিকাতা ৭০০ ০০৯

মুদ্রাকর
শ্রীঅনিল কুমার ঘোষ
দি অশোক প্রিণ্টিং ওয়ার্কস
২০৯এ বিধান সরণি
কলিকাতা ৭০০ ০০৬

দাম ২৫·০০ টাকা

ভূমিকা

ওয়েষ্ট বেঙ্গল কাউন্সিল অব্ হায়ার সেকেণ্ডারী এডুকেশন (West Bengal Council of Higher Secondary Education) একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণীর জন্য গণিতের যে পাঠক্রম নির্দিষ্ট করিয়া দিয়াছেন, সেই পাঠক্রম সম্পূর্ণরূপে অনুসরণ করিয়া বর্তমান পুস্তক প্রণয়ন করা হইয়াছে। পুস্তকটি তিন ভাগে বিভক্ত—প্রথম ভাগে আছে বীজগণিত, দ্বিতীয় ভাগে সমতল ত্রিকোণমিতি ও তৃতীয় ভাগে আছে দ্বিমাত্রিক স্থানাংক জ্যামিতি—এই তিনটিতে স্থানলাভ করিয়াছে উচ্চ মাধ্যমিক গণিতের প্রথম পত্রের (Paper I) সমস্ত বিষয়বস্তু।

বর্তমানে গণিত শিক্ষার প্রয়োজন সর্বজনবিদিত। বিজ্ঞানের যে কোনও শাখায় অগ্রগতির জন্য, ইঞ্জিনিয়ারিং, বৃত্তিমূলক ও কারিগরী শিক্ষার ক্ষেত্রে, বাণিজ্যিক বিষয়ে জ্ঞানলাভের জন্য এমন কি কলাবিদ্যা আয়ত্ত করিবার জন্যও গণিত শিক্ষার প্রয়োজন। শুধু তাহাই নহে, আধুনিক যুগে দৈনন্দিন প্রতিটি কার্যে গণিতের প্রয়োজন বিশেষভাবে অনুভূত হইতেছে। এদিকে শিক্ষার মান দিন দিন উন্নত হইতেছে, মানুষের অনুসন্ধিৎসা এবং অধিকতর জ্ঞানলাভের আকাঙ্ক্ষা বৃদ্ধি পাইতেছে। সুতরাং স্কুলে কলেজে উচ্চতর মানের পুস্তকের প্রয়োজন দেখা দিয়াছে। কাউন্সিল নির্দিষ্ট পাঠক্রম স্বীকার করিয়া লইয়াই বর্তমান পুস্তককে উচ্চতর মানের অংকশাস্ত্র অধ্যয়নের সোপান হিসাবে ব্যবহার করা হইয়াছে। উচ্চতর গণিত শিক্ষার জন্য প্রয়োজন—যথাযথভাবে যুক্তিতর্কের দ্বারা বিষয়বস্তুর অবতারণা ও সমাধান। আবার মাধ্যমিক পর্যায়ে ব্যবহারিক নিপুণতারও প্রয়োজন। এই দুই উদ্দেশ্যে এই পুস্তকের প্রণয়ন। গাণিতিক অভিব্যক্তির যথাযথ সূত্র উপস্থাপন করিয়া প্রতিপাদ্য বস্তুর প্রমাণ সুস্পষ্টরূপে নির্দিষ্ট করা হইয়াছে। সমাধানসম্বলিত উদাহরণগুলি অতি সতর্কতার সহিত মনোনয়ন করা হইয়াছে—বহুক্ষেত্রে একটিমাত্র উদাহরণের সাহায্যে সমজাতীয় উদাহরণ তো বটেই, আরও ব্যাপক, বিস্তৃত ও জটিল প্রশ্ন সমাধান করা হইয়াছে—ইহা ছাত্রছাত্রীদের উদ্বুদ্ধ করিবে। পুস্তকের বিষয়বস্তুর আলোচনা পর পর সুশৃংখলভাবে অগ্রসর হইয়াছে। প্রতিটি উপপাদ্য, প্রতিপাদ্য ও অনুসিদ্ধান্ত অত্যন্ত সতর্কতার সহিত উপস্থাপিত করা হইয়াছে, তাহাদের নিয়ন্ত্রণের সীমানা আলোচিত হইয়াছে এবং যেখানেই প্রয়োজন তাহাদের প্রমাণ দেওয়া হইয়াছে। শুধু তাহাই নহে—প্রতিটি বিবৃতির প্রয়োজনীয়তা উপলব্ধি করাইবার চেষ্টা করা হইয়াছে। পুস্তকের প্রতিটি অংশে ছাত্রছাত্রীদের কথা সবসময় স্মরণ রাখা হইয়াছে। মন্তব্য, বিশেষ মন্তব্য, টীকা—এসবের গুরুত্ব কিন্তু উপপাদ্যের তুলনায় কোনও অংশে কম নহে। অংকশাস্ত্রে ব্যুৎপত্তি-লাভে বিশেষভাবে সহায়তা করে অধীত জ্ঞানের ব্যবহারিক প্রয়োগ। এই উদ্দেশ্যে বিশেষভাবে প্রস্তুত নানাপ্রকার অনুশীলনী ও প্রশ্ন গ্রন্থে সন্নিবেশিত করা হইয়াছে—অংকগুলি এমনভাবে সাজান হইয়াছে যে পর পর অংক কষিতে যেন কোনও অসুবিধার

সৃষ্টি না হয়। ছাত্রছাত্রীদের পরীক্ষার কথা বিবেচনা করিয়া বেশ কিছু বস্তুমুখী প্রশ্ন ও পরীক্ষামূলক প্রশ্নও দেওয়া হইয়াছে।

জীবনের অধিকাংশ সময় আমরা স্কুল, কলেজ, বিশ্ববিদ্যালয় ও অন্যত্র অঙ্কশাস্ত্রের আলোচনা করিয়া আসিয়াছি এবং সেই সূত্রে আমাদের পূজ্যপাদ শিক্ষক ও অধ্যাপক-গণের সহিত এবং আমাদের বন্ধুবান্ধব ও ছাত্রছাত্রীগণের সহিত এই বিষয়ের আলোচনায় অপূর্ব আনন্দ ও অনুপ্রেরণা পাইয়াছি। আমরা তাঁহাদের সকলের প্রতিই আমাদের কৃতজ্ঞতা জানাইতেছি।

এই গ্রন্থ প্রণয়নে চন্দননগর কানাইলাল বিদ্যামন্দিরের দুই জন প্রবীণ শিক্ষক শ্রীনীলমণি কুমার, প্রধান শিক্ষক এবং শ্রীধীরেন্দ্র নাথ পাল, সহকারী প্রধান শিক্ষক—তাঁহাদের শিক্ষকতা জীবনের অভিজ্ঞতা দ্বারা — বিস্তৃত আলোচনা, অনুপ্রেরণা ও সহযোগিতার মাধ্যমে আমাদের সর্বতোভাবে সাহায্য করিয়াছেন। তাঁহাদিগকে জানাই আমাদের আন্তরিক কৃতজ্ঞতা।

সর্বশেষ কৃতজ্ঞতা জানাই আমাদের প্রিয় বন্ধুবর বিদ্যাসাগর কলেজের গণিত-বিভাগের প্রধান অধ্যাপক শ্রীপ্রতুলকুমার বাগচী মহাশয়কে, যাঁহার অনুপ্রেরণা ব্যতীত এই পুস্তক প্রণয়ন সম্ভবপর হইত না।

পাঠকমণ্ডলীর নিকট হইতে পুস্তকটির উৎকর্ষসাধনের নিমিত্ত যে কোনও প্রকার ইঙ্গিত সাদরে অভিনন্দিত হইবে।

ভ্রাতৃদ্বিতীয়া
৭ই কার্তিক, ১৩৮৩ বঙ্গাব্দ
(Oct. 24, 1976)
কলিকাতা

মাইতি ও ঘোষ

বীজগণিত

Syllabi of Algebra

(West Bengal Council of Higher Secondary Education)

Variation, Arithmetical Progression, Geometrical Progression. Surds, Laws of indices. Complex numbers. Theory of quadratic equation. Permutations and Combinations. Binomial theorem for positive integral index ; Idea of Infinite series—sum of infinite G. P. series. Use of Binomial theorem for fractional and negative indices. Logarithms—Compound interest and annuities. Use of logarithmic and exponential series.

সূচীপত্র

FORMULAE AND RESULTS

1. Variation

(i) $A \propto B \Rightarrow A = kB$ (k = constant of variation).

(ii) A varies inversely as $B \Rightarrow A \propto (1/B)$ and so $AB = k$.

(iii) *Theorem on Joint Variation.* If $A \propto B$, when C is constant, and $A \propto C$, when B is constant, then $A \propto BC$, when both B and C vary.

2. Number system

(i) Natural numbers ⟶ Integers incl. zero ⟶ Rational Numbers ⟶ →Real Numbers. (Rational + Irrational)

(ii) Rational numbers are dense; Real numbers also are dense.

(iii) The square of a real number is positive.

(iv) Real numbers ⟷ Points on a straight line.

3. Involution

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$. (ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$.

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$. (iv) $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$.

(v) $a^{-n} = (1/a^n)$. (vi) $a^{(1/n)} = \sqrt[n]{a}$; $\sqrt[n]{a^m} = a^{(m/n)}$.

[Proved to be true for rational indices only.]

4. Surds are radicals as well as irrationals. All irrationals are not surds (e.g., π, e, etc.).

Rationalisation and **finding the square roots** of surds are two important operations.

5. Progressions

(a) An arranged set formed according to a definite rule is **sequence.**

(b) Two important sequences are A.P. and G.P.

A.P.: (i) nth term $= a + (n-1)d$, a = first term, d = com. diff.

(ii) Sum to n terms $= (n/2)$ [first term + last term]

$$= (n/2)\{2a + (n-1)d\}.$$

(iii) A. M. between a and $b = \frac{1}{2}(a+b)$.

(iv) Sum of n natural numbers:

$$= 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(v) Sum of squares of n natural numbers:

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(vi) Sum of cubes of n natural numbers:

$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$$

G.P.: (i) nth term $= ar^{n-1}$, $a =$ first term, $r =$ common ratio.

(ii) Sum to n terms of a G.P. $= \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, if $r > 1$.

$$= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \text{ if } r < 1.$$

(iii) G. M. between a and $b = \sqrt{(ab)}$.

(c) A set of numbers are in H.P. if their reciprocals are in A.P.

H.M. between a and $b = \dfrac{2ab}{a + b}$.

(d) A.M. > G.M. > H.M. (of two distinct positive numbers).

6. Concept of Infinite series: Infinite G.P.

An infinite series is a **symbol** of the form

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad \dots \quad \dots + u_n + \quad \dots \quad \dots = \Sigma u_n.$$

We first find the sum to n terms $= u_1 + u_2 + \dots + u_n = S_n$ (say).

When $n \to \infty$, the values of S_n may differ from a fixed number S by a quantity, as small as we please. We say that S_n tends to a limit S as $n \to \infty$. When such a limit S exists, we say that the series Σu_n is **convergent** and further, we say that the sum of the infinite series (or **sum to infinity**) is S; we write $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \Sigma u_n$.

Infinite geometric series:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots \dots + r^{n-1} \dots + \dots = \Sigma r^{n-1}.$$

$$S_n = \frac{1 - r^n}{1 - r} \; (|r| \neq 1). \quad \text{When } n \to \infty, S_n \to \frac{1}{1 - r}, \text{ if } |r| < 1.$$

∴ Sum to infinity

$$= \frac{1}{1 - r} = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} + \quad \dots, \text{ if } |\, r \,| < 1.$$

7. Complex numbers

(i) A number of the form $a + ib$, or, (a, b) is a complex number, where a and b are real numbers. $a - ib$ is then the conjugate complex number $a + ib$.

(ii) $a + ib = c + id \Rightarrow a = c, b = d$.

(iii) Addition: $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i\,(b + d)$.
Multiplication: $(a + ib)\,(c + id) = ac - bd + i\,(bc + ad)$.

(iv) $i = (0, 1)$ is s.t. $i^2 = -1$.

(v) mod. $a + ib = r = +\sqrt{a^2 + b^2}$, arg $a + ib = \theta$ (say) where the angle θ to be so chosen that it is the least possible angle satisfying the two equations $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$.

(vi) $x^3 = 1$ has three values of x (cube roots of unity) — $1, \omega, \omega^2$, where $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ or, $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. We have

$$1 + \omega + \omega^2 = 0 \text{ and } \omega^3 = 1.$$

To remember: $a^3 + b^3 = (a + b)\,(a + \omega b)\,(a + \omega^2 b)$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)\,(a + \omega b + \omega^2 c)\,(a + \omega^2 b + \omega c).$$

8. Theory of Quadratic equations and expressions

(i) $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ has two roots $\alpha = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

and $\beta = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. $b^2 - 4ac =$ discriminant D.

(ii) The two roots of the quadratic equation are
- (a) real and equal, if $D = 0$.
- (b) real and unequal, if $D > 0$.
- (c) real, rational and unequal, if $D > 0$ and $D =$ a perfect square.
- (d) real and irrational, if $D > 0$ and $D \neq$ a perfect square.
- (e) imaginary (conjugate complex), if $D < 0$.
- (f) equal in mag. but opp. in sign, if $b = 0$.
- (g) reciprocal, if $a = c$.

(iii) The two equations $ax^2 + bx + c = 0$, $a'x^2 + b'x + c' = 0$ have a common root if $(bc' - b'c)\,(ab' - a'b) = (ca' - ac')^2$.
The two equations have both roots common if $a : a' = b : b' = c : c'$.

(iv) $f(x) = ax^2 + bx + c$ has the same sign as 'a', except when $f(x) = 0$ has two real and unequal roots α, β and x lies between these roots.

Therefore, $f(x)$ has always the same sign as that of a, **without exception,** if $D = b^2 - 4ac \leqslant 0$.

(v) $f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$ can be factorized into two linear factors of the form $lx + my + n$ and $l'x + m'y + n'$ if $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$.

9. Permutations and Combinations

(i) Permutations — arrangement in order;
Combinations — selections or making groups.

(a) ${}^nP_r$ = number of permutations of n **distinct** things taken r at a time

$$= n(n-1)(n-2) \ldots \ldots (n-r+1)$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}},\ (r < n); \quad {}^nP_n = \underline{|n}.$$

(b) ${}^nC_r$ = number of combinations of n **distinct things** taken r at a time

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \ldots \ldots (n-r+1)}{\underline{|r}}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\ \underline{|r}}. \quad (r < n)$$

${}^nC_0 = 1 = {}^nC_n$.

${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ (complementary combinations).

(c) ${}^nP_r = {}^{n-1}P_r + r.\,{}^{n-1}P_{r-1}$; ${}^{n+1}C_r = {}^nC_{r-1} + {}^nC_r$.

(d) $\dfrac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} = \dfrac{n-(r-1)}{r} = \dfrac{n-r+1}{r}$.

(e) ${}^nC_r$ (for different r) is greatest where $r = (n/2)$, if n be **even.**

${}^nC_r$ is greatest when $r = \dfrac{n+1}{2}$ or $\dfrac{n-1}{2}$, if n be **odd.**

(f) ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \ \ldots \ + {}^nC_n = 2^n$.

(g) Division into groups : $(m + n)$ things into two groups of m and n things respectively : ${}^{m+n}C_n = \dfrac{\underline{|m+n}}{\underline{|m}\ \underline{|n}}$.

In case $m = n$; $\frac{1}{2}\ \dfrac{\underline{|2m}}{(\underline{|m})^2}$ if two different orders of the two different groups are considered equivalent.

10. Binomial Theorem for positive integral indices

(i) $(x+a)^n = x^n + {}^nC_1\, x^{n-1} a + {}^nC_2\, x^{n-2} a^2 + \;\dots$

$\dots \; + {}^nC_r\, x^{n-r} a^r + \;\dots\; + a^n$

$$= x^n + n\,x^{n-1} a + \frac{n(n-1)}{2\,!} x^{n-2} a^2 + \;\dots$$

$$\dots \; + \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{\lfloor r} x^{n-r} a^r + \;\dots\;\dots + a^n.$$

(ii) $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 + \;\dots\; + {}^nC_n\, x^n$

$= C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \;\dots\; + C_n x^n.$

(iii) General term of $(x+a)^n = (r+1)$th term of $(x+a)^n = {}^nC_r\, x^{n-r} a^r$; for $(1+x)^n$, general term $= {}^nC_r\, x^r$.

(iv) The middle term of $(x+a)^n = \left(\frac{n}{2}+1\right)$th term if n *be* even.

Two middle terms if n be odd, viz., $\left(\frac{n-1}{2}+1\right)$th term and $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$th term.

(v) $C_0, C_1, C_2, \;\dots\; C_n$ are the Binomial Coefficients when the index is to be understood $= n$.

$C_0 + C_1 + C_2 + \;\dots\; + C_n = 2^n$

Sum of the Coeff. of odd terms

= Sum of the Coeff. of even terms

$= 2^{n-1}$.

11. Binomial series: Exponential series: Logarithmic series

(a) **Binomial Series**

For all real values of m, the infinite series

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2} x^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-r+1)}{r\,!} x^r + \;\dots\;\dots$$

is convergent if $-1 < x < 1$ and when convergent, its sum is the **positive** value of $(1+x)^m$. Thus

$$(1+x)^m$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-r+1)}{r\,!} x^r. \; (|x|<1).$$

(i) $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ \dots \ + (-1)^r x^r + \dots$ $(|x| < 1)$.

(ii) $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$
$\dots + (-1)^r (r+1) x^r + \dots$ $(|x| < 1)$.

(iii) $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^r + \dots$ $(|x| < 1)$.

(iv) $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ \dots$
$\dots + (r+1)x^r + \dots$ $(|x| < 1)$.

(v) $(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \dots$

$$\dots + (-1)^r \frac{1.3.5 \dots (2r-1)}{2.4.6 \dots 2r} x^r + \dots \quad (|x| < 1).$$

(vi) $(1-x)^{-p/q} = 1 + (p/q)\,x + \frac{p(p+q)}{2!}(x/q)^2 + \dots$

$$\dots + \frac{p(p+q)(p+2q)}{3!}(x/q)^3 + \dots \quad (|x| < 1).$$

(b) **Exponential series**

(i) DEFINITION: $e = 1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \dots + \frac{1}{\lfloor n} + \dots \ \dots$;
$e \simeq 2{\cdot}7182 \dots$

(ii) EXPONENTIAL THEOREM

For all real values of x, the infinite series

$$1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \dots \dots + \frac{x^n}{\lfloor n} + \dots \dots$$

Converges to the sum e^x.

Thus, $e^x = 1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \dots \dots + \frac{x^n}{\lfloor n} + \dots \dots$

Also $a^x = 1 + \frac{x \log a}{\lfloor 1} + \frac{x^2 (\log a)^2}{\lfloor 2} + \dots \dots + \frac{x^n (\log a)^n}{\lfloor n} + \dots \dots$

(True for all real x and $a > 0$)

(iii) $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^4}{\lfloor 4} + \dots \dots + \frac{x^{2r}}{\lfloor 2r} + \dots \dots$

$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} + \dots \dots + \frac{x^{2r+1}}{\lfloor 2r+1} + \dots \dots$

(c) Logarithmic series

(i) If $-1 < x \leqslant 1$, then
$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots \dots \ + (-1)^{r-1}(x^r/r) + \dots \dots$

Converges to $\log_e(1+x)$.

$$\therefore \log_e(1+x) = x - (x^2/2) + (x^3/3) - \dots$$
$$\dots + (-1)^{r-1}(x^r/r) + \dots \dots \quad (-1 < x \leqslant 1).$$

Also, $$-\log_e(1-x) = x + (x^2/2) + (x^3/3) + \dots$$
$$\dots + (x^r/r) + \dots \dots \quad (-1 \leqslant x < 1).$$

(ii) $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\dots\dots\dots$

(iii) $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \dots$

$$\dots + \frac{x^{2r-1}}{2r-1} + \dots \dots \quad (-1 < x < 1).$$

12. Logarithms : Compound interest and Annuities

(a) **Logarithms**

(i) If $b^x = N$ $(b > 0)$ then $x = \log_b N$.

(ii) $a^{\log_a x} = x$.

(iii) $\left.\begin{array}{l} \log mn = \log m + \log n \\ \log(m/n) = \log m - \log n \\ \log m^n = n \log m \\ \log_m m = 1, \log 1 = 0 \end{array}\right\}$ with respect to a base > 0 and $\neq 1$.

(iv) Common Logarithms → logarithms to the base 10.
Antilogarithm → Number corresponding to a given logarithm. (e.g., antilog 3 means "the number whose log is 3").

(v) Common logarithm of a number = Characteristic + Mantissa For finding characteristic use the rules of Art. 9·7 Mantissa is obtained by using log-table. Mantissa is to be taken always positive.

(b) **Compound Interest:** $A = P(1+i)^n$, where

i = rate of interest per conversion period

n = total number of conversion periods.

Formula for depreciation: $S = P(1-i)^n$;

where S = scrap value, P = original value.

(c) **Annuities**

Present value of an immediate annuity

$$= a_{\overline{n}|} P = P\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Amount of an immediate annuity

$$= S_{\overline{n}|} P = \frac{P\{(1+i)^n - 1\}}{i}.$$

1
ভেদ
(VARIATION)

1·1. সূচনা

বিভিন্ন বিষয় যেমন পদার্থবিদ্যা, রসায়নবিদ্যা, জীববিদ্যা প্রভৃতির অনুশীলনে আমাদের প্রায়ই দুই বা তদধিক চলরাশির মধ্যে সম্বন্ধ অনুসন্ধানের প্রয়োজন হয়। **চলরাশি** (variable quantity) বা সংক্ষেপে **চল** (variable) বলিতে আমরা বুঝি এমন একটি রাশি যাহা বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিভিন্ন মান গ্রহণে সক্ষম। এই অধ্যায়ে আমরা এইরূপ তিন প্রকারের **পরিবর্তন** (বা **ভেদ**) সম্পর্কে আলোচনা করিব—**সরল ভেদ** (direct variation), **ব্যস্ত ভেদ** (inverse variation) এবং **যৌগিক ভেদ** (joint variation)।

1·2. সরল ভেদ

সংজ্ঞা : যদি দুইটি চলরাশি A এবং B এইরূপ সম্বন্ধযুক্ত হয় যে A কোন এক অনুপাতে বৃদ্ধি (বা হ্রাস) পাইলে B ও একই অনুপাতে বৃদ্ধি (বা হ্রাস) পায়, তাহা হইলে আমরা বলি যে 'A, B এর সহিত সরল ভেদে আছে', অথবা সংক্ষেপে বলি 'A, B এর সহিত ভেদে আছে'। তখন আমরা লিখিয়া থাকি : $A \propto B$।

ধরা যাক, A পর পর a_1, a_2, a_3, $\cdots$ $\cdots$ প্রভৃতি মান গ্রহণ করিল এবং মনে করা যাক, B এর অনুরূপ মানগুলি তখন যথাক্রমে $b_1, b_2, b_3, \cdots$ $\cdots$ হইল। তাহা হইলে $A \propto B$ বলিতে আমরা বুঝিব

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2};\ \frac{a_1}{a_3}=\frac{b_1}{b_3};\ \frac{a_2}{a_3}=\frac{b_2}{b_3};\ \cdots \quad \cdots$$

$$\therefore\ \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2};\ \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_3}{b_3};\ \frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3};\ \cdots \quad \cdots$$

$$\therefore\ \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}= \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

অতএব দেখা যাইতেছে

$$\frac{A \text{ এর যে কোন মান}}{B \text{ এর অনুরূপ মানটি}}$$

সর্বদা একই থাকে (অর্থাৎ উহাদের অনুপাত একটি ধ্রুবক)। এই তথ্যটিকে আমরা এইভাবে লিখিয়া থাকি :

$$\frac{A}{B}=k,$$

যেখানে k একটি ধ্রুবক অর্থাৎ k এর মান A ও B এর মানের নিরপেক্ষ ; k কে ভেদধ্রুবকও বলা হয়।

॥ মনে রাখিবে ॥ $A \propto B$ বলিলে $A=kB$ লেখা যাইবে (যেখানে k একটি ধ্রুবক)। বিপরীতক্রমে, $A=kB$ (যেখানে k একটি ধ্রুবক) বলিলে $A \propto B$ লেখা যাইবে। (A ও B কে দুইটি প্রদত্ত চলরাশি মনে করা হইয়াছে।)

উদা : মনে কর x এবং y এমন দুইটি চলরাশি যেন $x \propto y$। দেওয়া আছে $x=15$ হইলে $y=5$ হয়। x এবং y এর মধ্যে একটি সম্পর্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : যেহেতু $x \propto y$, $\therefore$ $x=ky$ (যেখানে k একটি ভেদধ্রুবক)। প্রদত্ত মানের সেট (set) হইতে পাওয়া যায় $15=k.5$ অর্থাৎ $k=3$. সুতরাং নির্ণেয় সম্পর্কটি হইল $x=3y$.

টীকা : 1 চলরাশি বুঝাইতে সাধারণতঃ A, B, C প্রভৃতি ইংরাজী বড় অক্ষর অথবা ইংরাজী বর্ণমালার শেষ কয়েকটি অক্ষর—x, y, z ইত্যাদি ব্যবহার করা হয়।

2. বিভিন্ন ভেদের **ভেদধ্রুবক** বুঝাইবার জন্য বিভিন্ন অক্ষর ব্যবহার করিতে হইবে। যেমন, $A \propto B$, $C \propto D$, $T \propto L$ ইত্যাদি ভেদের জন্য $A=kB$, $C=lD$, $T=mL$ লিখিতে হইবে (এখানে k, l, m ইত্যাদি ভেদধ্রুবক)।

3. অন্যরূপ উল্লেখ না থাকিলে $k, l, m, n, \cdots$ ইত্যাদি অক্ষরগুলি ভেদধ্রুবক হিসাবেই ব্যবহার করা হইবে।

1·3. ব্যস্ত ভেদ

সংজ্ঞা : দুইটি চলরাশি A ও B এর মধ্যে যদি এইরূপ সম্পর্ক থাকে যে A কোন এক অনুপাতে বৃদ্ধি পাইলে B ঐ একই অনুপাতে হ্রাস পায় অথবা বিপরীতক্রমে A কোন এক অনুপাতে হ্রাস পাইলে B সেই একই অনুপাতে বৃদ্ধি পায় তাহা হইলে আমরা বলি যে 'A, B এর সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে'। এক্ষেত্রে 'B, A এর সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে'—ইহাও বলা যাইতে পারে।

ধরা যাক্ A এর মান a_1 হইতে বৃদ্ধি পাইয়া a_2 হইল (অর্থাৎ A এর মান a_1/a_2 অনুপাতে বৃদ্ধি পাইল) এবং মনে করা যাক্ সেই সংগে B এর মান b_1 হইতে হ্রাস পাইয়া b_2 হইল (অর্থাৎ B এর মান b_2/b_1 অনুপাতে হ্রাস পাইল)। যদি A, B এর সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে, তবে

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_2}{b_1}\text{; অর্থাৎ } a_1b_1=a_2b_2.$$

সুতরাং ব্যস্ত ভেদের ক্ষেত্রে

A এর যে কোন মান এবং B এর অনুরূপ মানের গুণফল অপরিবর্তিত থাকে, অর্থাৎ এই গুণফলটি একটি ধ্রুবক $=k$ (ধরা যাক)।

এক্ষেত্রে আমরা লিখি : $A \times B=k$ (যেখানে k একটি ভেদধ্রুবক)

অথবা লিখি : $A=k.\dfrac{1}{B}$; অতএব দেখা যাইতেছে, $A \propto \dfrac{1}{B}$.

॥ **মনে রাখিবে** ॥ 'A, B এর সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে' এবং 'A, $\frac{1}{B}$ এর সহিত সরল ভেদে আছে'—এই দুইটি উক্তি সমার্থক। অর্থাৎ যদি বলা হয়, A, B এর সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে তখন লিখিতে পারিবেঃ $A \propto \frac{1}{B}$ অথবা $A.B=k$ (যেখানে k একটি ভেদধ্রুবক)।

উদাঃ 1ঃ যদি 15 জন ব্যক্তি একখণ্ড জমিতে 8 দিনে লাঙ্গল দিতে পারে, তাহা হইলে সমশক্তিসম্পন্ন কতজন ব্যক্তি ঐ জমিটিতে 5 দিনে লাঙ্গল দিতে পারিবে?

সমাধানঃ ধরা যাক্, n = ব্যক্তির সংখ্যা এবং d = জমিটিতে লাঙ্গল দিবার জন্য প্রয়োজনীয় দিনের সংখ্যা। স্পষ্টতঃ একই জমি চষিতে সমশক্তিসম্পন্ন ব্যক্তির সংখ্যা যে হারে বাড়ান হইবে দিনসংখ্যা সেই হারে কমিবে এবং ব্যক্তির সংখ্যা যে হারে কমান হইবে দিনসংখ্যা সেই হারে বাড়িবে। অর্থাৎ বলা যায় যে 'ব্যক্তির সংখ্যা' n, 'প্রয়োজনীয় দিনসংখ্যা' d এর সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে। অর্থাৎ $n \propto \frac{1}{d}$ অথবা $n.d$ = ধ্রুবক k (ধরা যাক্)।

দেওয়া আছে $n=15$ যখন $d=8$. $\therefore$ $k=15.8=120$.

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $d=5$. অতএব $n=k/d=120/5=24$.

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যক্তির সংখ্যা = **24.**

উদাঃ 2ঃ (i) $A \propto B$ হইলে দেখাও যে $B \propto A$.

(ii) $A \propto \frac{1}{B}$ হইলে দেখাও যে $B \propto \frac{1}{A}$.

সমাধানঃ (i) যেহেতু $A \propto B$, অতএব লিখিতে পারি $A=kB$, যেখানে k একটি ভেদধ্রুবক। তখন $B=\frac{1}{k}A$.

মনে রাখিতে হইবে, k একটি ধ্রুবক হইলে $\frac{1}{k}$ ও একটি ধ্রুবক। $\therefore$ $B \propto A$.

অনুরূপভাবে (ii) অংশটিও প্রমাণ করা যাইবে।

1·4. যৌগিক ভেদ

সংজ্ঞা 1ঃ একটি চলরাশি A কতিপয় সসীমসংখ্যক চলরাশি যথা $B, C\ D$ প্রভৃতির গুণফলের সহিত সরল ভেদে থাকিলে A, অপর রাশিগুলি (B, C, D....)র সহিত যৌগিক ভেদে আছে, বলা হয়।

॥ **মনে রাখিবে** ॥ A, B ও C এর সহিত যৌগিক ভেদে আছে বলিতে বুঝায়ঃ $A \propto BC$ বা $A=kBC$, যেখানে k ভেদধ্রুবক।

সংজ্ঞা 2ঃ কোন একটি চলরাশি A, B এর সহিত সরল ভেদে এবং C এর সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে বলা হয়, যদি উহা B এবং $\frac{1}{C}$ এর সহিত যৌগিক ভেদে থাকে, অর্থাৎ যদি $A \propto B.\frac{1}{C}$ হয়। অর্থাৎ যদি $A=k\frac{B}{C}$ হয়, যেখানে k একটি ভেদধ্রুবক।

1·5. যৌগিক ভেদ সম্পর্কে একটি গুরুত্বপূর্ণ প্রতিপাদ্য

॥ প্রতিপাদ্য ॥ ধরা যাক A, B এবং C তিনটি চলরাশি এবং B অথবা C অথবা উভয়েরই মানের পরিবর্তনের সঙ্গে প্রতিক্ষেত্রেই A এর মানের পরিবর্তন হয়। এখন C অপরিবর্তিত থাকিলে যদি A, B এর সহিত ভেদে থাকে এবং B অপরিবর্তিত থাকিলে A, C এর সহিত ভেদে থাকে, তবে এই প্রতিপাদ্য অনুসারে, A, B ও C এর সহিত যৌগিক ভেদে থাকিবে, যদি B ও C উভয়েরই একসঙ্গে পরিবর্তন হয়।

প্রমাণ : প্রদত্ত : $A \propto B$, যখন C ধ্রুবক··· (i)

এবং $A \propto C$, যখন B ধ্রুবক··· (ii)

প্রমাণ করিতে হইবে, $A \propto BC$, যখন B ও C উভয়ের একসঙ্গে পরিবর্তন হয়।

A	B	C
a_1	b_1	c_1
a_2	b_2	c_1
a_3	b_2	c_2

A, B ও Cর একপ্রস্ত মান লইয়া শুরু করা যাক্। মনে করা যাক্, যখন $A=a_1$, তখন $B=b_1$ এবং $C=c_1$.

স্বীকার্য (i) অনুসারে C এর মানের পরিবর্তন হয় না (অর্থাৎ C এর মান c_1 এ স্থির থাকে) যদি A'র মান a_1 হইতে a_2তে পরিবর্তিত হয় এবং ফলে যদি B'র মান b_1 হইতে পরিবর্তিত হইয়া b_2 হয়, তবে $A \propto B$ বলিয়া

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2} \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

আবার স্বীকার্য (ii) অনুসারে B'র মান (b_2 তে) স্থির থাকে। এখন ধরা যাক্ Aএর মান a_2 হইতে a_3তে পরিবর্তিত হয় এবং ফলে মনে করা যাক্ Cর মান c_1 হইতে পরিবর্তিত হইয়া c_2 হয়। তাহা হইলে ($\because A \propto C$)

$$\frac{a_2}{a_3}=\frac{c_1}{c_2} \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

(iii) ও (iv) হইতে আমরা পাই,

$$\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}=\frac{b_1}{b_2}\cdot\frac{c_1}{c_2}$$

এইরূপে আমরা দেখি, যখন A, B, C এর মান (a_1, b_1, c_1) হইতে পরিবর্তিত হইয়া (a_3, b_2, c_2) হয়, তখন $a_1 : a_3 = b_1c_1 : b_2c_2$ হইল।

অতএব প্রমাণিত হইল যে B ও C উভয়েরই পরিবর্তন হইলে

$$A \propto BC.$$

বিকল্প প্রমাণ : যেহেতু $A \propto B$, যখন C ধ্রুবক, সুতরাং আমরা লিখিতে পারি,

$A=kB$, যেখানে A ও B এর পরিবর্তন সম্পর্কে k ধ্রুবক।

আবার $A \propto C$, যখন B ধ্রুবক,

$\therefore kB \propto C$, যখন B ধ্রুবক

$\therefore k \propto C$, ($\because B$ ধ্রুবক)

$\therefore\ k=lC$, যেখানে k ও C সম্পর্কে l ধ্রুবক।

কিন্তু A ও B সম্পর্কে k ধ্রুবক, সুতরাং A, B ও C সম্পর্কে l ধ্রুবক।

সুতরাং পরিশেষে $A=kB=(lC)B \quad (\because\ k=lC)$

$=(l)BC$, যেখানে A, B ও C সম্পর্কে l ধ্রুবক।

$\therefore\ A \propto BC.$

টীকা 1. যে কোন সসীম সংখ্যক চলরাশি সম্পর্কে প্রতিপাদ্যটি সত্য।

সুতরাং $A, B, C, D, E, F\cdots$ যদি এইরূপ চলরাশি হয় যে

$A \propto B$, যখন অপর চলগুলি ধ্রুবক থাকে,

$A \propto C$, যখন অবশিষ্ট চলগুলি ধ্রুবক থাকে,

... ...

তবে $A \propto BCDEF\cdots$, যখন $B, C, D, E, F\cdots$ প্রভৃতি সকল রাশি ও ফলে A পরিবর্তিত হয়।

টীকা 2. যদি $A \propto B$, যখন C ধ্রুবক $\left(\text{সুতরাং } \frac{1}{C} \text{ ধ্রুবক}\right)$,

এবং $A \propto \frac{1}{C}$, যখন B ধ্রুবক,

তবে $A \propto B.\frac{1}{C}$, যখন B ও $\frac{1}{C}$ উভয়ে পরিবর্তিত হয়, এবং ফলে যখন B এবং C উভয়ে পরিবর্তিত হয়।

একটি অতি প্রয়োজনীয় মন্তব্য :

আমরা লক্ষ্য করিয়াছি যে ধ্রুবকের মান সর্বদা একই থাকে। যেমন 3, 5, 7 ইত্যাদির মান সর্বদাই এক—কোন অবস্থাতেই এই সব সংখ্যাসূচক বা সাংখ্য ধ্রুবকের মান পরিবর্তিত হয় না। ইহাদের বলা হয় **'পরম ধ্রুবক'** (fixed বা absolute constants)। কিন্তু যখন $A \propto B$, তখন আমরা লিখি $A=kB$, যেখানে k একটি ধ্রুবক। এই ধ্রুবক k এর মান A ও B এর সম্পর্কে অপরিবর্তিত থাকে। অন্য অবস্থায় k এর মান পরিবর্তিত হইতে পারে। এই রকম ধ্রুবককে বলা হয় **'অবাধ ধ্রুবক'** (arbitrary constants)।

॥ **মনে রাখিবে** ॥ পরম ধ্রুবকের মান কোন অবস্থাতেই পরিবর্তিত হয় না কিন্তু অবাধ ধ্রুবক বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিভিন্ন মান গ্রহণ করিতে পারে।

প্রশ্নমালা I(A)

1. নিম্নলিখিত অনুসিদ্ধান্তগুলি সযত্নে স্মরণ রাখিতে হইবে :

(i) $A \propto B$ এবং $B \propto C$ হইলে $A \propto C$

(ii) $A \propto C$ এবং $B \propto C$ হইলে $A+B \propto C$; $A-B \propto C$; $\sqrt{AB} \propto C$

(iii) $A \propto B$ এবং $C \propto D$ হইলে $AC \propto BD$; $\frac{A}{C} \propto \frac{B}{D}$

(iv) $A \propto B$ এবং $A \propto C$ হইলে $A \propto B-C$

(v) $A \propto BC$ হইলে $B \propto \frac{A}{C}$; $C \propto \frac{A}{B}$.

[পূর্ববর্তী সংজ্ঞাগুলি হইতে এই অনুসিদ্ধান্তগুলি সরাসরি পাওয়া যায়। এখানে এই বিষয়টি কেবল স্মরণ রাখিতে হইবে যে, যদি k ও l দুইটি ভেদধ্রুবক হয়, তবে $k \pm l$ বা k/l বা $\sqrt{kl}$ বা $\frac{1}{k}$ বা $\frac{1}{l}$ ইত্যাদিও ধ্রুবক। উদাহরণস্বরূপ (iv) এর প্রমাণটি দেওয়া হইল :

(iv) এর প্রমাণ : যেহেতু $A \propto B$, $\therefore$ $A=kB$, যেখানে k ভেদধ্রুবক।
যেহেতু $A \propto C$, $\therefore$ $A=lC$, যেখানে l ভেদধ্রুবক।
স্পষ্টতঃ $B-C=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{l}\right)A$

(যেখানে B ও C পরিবর্তিত হয়, Aও পরিবর্তিত হয়। এই পরিবর্তনে কিন্তু l, k ধ্রুবক থাকে, সুতরাং $(1/k-1/l)$ও ধ্রুবক।)

সুতরাং $A=$(ধ্রুবক)$(B-C)$ $\therefore$ $A \propto B-C$.]

2. (i) যদি $A \propto \frac{1}{B}$ এবং $B \propto \frac{1}{C}$, তবে $C \propto A$

[ইঙ্গিত : $AB=k$; $BC=l$; $\therefore \frac{A}{C}=\frac{k}{l}$ (ধ্রুবক)।]

(ii) $\frac{A}{B} \propto A+B$ এবং $\frac{B}{A} \propto A-B$ হইলে দেখাও যে A ও B পরিবর্তিত হইলেও A^2-B^2 ধ্রুবক থাকিবে।

(iii) $A^2+B^2 \propto A^2-B^2$ হইলে দেখাও যে $A \propto B$.

[ইঙ্গিত : $\frac{A^2+B^2}{A^2-B^2}=k$ (k ভেদধ্রুবক) ; যোগ ও ভাগ ক্রিয়ার দ্বারা $\frac{A^2}{B^2}=\frac{k+1}{k-1}$

$\therefore \frac{A}{B}=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ (যাহা একটি ধ্রুবক) ; অতএব $A \propto B$.]

(iv) যদি $x \propto yz$ এবং $y \propto zx$, তবে দেখাও যে z একটি ধ্রুবক।

3. $x \propto y$ এবং $y \propto z$ হইলে প্রমাণ কর যে

(i) $x+y+z \propto \sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy}$

[ইঙ্গিত : $\because$ $x \propto y$ এবং $y \propto z$, ইহা সহজেই দেখা যায় যে $x \propto z$. তাহা হইলে লেখা যায় যে $y=kz$, $x=lz$, (k, l ধ্রুবক)। এখন দেখা যায়

$\frac{x+y+z}{\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy}}=\frac{1+k+l}{\sqrt{k}+\sqrt{l}+\sqrt{kl}}$ (ধ্রুবক) ; অতএব ...]

(ii) $x^2+y^2+z^2 \propto yz+zx+xy$

(iii) $x^n+y^n+z^n \propto yz^{n-1}+zx^{n-1}+xy^{n-1}$

(iv) $ax+by+cz \propto a'x+b'y+c'z$ (যেখানে a, b, c, a', b', c' ধ্রুবক)

4. $x \propto y$ এবং $y \propto z$ হইলে এবং x, y, z এর দুই প্রস্থ অনুরূপ মানগুলি (a, b, c) ও (a', b', c') হইলে প্রমাণ কর যে

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)=(aa'+bb'+cc')^2$$

[ইঙ্গিত : $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$; কেন? এইবার অঙ্কটিকে সম্পূর্ণ সমাধান কর।]

5. (i) যদি x, y, z এইরূপ তিনটি চল হয় যেন $y+z-x$ ধ্রুবক এবং যদি $(z+x-y)(x+y-z) \propto yz$, তবে প্রমাণ কর যে

$$x+y+z \propto yz.$$

[**সমাধান :** ধরা যাক্ $y+z-x=k$ (ধ্রুবক)। $(z+x-y)(x+y-z) \propto yz$ বলিয়া আমরা লিখিতে পারি, $(z+x-y)(x+y-z)=lyz$ (l ভেদধ্রুবক)।

$\therefore\ \{x-(y-z)\}\{x+(y-z)\}=lyz$

বা, $x^2-(y-z)^2=lyz$

বা, $x^2-\{(y+z)^2-4yz\}=lyz$

বা, $x^2-(y+z)^2=(l-4)yz$

বা, $(x+y+z)(x-y-z)=(l-4)yz$

বা, $(x+y+z)(-k)=(l-4)yz$ [$\because\ y+z-x=k$ (প্রদত্ত)]

$\therefore\ x+y+z=\frac{4-l}{k}yz=$(একটি ধ্রুবক)$yz$

$\therefore\ x+y+z \propto yz$]

(ii) $(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \propto x^2y^2$ হইলে প্রমাণ কর যে হয় $x^2+y^2=z^2$ নতুবা $x^2+y^2-z^2 \propto xy$.

[ইঙ্গিত : দেখাও যে $(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=-(x^2+y^2-z^2)^2+4x^2y^2$. ইহা হইতে নির্ণেয় সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়।]

6. (i) A, B এর সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকিলে এবং $B=3$ হইলে যদি $A=7$ হয়, তবে $B=2\frac{1}{3}$ হইলে Aএর মান কত ?

(ii) $x^2 \propto y^3$ হইলে এবং $y=4$ হইলে যদি $x=3$ হয় তবে $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ হইলে y এর মান কত ?

(iii) A, Bএর সহিত সরল ভেদে এবং Cএর সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে ; আবার $B=\frac{3}{7}$ এবং $C=\frac{9}{14}$ হইলে $A=\frac{2}{3}$; তাহা হইলে $A=\sqrt{48}$ এবং $C=\sqrt{75}$ হইলে Bএর মান নির্ণয় কর।

(iv) $x+y \propto z+\frac{1}{z}$ এবং $x-y \propto z-\frac{1}{z}$ হইলে x এবং zএর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর। (দেওয়া আছে, $z=2$, যখন $x=3$, $y=1$)

[উত্তর : (i) 9 ; (ii) $1\frac{1}{3}$; (iii) 60 ; (iv) $x=\frac{22}{15}z+\frac{2}{15z}$]

7. (i) মনে করা যাক্, y তিনটি রাশির সমষ্টির সহিত সরল ভেদে আছে। রাশি তিনটির প্রথমটি নিত্যধ্রুবক, দ্বিতীয়টি x এর সহিত ও তৃতীয়টি x^2 এর সহিত ভেদে আছে। দেওয়া আছে, $x=1$ হইলে $y=0$; $x=2$ হইলে $y=1$; $x=3$ হইলে $y=4$. এখন $x=7$ হইলে y এর মান কত হইবে ?

[**সমাধান :** ধরা যাক্ রাশি তিনটি A, B, C যেখানে A নিত্যধ্রুবক, $B \propto x$($\therefore$ $B=kx$) এবং $C \propto x^2$($\therefore$ $C=lx^2$) ; k ও l ভেদধ্রুবক।

প্রদত্ত : $y \propto A+B+C$

$\therefore$ $y=m(A+B+C)$, যেখানে m ধ্রুবক।

$=mA+mkx+mlx^2$

$=p+qx+rx^2$ (যেখানে $p=mA$, $q=mk$, $r=ml$, সকলেই ধ্রুবক)

পর পর প্রদত্ত তিন প্রস্থ মান বসাইয়া, $0=p+q+r$ ··· (1)

$1=p+2q+4r$ ··· (2)

$4=p+3q+9r$ ··· (3)

(2) − (1) হইতে পাই $q+3r=1$ ··· (4)

(3) − (2) হইতে পাই $q+5r=3$ ··· (5)

(5) − (4) হইতে পাই $2r=2$ বা, $r=1$

$\therefore$ (4) হইতে $q=-2$ এবং (1) হইতে $p=1$ পাওয়া যায়।

$\therefore$ x ও y এর মধ্যে নির্ণেয় সম্পর্ক হইল $y=1-2x+x^2$.

পরিশেষে, $x=7$ হইলে $y=7^2-2.7+1=36$.]

(ii) y এমন দুইটি রাশির সমষ্টির সহিত ভেদে আছে, যাহাদের একটি x এর সহিত সরল ভেদে এবং অপরটি x এর সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে ; যদি $y=6$ হয়, যখন $x=4$ এবং $y=3\frac{1}{3}$ হয়, যখন $x=3$, তাহা হইলে x ও y এর মধ্যে সমীকরণটি নির্ণয় কর।

(iii) যদি y এমন দুইটি রাশির সমষ্টির সমান হয়, যাহাদের একটি x এর সহিত সরল ভেদে ও অপরটি x^2 এর সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে এবং $x=2$ অথবা 3 হইলে, যদি $y=19$ হয়, তবে y কে x দ্বারা প্রকাশ কর।

[উত্তর : (ii) $y=2x-\frac{8}{x}$; (iii) $y=5x+\frac{36}{x^2}$]

8. A, B এর সহিত সরল ভেদে ও C^2 এর সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে ; একটিমাত্র ভেদধ্রুবকের সাহায্যে A, B এবং C এর মধ্যে সম্পর্কটি লিখ। এখন B এর মান 12% বৃদ্ধি পাইলে ও একই সঙ্গে C এর মান 20% হ্রাস পাইলে প্রমাণ কর যে A এর মান 75% বৃদ্ধি পাইবে।

[উত্তর : $A=k.B/C^2$.]

প্রশ্নমালা I (B)

[প্রয়োগ ভিত্তিক প্রশ্নসমূহ]

1. বৃত্তের ক্ষেত্রফল বৃত্তের ব্যাসার্ধের বর্গের সহিত ভেদে থাকে। 10 সে. মি. ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল 314·159 বর্গ সে. মি. হইলে যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ 12 সে. মি. তাহার ক্ষেত্রফল কত? [উঃ 452·39 ব. সে. মি. (প্রায়)।]

2. (i) গোলকের ঘনফল গোলকটির ব্যাসার্ধের ঘনের সহিত ভেদে থাকে এবং কোন গোলকের ব্যাসার্ধ 3·5 সে. মি. হইলে উহার ঘনফল 179·7 ঘন সে. মি. হয়; প্রমাণ কর যে উহার ব্যাসার্ধ 1·75 সে. মি. হইলে ঘনফল 22·46 ঘন সে. মি. হইবে।

(ii) 3 সে. মি., 4 সে. মি. এবং 5 সে. মি. ব্যাসার্ধের তিনটি সোনার গোলক একত্রে গলাইয়া একটি নূতন গোলক প্রস্তুত করা হইল। গোলকের ঘনফল গোলকের ব্যাসার্ধের ঘনের সহিত ভেদে থাকিলে নূতন গোলকটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

[**সমাধান:** ধরা যাক্, 3 সে. মি., 4 সে. মি. ও 5 সে. মি. ব্যাসার্ধের গোলক তিনটির ঘনফল যথাক্রমে V_1, V_2, V_3 এবং নূতন গোলকটির ঘনফল V ও ব্যাসার্ধ r.

প্রদত্ত: গোলকের ঘনফল = একটি ধ্রুবক $k\times$(গোলকটির ব্যাসার্ধ$)^3$

$\therefore\ V_1=k.3^3$; $V_2=k.4^3$; $V_3=k.5^3$; $V=k.r^3$

গোলক তিনটি গালাইয়া উহা হইতে যখন নূতন গোলকটি প্রস্তুত করা হয়, তখন মোট ভর (এবং ঘনাঙ্ক $d=$ ভর/একক ঘনফল) পরিবর্তিত হয় না;

$\therefore$ মোট ভর $=V.d=V_1.d+V_2.d+V_3.d$

বা, $V=V_1+V_2+V_3$

বা, $kr^3=k(3^3+4^3+5^3)$; বা, $r^3=216$; বা $r=6$ সে. মি.]

(iii) 10 সে. মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি নিরেট গোলককে ফুঁ দিয়া 30 সে. মি. ব্যাসবিশিষ্ট ফাঁপা গোলকে পরিণত করা হইল। উভয় গোলকই সমকেন্দ্রীয় হইলে দ্বিতীয় গোলকের কাঁচ কত পুরু, নির্ণয় কর। উল্লেখ থাকে যে গোলকের ঘনফল গোলকের ব্যাসার্ধের ঘনের সহিত ভেদে থাকে। [উঃ $5(3-\sqrt[3]{26})$ সে.মি.]

3. কোন ভারি বস্তু স্থির অবস্থা হইতে যে দূরত্ব নিচে পড়ে তাহা পতনকালের বর্গের সহিত ভেদে থাকে। একটি বস্তু 5 সেকেণ্ডে 122·6 মিটার নিচে পড়িলে 10 সেকেণ্ডে ঐ বস্তুটি কত নিচে পড়িবে? উহার পতনকালের দশম সেকেণ্ডে উহা কত মিটার পড়িবে?

[ইঙ্গিত: 10ম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব = 10 সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব − 9 সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব; $s=kt^2$ হইতে t সেকেণ্ডের দূরত্ব পাওয়া যাইবে (t তম সেকেণ্ডের নহে)।]

[উঃ 490·4 মি, 93·2 মি. (প্রায়)]

4. (i) গ্যাসের আয়তন গ্যাসটির পরম উষ্ণতার (absolute temperature) সহিত সরল ভেদে এবং চাপের (pressure) সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে; চাপ 15 একক এবং উষ্ণতা 260 একক হইলে আয়তন 200 একক হয়। চাপ 18 একক এবং উষ্ণতা 390 একক হইলে আয়তন কত হইবে?

(ii) সরল দোলকের দোলনকাল দোলকটির দৈর্ঘ্যের বর্গমূলের সহিত ভেদে থাকে। তিনটি এইরূপ দোলকের দোলনকাল যথাক্রমে t_1, t_2, t_3 ; দ্বিতীয় দোলকটি প্রথমটির অপেক্ষা d সে. মি. দীর্ঘতর হইলে দ্বিতীয় ও তৃতীয় দোলক দুইটির দৈর্ঘ্যের পার্থক্য কত তাহা নির্ণয় কর। [উত্তর : (i) 250 একক, (ii) $\frac{t_2^2-t_3^2}{t_2^2-t_1^2}.d$ সে. মি.]

যৌগিক ভেদের প্রশ্নসমূহ

অন্যান্য প্রশ্নসমূহের অবতারণার পূর্বে যে-সকল ক্ষেত্রে যৌগিক ভেদের উপপাদ্য প্রয়োগযোগ্য, তাহাদের কতিপয়ের সহিত ছাত্রছাত্রীদের পরিচিত করা যাক্।

(i) মাংসের ওজন (W) স্থির থাকিলে কিছু পরিমাণ মাংসের মূল্য (C) প্রতি কি. গ্রা. মাংসের দরের (P) সহিত ভেদে থাকে, এবং প্রতি কি.গ্রা.র দর স্থির থাকিলে মাংসের মূল্য উহার ওজনের সহিত ভেদে থাকে। সুতরাং ওজন ও প্রতি কি.গ্রা.র দর—উভয়েরই পরিবর্তন হইলে যৌগিক ভেদের উপপাদ্য অনুসারে মূল্য, ওজন ও প্রতি কি.গ্রা.র দরের গুণফলের সহিত ভেদে থাকিবে।

অর্থাৎ, যদি $C \propto P$, যখন W ধ্রুবক,

এবং $C \propto W$, যখন P ধ্রুবক,

তবে উপপাদ্যটি অনুসারে $C \propto PW$, যখন P এবং W উভয়েরই পরিবর্তন হয়।

(ii) উচ্চতা (H) স্থির থাকিলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (A), ত্রিভুজটির ভূমি (B)র সহিত ভেদে থাকে ; ভূমিটি স্থির থাকিলে ঐ ক্ষেত্রফল উচ্চতার সহিত ভেদে থাকে ; সুতরাং উচ্চতা এবং ভূমি উভয়েরই পরিবর্তন হইলে ক্ষেত্রফলটি ঐ ভূমি ও উচ্চতার সহিত যৌগিক ভেদে থাকিবে।

অর্থাৎ $A \propto BH$.

(iii) উষ্ণতা স্থির থাকিলে কোন গ্যাসের চাপ গ্যাসটির ঘনত্বের সহিত ভেদে থাকে ; ঐ ঘনত্ব স্থির থাকিলে চাপ উষ্ণতার সহিত ভেদে থাকে। এক্ষেত্রে যৌগিক ভেদের উপপাদ্যটি প্রয়োগ করিয়া কি সিদ্ধান্ত করিতে পার ?

(iv) মনে কর, কিছু সংখ্যক শ্রমিক প্রতিদিন কয়েক ঘণ্টা ধরিয়া কাজ করিয়া কয়েক দিনে কিছু সংখ্যক বৃক্ষ রোপণ করিতে পারে। আমরা কি এক্ষেত্রে ভেদের উপপাদ্য প্রয়োগ করিয়া চলগুলির মধ্যে একটি সম্বন্ধ নির্ণয় করিতে পারি ?

ধরা যাক্ m, h, n, d হইল যথাক্রমে শ্রমিকের সংখ্যা, প্রতিদিন কাজের ঘণ্টার সংখ্যা, বৃক্ষের সংখ্যা এবং দিনের সংখ্যা। তাহা হইলে,

$m \propto \frac{1}{h}$, যখন n এবং d ধ্রুবক ;

$m \propto n$, যখন d এবং h ধ্রুবক ;

$m \propto \frac{1}{d}$, যখন h এবং n ধ্রুবক।

$\therefore$ যৌগিক ভেদের উপপাদ্য অনুসারে, (1·5 অনুচ্ছেদের 2নং টীকা দ্রষ্টব্য ; পৃঃ 5) $m \propto \frac{1}{h} \cdot n \cdot \frac{1}{d}$, যখন ইহারা প্রত্যেকে পরিবর্তিত হয় ; বা $m = k \cdot \frac{n}{dh}$, যেখানে k হইল একটি ভেদধ্রুবক।

[উল্লিখিত উক্তিগুলি অবলম্বনপূর্বক সংখ্যাসংশ্লিষ্ট প্রশ্নসমূহ সহজেই প্রস্তুত করিয়া উহাদের সমাধান করা যায়। নিম্নে 6(ii) নং প্রশ্ন দ্রষ্টব্য।]

5. বেধ স্থির থাকিলে কোন বৃত্তাকার চাকতির ওজন চাকতিটির ব্যাসার্ধের বর্গের সহিত ভেদে থাকে ; ব্যাসার্ধ স্থির থাকিলে ঐ ওজন বেধের সহিত ভেদে থাকে। দুইটি এইরূপ চাকতির বেধ 9 : 8 অনুপাতে হইলে এবং প্রথমটির ওজন দ্বিতীয়টির দ্বিগুণ হইলে চাকতি দুইটির ব্যাসার্ধের অনুপাত নির্ণয় কর। [উঃ 4 : 3]

6. (i) উপগ্রহের প্রতি গ্রহের আকর্ষণ বল গ্রহটির ভর (M) এর সহিত সরল ভেদে এবং উভয়ের মধ্যে দূরত্ব (D)এর বর্গের সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে ; আবার উপগ্রহের আবর্তনকাল (T)এর বর্গ দূরত্বের সহিত সরল ভেদে এবং আকর্ষণ বলের সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে। M, D, T এর দুই প্রস্থ অনুরূপ মান যদি (m_1, d_1, t_1) এবং (m_2, d_2, t_2) হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\frac{m_1 t_1^2}{m_2 t_2^2} = \frac{d_1^3}{d_2^3}.$$

ইহা হইতে জুপিটারের একটি উপগ্রহের আবর্তনকাল নির্ণয় কর, যদি ঐ উপগ্রহটির দূরত্ব ও পৃথিবীর উপগ্রহ চন্দ্রের দূরত্ব 35 : 31 অনুপাতে হয়। (দেওয়া আছে, জুপিটারের ভর পৃথিবীর ভরের 343 গুণ এবং চন্দ্রের আবর্তনকাল 27·32 দিন।)

(ii) দিনে 9 ঘণ্টা পরিশ্রম করিয়া 14 জন শ্রমিক 12 দিনে 3780টি আম্রচারা রোপণ করিতে পারিলে সমশক্তিসম্পন্ন কতজন শ্রমিক দিনে 8 ঘণ্টা পরিশ্রম করিয়া 45 দিনে 9000টি আম্রচারা রোপণ করিতে পারিবে ? (ভেদের সূত্র প্রয়োগ কর।)

[উত্তর : (i) 1 দিন 18 ঘণ্টা 18 মিঃ (প্রায়) ; (ii) 10]

7. বগিবিহীন একখানি রেলইঞ্জিন ঘণ্টায় 35 কি. মি. বেগে যাইতে পারে এবং উহার গতিবেগ হ্রাসের পরিমাণ উহার সহিত যুক্ত বগির সংখ্যার বর্গমূলের সহিত সমানুপাতি। 16 খানি বগিযুক্ত হইলে যদি উহার বেগ ঘণ্টায় 15 কি. মি. হয়, তবে কমপক্ষে কতগুলি বগিযুক্ত হইলে ইঞ্জিনটি চলিতে অক্ষম হইবে ? অধিকপক্ষে কতগুলি বগি লইয়া ইঞ্জিনটি চলিতে সক্ষম তাহাও নির্ণয় কর। [উঃ 49 ; 48]

[ইঙ্গিত : লক্ষ্য কর, বেগ নয়, বেগের হ্রাসই $\sqrt{\text{বগির সংখ্যা } n}$ এর সহিত ভেদে আছে। সুতরাং কোন সময় বেগ যদি v কি. মি./ঘণ্টা হয়, তবে বেগহ্রাস হইল $(35 - v)$ এবং এই বেগহ্রাস $\propto \sqrt{n}$ বা $35 - v = k\sqrt{n}$. এখন অগ্রসর হও।]

8. একখানি বাষ্পচালিত রেলইঞ্জিনের কয়লা খরচ উহার বেগের বর্গের সহিত ভেদে আছে ; বেগ ঘণ্টায় 32 কি. মি. হইলে, প্রতি ঘণ্টায় কয়লা খরচ হয় 2 টন যদি প্রতি টন কয়লার মূল্য 10 টাকা হয় এবং অন্যান্য খরচ প্রতি ঘণ্টায় 11·25 টাকা হয়, তবে 100 কি. মি. যাইতে কমপক্ষে কত টাকা ব্যয় হইবে ?

[**সমাধান :** ধরা যাক, প্রতি ঘণ্টায় কয়লা খরচ $=C$ টন ; এবং যে কোন মুহূর্তে বেগ $=V$ কি.মি./ঘণ্টা ; তাহা হইলে $C\propto V^2$; বা $C=kV^2$ (k হইল ভেদধ্রুবক)।

প্রদত্ত তথ্য হইতে $k=\frac{2}{(32)^2}=\frac{1}{512}$; $\therefore C=\frac{1}{512}V^2$

ঈপ্সিত ন্যূনতম ব্যয় হইবে যখন, তখন ইঞ্জিনের বেগ $=v$ কি.মি./ঘণ্টা হইলে মোট সময় লাগিবে $100/v$ ঘণ্টা।

এই সময়ে মোট কয়লা খরচ $=\frac{1}{512}\cdot v^2\cdot\frac{100}{v}=\frac{100}{512}v$ টন।

এই পরিমাণ কয়লার জন্য ব্যয় $=\frac{100}{512}v\times 10$ টাকা

$\therefore$ মোট ব্যয় = কয়লার মূল্য + অন্যান্য ব্যয়

$$=\frac{1000}{512}v+11\tfrac{1}{4}\times\frac{100}{v}=\frac{1000}{512}v+\frac{45\times25}{v}$$

$$=\frac{1000}{512}\left(v+\frac{45\times25\times512}{1000v}\right)=\frac{1000}{512}\left(v+\frac{9\times64}{v}\right)$$

$$=\frac{1000}{512}\left[\left(\sqrt{v}-\frac{24}{\sqrt{v}}\right)^2+48.\sqrt{v}\times\frac{1}{\sqrt{v}}\right]$$

$$=\frac{1000\times48}{512}+\frac{1000}{512}\left\{\sqrt{v}-\frac{24}{\sqrt{v}}\right\}^2$$

ডান পক্ষের রাশিটি সর্বদা $\geqslant\frac{1000\times48}{512}$, $\left\{\because\left(\sqrt{v}-\frac{24}{\sqrt{v}}\right)^2\right.$ ঋণাত্মক হইতে পারে না ; উহা হয় ধনাত্মক অথবা শূন্য হইবে। }

$\therefore$ সমগ্র ব্যয়ের ন্যূনতম মান পাওয়া যাইবে যখন $\sqrt{v}-\frac{24}{\sqrt{v}}=0$, অর্থাৎ $v=24$ কি.মি./ঘণ্টা এবং ন্যূনতম ব্যয় $=\frac{1000\times48}{512}$ টা. $=\frac{375}{4}$ টা. $=93\cdot75$ টাকা।]

আংশিক ধ্রুবক ও আংশিক চলরাশি সম্বলিত প্রশ্নাবলী

9. কোন একটি বোর্ডিংএর খরচ আংশিক স্থির (যেমন বাড়ী ভাড়া, ঠাকুর চাকরের বাবদ খরচ) ও আংশিক বোর্ডারের সংখ্যার (রোজকার বাজার খরচ) সহিত ভেদে আছে। 25 জন বোর্ডারের জন্য মাথাপিছু ব্যয় 70 টাকা এবং 50 জনের জন্য 60 টাকা। বোর্ডারের সংখ্যা 100 হইলে মাথাপিছু ব্যয় নির্ণয় কর। [উঃ 55 টাকা.]

[ইঙ্গিত : $E=A+B$, $A=$ ধ্রুবক, $B\propto n$($n=$ বোর্ডারের সংখ্যা)

$\therefore E=A+kn$, যেখানে A, k উভয়েই ধ্রুবক।

এক্ষণে প্রদত্ত মানগুলি হইতে A এবং k নির্ণয় কর। পরিশেষে A এবং kএর মানের সাহায্যে বাহির কর E কত হইবে, যদি $n=100$ হয়।]

10. এক ফটোগ্রাফার একটি আলোকচিত্রের 12টি কপি 60 টাকায় এবং 20টি কপি 80 টাকায় দিতে স্বীকৃত হইল ; হিসাব করিয়া সে দেখিল, ইহাতে তাহার যথাক্রমে 5 টাকা এবং 7 টাকা লাভ হইবে। সে যদি 10 টাকা লাভ করিতে চায় তবে 30 কপি কত টাকায় দিবে ? [উঃ 105 টা. 50 প.]

11. এক গ্রন্থকার কোন পুস্তকের জন্য একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ অর্থ এবং বিক্রীত প্রতিখানি পুস্তকের জন্য আরও কিছু অতিরিক্ত টাকা নির্দিষ্ট হারে পাইয়া থাকেন। যদি তিনি বিক্রীত 500 এবং 1350 কপি পুস্তকের জন্য যথাক্রমে 750 টাকা এবং 1175 টাকা পাইয়া থাকেন, তবে 10,000 কপি বিক্রয় হইলে তিনি কত টাকা পাইবেন ? [উঃ 5,500 টাকা]

প্রশ্নমালা I(C)

TEST PAPERS (পরীক্ষামূলক প্রশ্নাবলী)

A

(সময় : 40 মিনিট)

1. $ax^2+2hxy+by^2 \propto z^2$ এবং $lx+my \propto z$ হইলে দেখাও যে $x \propto y$ (প্রদত্ত : a, b, h, l, m ধ্রুবক)।

2. একখণ্ড হীরার মূল্য ইহার ওজনের বর্গের সহিত ভেদে আছে। তিনটি হীরা বসান সোনার আংটির ওজন সমান ও উহাদের মূল্য যথাক্রমে x টাকা, y টাকা, z টাকা। আংটি তিনটির হীরার ওজন যথাক্রমে 3, 4 এবং 5 ক্যারেট হইলে প্রমাণ কর যে এক ক্যারেট ওজনের হীরার মূল্য $\{\frac{1}{2}(x+z)-y\}$ টাকা। (প্রতিটি আংটির মজুরীমূল্য সমান ধর।)

3. একটি লীগ প্রতিযোগিতায় কোন দিনের অনুষ্ঠিত ক্রীড়াসংখ্যা, লীগ আরম্ভের দিন হইতে ঐ দিন পর্যন্ত দিনের সংখ্যা এবং লীগ সমাপ্তির দিন হইতে ঐ দিন পর্যন্ত দিনের সংখ্যার সহিত যৌগিক ভেদে ছিল। (উভয় ক্ষেত্রে সংশ্লিষ্ট দিনটিকে দিনের সংখ্যার অন্তর্ভুক্ত করিতে হইবে।) পর পর তিনদিন এই ক্রীড়াসংখ্যা যথাক্রমে 6, 5 এবং 3 হইলে এই তিন দিন কোন্ কোন্ দিন ছিল এবং লীগ প্রতিযোগিতা কত দিন স্থায়ী হইয়াছিল ?

4. একটি রেলভ্রমণের মেয়াদকাল দূরত্বের সহিত সরল ভেদে এবং ট্রেনের বেগের সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে। আবার ঐ বেগ, প্রতি মাইলে যে পরিমাণ কয়লা খরচ হয় তাহার বর্গমূলের সহিত সরল ভেদে এবং ট্রেনটির অন্তর্গত বগির সংখ্যার সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে। একটি 18 বগির ট্রেনে অর্ধঘণ্টায় 25 কি.মি. দীর্ঘ ভ্রমণে যদি 100 কি.গ্রা. কয়লার প্রয়োজন হয়, তবে 16 বগির ট্রেনে 28 মিনিটে 21 কি.মি. দীর্ঘ ভ্রমণের জন্য কত কয়লা আবশ্যক হইবে ?

5. বেসরকারী বাসের এক কন্‌ডাক্‌টরের বেতনের একটি অংশ নির্দিষ্ট এবং অবশিষ্ট অংশ কমিশন্‌ভিত্তিক। কমিশনের পরিমাণ, বিক্রীত টিকিটের মূল্যের সহিত ভেদে আছে। পর পর তুইমাস সে যথাক্রমে 2,000 টাকা এবং 2,500 টাকা মূল্যের টিকিট বিক্রয় করিয়া ঐ তুই মাসে যথাক্রমে 420 টাকা এবং 445 টাকা বেতন পাইল। কোন একটি নির্দিষ্ট মাসে সে 500 টাকা বেতন পাইয়া থাকিলে ঐ মাসে সে কত টাকা মূল্যের টিকিট বিক্রয় করিয়াছিল ?

B

(সময় : 40 মিনিট)

1. (i) যদি $\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\propto\frac{1}{A-B}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $A^2 \pm B^2 \propto AB$.

(ii) যদি $A^2+B^2 \propto X^2+Y^2$, $AB \propto XY$ এবং $\frac{A}{B}+\frac{B}{A}=\frac{X}{Y}+\frac{Y}{X}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $A+B \propto X+Y$.

2. বৃত্তাকার প্রস্থচ্ছেদযুক্ত (circular cross-section) একটি তারের তাড়িতিক রোধ (electrical resistance), তারটির দৈর্ঘ্যের সহিত সরল অনুপাতে ও ব্যাসার্ধের বর্গের সহিত ব্যস্ত অনুপাতে পরিবর্তিত হয়। একই উপাদানের তুইটি তারের রোধ সমান হইলে এবং উহাদের ব্যাসার্ধ তুইটি 9 : 8 অনুপাতে থাকিলে উহাদের দৈর্ঘ্য তুইটির অনুপাত নির্ণয় কর।

3. ঘনত্ব স্থির থাকিলে কোন তরলের অভ্যন্তরস্থ কোন বিন্দুতে চাপ, বিন্দুটির গভীরতার সহিত ভেদে থাকে এবং গভীরতা স্থির থাকিলে ঐ চাপ ঘনত্বের সহিত ভেদে থাকে। জলের উপরের তল হইতে 10 মিটার গভীরতায় কোন বিন্দুতে চাপ 1 ধরিলে, যে তরলের ঘনত্ব জলের ঘনত্বের 13·6 গুণ, তাহার কত গভীরতায় চাপ 27·2 একক হইবে ?

4. বগিবিহীন কোন বাষ্পীয় রেলইঞ্জিন প্রতি ঘণ্টায় 40 কি.মি. বেগে যাইতে পারে ; এবং ইহার বেগহ্রাসের পরিমাণ, যুক্ত বগির সংখ্যার বর্গমূলের সহিত ভেদে আছে। যদি 49টি বগিযুক্ত হইলে উহার বেগ ঘণ্টায় 12 কি.মি. হয়, তবে কমপক্ষে কয়টি বগি যুক্ত হইলে উহা চলিতে অক্ষম হইবে ?

5. চাকুরীঅন্তে আনুতোষিকের পরিমাণ চাকুরীর মেয়াদকালের বর্গমূলের সহিত সরল ভেদে থাকে। এই সূত্র অনুসারে তুই ব্যক্তিকে আনুতোষিক দেওয়া হইল। উহাদের মধ্যে একজন অপরজন অপেক্ষা 9 বৎসর অধিককাল চাকুরী করিয়া মোট 500 টাকা বেশী পাইলেন। যদি ঐ ব্যক্তির চাকুরীকাল মাত্র $4\frac{1}{4}$ বৎসর অধিক হইত তাহা হইলে উহাদের আনুতোষিকের পরিমাণের অনুপাত হইত 9 : 8. কে কত বৎসরকাল চাকুরী করিয়াছেন ও তাঁহাদের আনুতোষিকের পরিমাণই বা কত তাহা নির্ণয় কর।

উত্তর

A. **3.** 4র্থ, 5ম এবং 6ষ্ঠ দিন ; 6 দিন। **4.** 53·76 কি.গ্রা.। **5.** 3600 টাকা।

B. **2.** 81 : 64. **3.** 20 মিঃ **4.** 100. **5.** 16, 25 বৎসর ; 2000 টাকা ও 2500 টাকা।

2

সংখ্যা তত্ত্ব
(THE NUMBER SYSTEM)

সুচকের নিয়মাবলী ও করণী
(LAWS OF INDICES & SURDS)

2.1. সূচনা

আলোচ্য অধ্যায়ে প্রথমে সংখ্যাতত্ত্বের ক্রমবিকাশ সংক্ষিপ্তাকারে বিবৃত হইবে। প্রকৃতপক্ষে 1, 2, 3, ... প্রভৃতি গণনাকারী সংখ্যা (স্বাভাবিক সংখ্যা বলিয়াও কথিত) হইতে শুরু করিয়া ধাপে ধাপে মূলদ সংখ্যা, অমূলদ সংখ্যা এবং শেষে বাস্তব সংখ্যার ধারণার সহিত পরিচয় করান হইবে। পরবর্তী একটি অধ্যায়ে দেখা যাইবে, দুইটি বাস্তব সংখ্যা যুগ্মভাবে একটি একক সত্তা—জটিল সংখ্যারূপে কিভাবে বিবেচিত হইতে পারে।

দুইটি গুরুত্বপূর্ণ প্রক্রিয়া, যথা উদ্ঘাটন (বাস্তব সংখ্যার কোন নির্দিষ্ট ঘাতে উন্নয়ন) এবং মূলাকর্ষণ বর্তমান অধ্যায়ের প্রধান আলোচ্য বিষয়। এই উদ্দেশ্যে অধ্যায়টিকে তিনটি পরিচ্ছেদে বিভক্ত করা হইল।

প্রথম পরিচ্ছেদ

2.2. সংখ্যা উৎপত্তি ও গঠন প্রণালী

সংখ্যাতত্ত্ব সম্বন্ধে আলোচনা করিবার পূর্বে সেট্ (set) কথাটির সহিত পাঠকদের পরিচিত হওয়া প্রয়োজন। কেননা 'সেটের' ধারণাই গণিত শাস্ত্রের সর্বাপেক্ষা মৌলিক ধারণা। বর্তমান অধ্যায়ে ও পরবর্তী আলোচনাকালে সেট্ শব্দটি প্রায়ই ব্যবহার করা হইবে। সুসংজ্ঞেয় (well-defined) ও পরস্পর হইতে পৃথক (distinct) বস্তুসমূহের সামগ্রিক সংগ্রহকে (collection) সেট্ বলা হয়। সুসংজ্ঞেয় বস্তুসমূহ বলিতে বুঝায়, উহারা কতিপয় বৈশিষ্ট্য (characteristics) দ্বারা চিহ্নিত—যে বৈশিষ্ট্যসমূহ হইতে জানা যায়, প্রদেয় যে কোন বস্তু ঐ সেটের অন্তর্গত কি না। ঐ বস্তুগুলিকে সেট্টির উপাদান বা অঙ্গ (elements or members) বলা হয়। সেটগুলিকে A, B, X, Y ইত্যাদি বড় অক্ষর দ্বারা এবং উপাদানগুলিকে a, b, x, y প্রভৃতি ছোট অক্ষর দ্বারা নির্দেশ করা হয়। সেটের কতিপয় উদাহরণ :

(*i*) ইংরাজী বর্ণমালায় স্বরবর্ণের সেট্ $\{a, e, i, o, u\}$

(*ii*) এই পুস্তকে লিখিত একাধিকবার ব্যবহৃত হয় নাই এইরূপ শব্দসমূহের সেট্

(*iii*) এশিয়া মহাদেশে অবস্থিত দেশগুলির সেট্

(*iv*) পশ্চিমবঙ্গের সকল ফুটবল টিমের সেট্

(v) জানুয়ারী হইতে ডিসেম্বর এই বারোটি মাসের মধ্যে যে মাসগুলি D অক্ষর দিয়া শুরু তাহাদের সেট্

(vi) প্রথম তিনটি ধনাত্মক যুগ্ম সংখ্যার সেট্ $\{2, 4, 6\}$

কোন একটি উপাদান x, A সেটের অন্তর্গত হইলে লেখা হয় $x \in A$, আবার উপাদান y যদি A সেটের অন্তর্ভুক্ত না হয় তবে লিখিতে হইবে $y \notin A$; উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, $a \in$ সেট্ (i), জানুয়ারী $\notin$ সেট্ (v)।

I. বর্তমান গ্রন্থে কেবল সংখ্যার সেট্ই (অর্থাৎ যে সকল সেটের উপাদানগুলি কেবলমাত্র সংখ্যা ব্যতীত অন্য কোন বস্তু নহে) আলোচনার অন্তর্গত। প্রকৃতপক্ষে Counting numbers বা গণনাকারী সংখ্যার [বা স্বাভাবিক সংখ্যার (Natural numbers) বা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার (Positive integers)] সেট্ N দিয়াই আলোচনা শুরু হইবে :

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots \cdots\}$$

এই সেটের যে কোন দুইটি উপাদানকে **যোগ** অথবা **গুণ** করা যায়—প্রাপ্ত ফলও এক একটি স্বাভাবিক সংখ্যা (যথা $2+5=7$; $3.5=15$)। স্বাভাবিক সংখ্যার যোগক্রিয়া এবং গুণক্রিয়া একান্ত মৌলিক দুইটি নিয়মের অনুগামী :

1. **বিনিময় নিয়ম** (Commutative Law) : $a+b=b+a$ এবং $a.b=b.a$.

2. **সংযোগ নিয়ম** (Associative Law) : $(a+b)+c=a+(b+c)$ এবং $(a.b).c=a(b.c)$. যোগ ও গুণ—এই ক্রিয়া দুইটি আরও একটি সূত্র দ্বারা আবদ্ধ; ইহাকে বলা হয়—

3. **বিচ্ছেদ নিয়ম** (Distributive law) : $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$

II. **শূন্য (Zero)** : 0 (শূন্য) প্রতীক চিহ্নটি নিম্নবর্ণিত গুণগুলির অধিকারী : যে কোন সংখ্যা a'র ক্ষেত্রে, $a+0=a$ এবং $a.0=0$।

বিয়োগ। এই ক্রিয়াটি যোগক্রিয়ার বিপরীত : $a-b$ হইল এমন একটি অনন্য (unique) সংখ্যা c যাহাকে b'র সহিত যোগ করিলে a পাওয়া যায়।

a'র ঋণাত্মক মান (Negative of a)। যদি $a+b=0$ হয়, তাহা হইলে bকে বলা হয় a'র ঋণাত্মক মান এবং লেখা হয় $b=-a$।

তাহা হইলে সংজ্ঞা হিসাবে বলা যায়, বিয়োগক্রিয়া হইল ঋণাত্মক মানের যোগক্রিয়া : $a-b=a+(-b)$

III. **ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা (Negative Integers)**। সহজেই ইহা দেখা যায় যে, N এর যে কোন দুইটি উপাদানের বিয়োগফল সর্বদা N এর একটি অঙ্গ (member) নয়; যেমন $5-7$, $5-15$, $10-12$ এই বিয়োগ ক্রিয়াগুলি হইতে স্বাভাবিক সংখ্যা পাওয়া যাইতেছে না। সুতরাং নূতন সংখ্যা—**ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যার সেট্** $\{-1, -2, -3, -4, \cdots \cdots\}$—প্রবর্তনের প্রয়োজন হইল : যেমন, $5-7=-2$, $5-15=-10$ এবং $10-12=-2$ ইত্যাদি।

IV. অখণ্ড সংখ্যা (Integers) : সেটের উপাদানগুলি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা অথবা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য হইলে সেই সেটকে অখণ্ড সংখ্যার সেট্ (I) বলা হয় :

$$I=\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots \cdots\}.$$

স্মরণ রাখিতে হইবে : দুইটি অখণ্ড সংখ্যার মধ্যে **যোগ, বিয়োগ** অথবা **গুণ** ক্রিয়া করা যায় এবং প্রতিক্ষেত্রে প্রাপ্তফল হিসাবে একটি অখণ্ড সংখ্যাই পাওয়া যায়। ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার ক্ষেত্রের মত এক্ষেত্রেও যোগ এবং গুণ ক্রিয়া বিনিময় ও সংযোগ সূত্র মানিয়া চলে এবং উহারা বিচ্ছেদ সূত্র দ্বারাও যুক্ত।

V. মূলদ সংখ্যা (Rational Numbers) : ভাগক্রিয়ার সংজ্ঞা নিম্নরূপ : a কে b দ্বারা ভাগ করার অর্থ হইল এমন একটি অনন্য সংখ্যা (Unique number) c নির্ণয় (যদি সম্ভব হয়) করা, যেন $b.c=a$ হয় এবং লেখা হয় $a \div b=c$ বা $\frac{a}{b}=c$ বা $a/b=c$; স্পষ্টতঃ $b=0$ লওয়া যায় না, কারণ সেক্ষেত্রে 5/0 বা 0/0, এইরূপ পরিস্থিতির সম্মুখীন হইতে হয় ; প্রথম ক্ষেত্রটিতে দেখা যাইবে, এমন কোন সংখ্যা c পাওয়া যায় না যাহাকে 0 দ্বারা গুণ করিলে 5 হয়, আর দ্বিতীয় ক্ষেত্রেও এমন কোন **অনন্য সংখ্যা** c পাওয়া যায় না যাহাকে 0 দ্বারা গুণ করিয়া গুণফল 0 হয়। কেননা যে কোন সংখ্যাকেই 0 দ্বারা গুণ করিলে গুণফল 0 হয়। সুতরাং এই অবাঞ্ছনীয় পরিস্থিতি পরিহারের নিমিত্ত সর্বসময়ের জন্য ইহা বলিয়া রাখা হইল যে **গণিতশাস্ত্রে শূন্য দ্বারা ভাগক্রিয়ার কোন সংজ্ঞা নাই।**

সংজ্ঞা : কোন সংখ্যা a যদি p/q আকারের হয়, যেখানে p এবং q অখণ্ড সংখ্যা এবং $q \neq 0$, তবে ঐ a সংখ্যাটিকে মূলদ সংখ্যা বা Rational number বলা হয়। p এবং q কে সাধারণতঃ সরলতম আকারে লওয়া হয় এবং q কে একটি অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা লওয়া হয়।

উপরি উক্ত সংজ্ঞা অনুসারে, মূলদ সংখ্যার কতিপয় উদাহরণ হইল :

2/3 ; −3/2 ; −18/5, 17/4, 3, −5, 0, ··· ইত্যাদি।

স্মরণ রাখিতে হইবে : মূলদ সংখ্যার সেট্ (Q)-এর উপাদানগুলি অখণ্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) অথবা শূন্য অথবা ভগ্নাংশ।

মূলদ সংখ্যাগুলির মধ্যে—যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ (শূন্য দ্বারা ভাগ ব্যতীত)— এই চারিটি মৌলিক ক্রিয়ার ফলে প্রাপ্ত সংখ্যাও মূলদ,

যথা : $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}$ ইহারা সকলেই মূলদ সংখ্যা।

যোগ এবং গুণ ক্রিয়া সংক্রান্ত আদি সূত্রগুলি (বিনিময়, সংযোগ বা বিচ্ছেদ) মূলদ সংখ্যাগুলির ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য।

VI. অমূলদ সংখ্যা (Irrational Numbers) ঃ অন্যান্য বিবেচনা হইতেও সংখ্যার উৎপত্তি হয় এবং ঐ সংখ্যাগুলি সর্বদা দুইটি অখণ্ড সংখ্যার অনুপাতে প্রকাশযোগ্য নয়। যেমন ঃ—

(*i*) $x^2=2$, $x^3=5$, $x^5=7$ ইত্যাদি সমীকরণগুলি সমাধান করিয়া প্রাপ্ত সংখ্যাসমূহ।

(*ii*) π রাশিটি = যে কোন বৃত্তের পরিধি ÷ উহার ব্যাসার্ধ।

(*iii*) e রাশিটি ইহার সংজ্ঞা পরবর্তী একটি অধ্যায়ে দেওয়া হইবে)। এই সংখ্যাগুলিকে দুইটি অখণ্ড সংখ্যার অনুপাতের আকারে প্রকাশ করা যায় না এবং সেইজন্য ইহারা মূলদ নহে। ইহারা অমূলদ সংখ্যা বা irrational numbers বলিয়া অভিহিত হয়।

অমূলদ সংখ্যার কয়েকটি উদাহরণ হইল ঃ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[7]{9}$, $\cdots\pi$, e, $\cdots$ইত্যাদি।

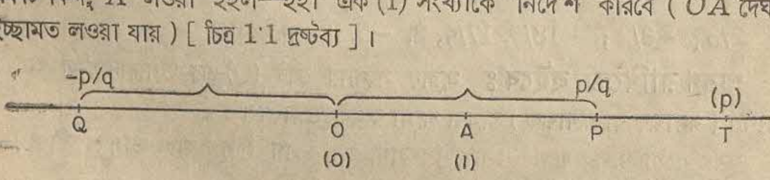
VII. বাস্তব সংখ্যা (Real Numbers) ঃ মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যা-সমূহের সামগ্রিক সমষ্টি হইল বাস্তব সংখ্যাগুলির সেট R.

বাস্তব সংখ্যার বিশেষ ধর্মসমূহ

1. দুইটি বাস্তব সংখ্যার মধ্যে যোগ, বিয়োগ, গুণ অথবা ভাগ ক্রিয়া (শূন্য দ্বারা ভাগ ব্যতীত) করিলে প্রতিক্ষেত্রে প্রাপ্ত সংখ্যা বাস্তব। বাস্তব সংখ্যাগুলির মধ্যে যোগ ও গুণ ক্রিয়া বিনিময় ও সংযোগসূত্র মানিয়া চলে এবং তাহারা বিচ্ছেদ সূত্র দ্বারা যুক্ত।

2. যে কোন বাস্তব সংখ্যাকে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা যায়। সংখ্যাটি মূলদ হইলে দশমিক ভগ্নাংশটি হয় সীমাবদ্ধ (terminating) অথবা পৌনঃপুনিক (recurring) হইবে (যথা ঃ $\frac{1}{2}=\cdot5$, $\frac{13}{5}=2\cdot6$ ইত্যাদি ; $\frac{1}{7}=\cdot\dot{1}4285\dot{7}$, $\frac{1}{3}=\cdot\dot{3}$)। অমূলদ সংখ্যার দশমিক আকার সীমাবদ্ধও নহে, পৌনঃপুনিকও নহে (যথা ঃ $\sqrt{2}=1\cdot41423\cdots$; $\pi=3\cdot14159\cdots$; $\cdot101001000100001\cdots\cdots$)।

3. একটি সরলরেখাস্থিত বিন্দুসমূহের দ্বারা বাস্তব সংখ্যাগুলিকে প্রকাশ করা যায়। ইহার জন্য রেখাটির উপর কোন একটি বিন্দু O কে মূলবিন্দু লওয়া হইল—বিন্দুটি শূন্য (0) সংখ্যাকে নির্দেশ করিবে। O বিন্দুর দক্ষিণে রেখাটির উপর অপর একটি বিন্দু A লওয়া হইল—ইহা এক (1) সংখ্যাকে নির্দেশ করিবে (OA দৈর্ঘ্য ইচ্ছামত লওয়া যায়) [চিত্র 1·1 দ্রষ্টব্য]।



চিত্র 1·1.

এখন, ধরা যাক, একটি মূলদ সংখ্যা p/q (p এবং q উভয়ে ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা এবং $q\neq0$) কে ঐ চিত্রে বিন্দুর সাহায্যে নির্দেশ করিতে হইবে। প্রথমে O এর দক্ষিণদিকে T এমন একটি বিন্দু লওয়া হইল যেন $OT=p.OA$ হয়—তাহা হইলে

T বিন্দু p সংখ্যাকে নির্দেশ করে। ইহার পর OT রেখাংশকে q সংখ্যক পরস্পর সমান অংশে বিভক্ত করা হইল। মনে করা যাউক উহার প্রথম অংশ OP অর্থাৎ P বিন্দুটি এমন লওয়া হইল যেন $q.OP=OT$ হয়। তাহা হইলে P কে p/q সংখ্যাটির নির্দেশক বিন্দু বলা হইবে। O এর বামদিকে অবস্থিত প্রতিসম (symmetric) বিন্দু Q (যেখানে $OQ=OP$), ঋণাত্মক মূলদ সংখ্যা $-p/q$ এর নির্দেশক বিন্দু।

এইভাবে প্রত্যেক মূলদ সংখ্যা p/q কে ঐ রেখাস্থিত কোন একটি বিন্দু P এর সহিত যুক্ত করা যায়। শুধু তাহাই নহে প্রত্যেক অমূলদ সংখ্যাকেও ঐ রেখাস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দ্বারা নির্দেশ করা যায়। প্রকৃতপক্ষে, নিম্নলিখিত বিবৃতিটিকে স্বতঃসিদ্ধ (axiom) হিসাবে গ্রহণ করা যাইতে পারে :

প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যাকে নির্দেশ করিতে পারে এইরূপ একটি এবং কেবলমাত্র একটি বিন্দুই রেখাটির মধ্যে বিদ্যমান এবং বিপরীতক্রমে, ঐ রেখাস্থিত প্রত্যেক বিন্দু কোন না কোন একটিমাত্র বাস্তব সংখ্যাকে নির্দেশ করে। অর্থাৎ বাস্তব সংখ্যার সেট এবং ঐ রেখাস্থিত বিন্দুগুলির সেট এর মধ্যে 'প্রতি একটির জন্য মাত্র একটি' এইরূপ সম্পর্ক (a one-to-one correspondence) বিদ্যমান। এই রেখাটিকে বাস্তব বিন্দুর রেখা বা বাস্তব রেখা (axis of Reals or Real axis) বলা হইবে।

এই পরিপ্রেক্ষিতে, কোন সংখ্যা ও উহার অনুরূপ বিন্দুটি (corresponding point) কে পরস্পরের পরিবর্তে উল্লেখ করা যাইবে—যেমন, "বিন্দু 5" বলিলে বুঝাইবে "5 সংখ্যাটি"।

VIII. অসমতা (Inequalities)

রেখার উপর বাস্তব সংখ্যার অবস্থান বাস্তব সংখ্যা-পদ্ধতিতে একটি শৃঙ্খলা আনিয়াছে। বাস্তব রেখার উপর P বিন্দুর দক্ষিণ দিকে যদি T বিন্দু অবস্থিত হয়, তবে T বিন্দু নির্দেশিত সংখ্যা x, p বিন্দু নির্দেশিত সংখ্যা y অপেক্ষা বৃহত্তর। এক্ষেত্রে লেখা হয় $x>y$; প্রকারান্তরে ইহাকে 'y, x অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর' ($y<x$) এই ভাবেও বলা যায়। $>$ এবং $<$ এই চিহ্ন দুইটিকে অসমতা চিহ্ন (inequality signs) বলা হয়। O বিন্দুর দক্ষিণ পার্শ্বে অবস্থিত কোন বিন্দু নির্দেশিত যে কোন সংখ্যা **ধনাত্মক** এবং O এর বাম পার্শ্বে অবস্থিত বিন্দু দ্বারা নির্দেশিত সংখ্যা **ঋণাত্মক**।

a ধনাত্মক সংখ্যা হইলে লেখা হয় $a>o$ এবং ঋণাত্মক সংখ্যা b এর জন্য লেখা হইবে $b<o$

নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধগুলি প্রয়োজনীয় এবং প্রায়ই উহাদের সাহায্য লওয়া হইবে :

(*i*) যদি $a>b$ এবং $b>c$ হয়, তবে $a>c$;

(*ii*) যদি $a>b$ হয়, তবে $a+c>b+c$;

(*iii*) যদি $a>b$ হয়, তবে $ac>bc$, যদি c ধনাত্মক হয় $(c>0)$;
কিন্তু $ac<bc$, যদি c ঋণাত্মক হয় $(c<0)$;

(*iv*) যদি $a>b>0$ হয়, তবে $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

IX. বাস্তব সংখ্যার পরম মান (Absolute Value of Real Numbers): বাস্তব সংখ্যার পরম মান বলিতে উহার সাংখ্যিক মান বুঝায়। পরম মান সর্বদাই ধনাত্মক। যেমন, $+2$ এবং -2 উভয়েরই সাংখ্যিক মান $+2$ হইবে। a যদি একটি বাস্তব (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) সংখ্যা হয় তাহা হইলে উহার পরম মানকে $|a|$ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যথা: $|-2|=2$, $|5|=5$, ইত্যাদি।

মনে রাখিবে $|x|<1$ বলিলে বুঝিতে হইবে $-1<x<1$; $|x|>1$ বলিলে বুঝিতে হইবে $x>1$ অথবা $x<-1$; $|x|=1$ বলিলে বুঝিতে হইবে $x=1$ অথবা $x=-1$.

আবার $|x|=x$, যদি $x>0$

$=-x$, যদি $x<0$

$=0$, যদি $x=0$.

সংখ্যাতত্ত্বের উপর
বস্তুমুখী ও সংক্ষেপে উত্তর-সম্ভব প্রশ্নাবলী

1. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির প্রত্যেকটি প্রদত্ত শ্রেণীগুলির মধ্যে যেটির বা যে যে গুলির অন্তর্গত তাহা সেই ঘরে বা সেই সেই ঘরে টিক (√) চিহ্ন দিয়া দেখাও:

সংখ্যা	ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা	ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা	অখণ্ড সংখ্যা	মূলদ সংখ্যা	অমূলদ সংখ্যা	বাস্তব সংখ্যা	পূর্ববর্তী শ্রেণীগুলির কোনটিই নয়
-8		√	√	√		√	
$-3/5$							
$2/3$							
2							
5π							
$-3/4$							
$6{\cdot}23$							
0							
$\sqrt{2}$							
$\sqrt{-1}$							
$0{\cdot}5128$							
$\sqrt{-3}$							
$+\sqrt{9}$							
$\cdot\dot{3}1\dot{4}$							
$1/0$							

উল্লিখিত তালিকাটির অন্তর্গত মূলদ সংখ্যাগুলিকে একটি রেখার উপর বিন্দু বসাইয়া নির্দেশ কর।

2. নিম্নে প্রদত্ত প্রত্যেকটি বাস্তব সংখ্যাযুগলের মধ্যে উপযুক্ত অসমতাজ্ঞাপক ($>$ বা $<$) চিহ্ন বসাও :

$(-4, -3)$; $(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{2})$; $(\pi, 3)$; $(-\sqrt{2}, -1)$; $(-3, -\sqrt{\pi})$; $(-2, 0)$; $(1, \sqrt{2})$; $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{5})$.

3. নিম্নলিখিত প্রতিটি বিভাগের অন্তর্ভুক্ত বাস্তব সংখ্যাগুলিকে মানের ঊর্ধ্বক্রমে সাজাও :

$(-3, 22/7, \sqrt{5}, -3{\cdot}24, 0)$; $(-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -1{\cdot}61, -3/2)$; $(-\sqrt{3}, -2, +\sqrt{6}, -2{\cdot}8, 4, 7/2)$; $(2\pi, -6, \sqrt{8}, -3\pi, 4{\cdot}8, 19/3)$

4. নিম্নলিখিত উক্তিগুলির সত্যাসত্য বিচার কর :

(*i*) একটি অখণ্ড সংখ্যা কখনও একটি অখণ্ড সংখ্যা ও একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের সমষ্টি হইতে পারে না।

(*ii*) একটি বাস্তব সংখ্যা = একটি মূলদ সংখ্যা + একটি অমূলদ সংখ্যা।

(*iii*) একটি মূলদ সংখ্যা = একটি মূলদ সংখ্যা + একটি অমূলদ সংখ্যা।

(*iv*) একটি অযুগ্ম ধনাত্মক সংখ্যার বর্গ সর্বদাই একটি অযুগ্ম সংখ্যা।

(*v*) $p^2 = 2q^2$ হইলে p অবশ্যই যুগ্ম সংখ্যা [দেওয়া আছে, p ও q দুইটি অখণ্ড সংখ্যা]।

(*vi*) $\sqrt{2}$ মূলদ সংখ্যা নহে।

5. প্রমাণ কর যে $\sqrt{3}$ একটি মূলদ সংখ্যা হইতে পারে না।

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

2.3. উদ্‌ঘাতন বা ঘাত নির্ণয় (Involution)

প্রায়ই ব্যবহৃত হয় এমন কয়েকটি শব্দের যথাযথ সংজ্ঞা দিয়া শুরু করা যাক্ :—

1. দুই বা তদধিক সংখ্যা পর পর গুণ করিলে প্রাপ্ত ফলকে **ক্রমিক গুণফল** (Continued product) বলা হয়, আর সংখ্যাগুলির প্রত্যেকটিকে ঐ গুণফলের **উৎপাদক** (Factor) বলা হয়। যে গুণফলে একই উৎপাদক কয়েকবার পুনরাবৃত্ত হয় তাহাকে **উৎপাদকটির ঘাত** (Power) বলে। যেমন, $a.\ a.\ a.\ a$ কে a'র চতুর্থ ঘাত বলে। (ইহাকে সুবিধার জন্য a^4 এইরূপ লেখা হয়।)

আরও সাধারণভাবে বলা যায়—

সংজ্ঞা : যদি কোন সংখ্যা a কে a দ্বারা পর পর n বার গুণ করা হয় (স্পষ্টতঃ n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা), তবে ঐ ক্রমিক গুণফল,

$$\underbrace{a.\ a.\ a \ldots\ a,}$$

n-সংখ্যক উৎপাদক,
প্রতিটি উৎপাদক $= a$

a'র n-তম ঘাত বলা হয় এবং লেখা হয় a^n—এখানে a কে বলা হয় নিধান (base) এবং n কে বলা হয় ঘাতটির সূচক (exponent বা index of the power)। কোন সংখ্যা বা রাশির নির্দিষ্ট ঘাতের মান নির্ণয়কে ঘাত নির্ণয় (involution) বলা হয়।

2. সূচকের সূত্রাবলী (ধনাত্মক অখণ্ড সূচক)

m ও n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং a ও b যে কোন দুইটি বাস্তব সংখ্যা $a, b \neq 0$ হইলে নিম্নলিখিত সূত্রগুলি সত্য :

PI. $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

যে কোন সসীম সংখ্যক উৎপাদকের ক্ষেত্রেও সূত্রটি প্রয়োগ করা যায়।

যথা : $a^m \times a^n \times a^p \times a^q = a^{m+n+p+q}$

PII. $$\left.\begin{array}{l} a^m \div a^n = a^{m-n}, \text{ যদি } m > n \\ = \dfrac{1}{a^{n-m}}, \text{ যদি } n > m \end{array}\right\} (a \neq 0).$$

PIII. $(a^m)^n = a^{mn}$.

PIV. $(a \times b)^m = a^m \times b^m$.

যে কোন সসীম সংখ্যক উৎপাদকের ক্ষেত্রেও সূত্রটি প্রযোজ্য।

যথা : $(a \times b \times c \times d)^m = a^m \times b^m \times c^m \times d^m$

PV. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = a^m \div b^m \ (b \neq 0)$.

[অতঃপর এই সূত্রগুলিকে PI, PII, ইত্যাদি বলিয়া উল্লেখ করা হইবে।]

সূচক সম্পর্কীয় সূত্রগুলির প্রমাণ :

প্রথমে PI, PIII, PIV এবং PV সূত্রগুলির প্রমাণ দেওয়া হইল ও পরে PII প্রমাণ করা হইল।

PI. সংজ্ঞা হইতে পাই ($\because$ m ও n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা)

$a^m = a.a.a \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad a$ {mটি উৎপাদক, প্রতিটি $= a$}

এবং $a^n = a.a.a \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad a$ {nটি উৎপাদক, প্রতিটি $= a$}

$\therefore \ a^m \times a^n =$ {$a.a.a \cdots m$ সংখ্যক উৎপাদক}{$a.a.a. \cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক}

$= a.a.a \cdots (m+n)$ সংখ্যক উৎপাদক

$= a^{m+n}$ (সংজ্ঞা অনুসারে)।

সুতরাং PI প্রমাণিত হইল।

অনুসিদ্ধান্ত : m, n, p তিনটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে

$$a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p},$$

কারণ, $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (PI)

এবং $a^{m+n} \times a^p = a^{m+n+p}$ (PI)

$\therefore\ (a^m \times a^n) \times a^p = a^{m+n+p}$ (a^{m+n} এর পরিবর্তে $a^m \times a^n$ লিখিয়া)

$\therefore$ গুণের সংযোগ সূত্র হইতে প্রমাণিত হয় $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$.

যে কোন সসীম সংখ্যক উৎপাদকের ক্ষেত্রেও ইহা সহজেই প্রয়োগ করা যায়।

PIII. PI এর সত্যতা মানিয়া লইয়া ইহা সহজেই বলা যায় যে $(a^m)^n = a^{mn}$,

কারণ, $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \cdots$ n-তম উৎপাদক পর্যন্ত

$= a^{m+m+m+\ldots \ldots n\text{-তম পদ পর্যন্ত}}$

$= a^{mn}$.

PIV. $(ab)^m = a^m b^m$, ইহাও সহজেই পাওয়া যায়,

কারণ, $(ab)^m = (ab).(ab).(ab) \quad \cdots \quad \cdots$ m-তম উৎপাদক পর্যন্ত

$= \{a.a.a \cdots m$-তম উৎপাদক পর্যন্ত$\}\{b.b.b \cdot m$-তম উৎপাদক পর্যন্ত$\}$

$= a^m . b^m$ (সংজ্ঞা অনুসারে)।

PV. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}\ (b \neq 0)$, ইহাও সহজেই **PIV** সূত্রের প্রয়োগ দ্বারা পাওয়া যায়, কারণ $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(a \times \frac{1}{b}\right)^m = a^m \times \left(\frac{1}{b}\right)^m = a^m \times \frac{1}{b^m} = \frac{a^m}{b^m}$.

[লক্ষ্য কর যে $\left(\frac{1}{b}\right)^m = \frac{1}{b} \times \frac{1}{b} \times \frac{1}{b} \times \quad \ldots$ m-তম উৎপাদক পর্যন্ত

$$= \frac{1}{b.b.b \cdots m\text{-তম উৎপাদক পর্যন্ত}} = \frac{1}{b^m}.$$]

এখন PII সূত্রটির প্রমাণ দেওয়া হইতেছে :—

PII. ধরা যাক $m > n$ এবং $a \neq 0$.

প্রমাণ করিতে হইবে $a^m \div a^n = a^{m-n}$.

[শূন্য দ্বারা ভাগ পরিহার করিতে $a \neq 0$ এই শর্তটি আবশ্যক।]

এখন, $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a.a.a. \cdots \cdots m\text{-তম উৎপাদক পর্যন্ত}}{a.a.a. \cdots \cdots n\text{-তম উৎপাদক পর্যন্ত}}$,

যেহেতু, $m > n$, হরের nটি উৎপাদক লবের nটি উৎপাদকের সহিত বাতিল করা যায় এবং তখন লবে কেবলমাত্র $(m-n)$টি উৎপাদক (প্রত্যেকটি$=a$) অবশিষ্ট থাকে। অর্থাৎ

$\frac{a^m}{a^n} = a.a.a. \cdots \cdots (m-n)$-তম উৎপাদক পর্যন্ত

$= a^{m-n}$ (সংজ্ঞা অনুসারে)।

$n > m$ হইলেও সূত্রটি অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যাইবে। অনুশীলনের জন্য প্রশ্ন হিসাবে ছাত্রছাত্রীদের জন্য ইহা রাখিয়া দেওয়া হইল।

3. খণ্ড সূচক ও ঋণাত্মক সূচক

এ পর্যন্ত a^{-2} বা $a^{3/2}$ বা $a^{-3/2}$ প্রভৃতি রাশির কি অর্থ তাহা বলা হয় নাই। আমরা এইরূপ রাশিগুলির সংজ্ঞা এমনভাবে আরোপিত করিব যেন সূচকের সর্বাপেক্ষা মৌলিক সূত্রটি, যথা: $a^x \times a^y = a^{x+y}$, x এবং yএর সকল মানের জন্যই সত্য হইতে পারে। এই তথ্যটিকে ভিত্তি করিয়া নিম্নের সংজ্ঞাগুলি দেওয়া হইল :—

(i) $a^0 = 1$, যেখানে a শূন্য ভিন্ন অপর যে কোন সংখ্যা হইতে পারে ($a \neq 0$).
[লক্ষ্য কর : $a^0 \times a^m = a^{0+m}$ (সূচকের মৌলিক সূত্রটি এখানেও প্রযোজ্য বলিয়া ধরা হইল)

$$= a^m ; \therefore \quad a^0 = a^m / a^m = 1.]$$

(ii) $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$, যদি m যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা হয় এবং $a \neq 0$ হয়।

[লক্ষ্য কর : $a^{-m} \times a^m = a^{-m+m}$ (সূচকের মৌলিক সূত্রটি প্রযোজ্য বলিয়া ধরা হইল)

$$= a^0 = 1 ; \therefore \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}.]$$

(iii) যদি n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয় তবে a যে কোন সংখ্যা হউক না কেন $a^{\frac{1}{n}}$ বলিতে এমন একটি সংখ্যা বুঝাইবে যাহাকে ঐ সংখ্যা দ্বারা n বার গুণ করিলে গুণফলটি a'র সমান হইবে। অর্থাৎ $a^{\frac{1}{n}}$'র n-তম ঘাত সর্বদা a হয়।

এই সংজ্ঞা অনুসারে দেখা যাইবে যে $a^{\frac{1}{n}}$ হইল a'র n-তম মূলের যে কোন একটি মূল। $a^{\frac{1}{n}}$ কে $\sqrt[n]{a}$ এই চিহ্ন দ্বারাও প্রকাশ করা হয়। ('$\sqrt{\ }$' চিহ্নটিকে মূলের চিহ্ন বা radical sign বলা হয়।)

[লক্ষ্য কর : আমাদের উপরি-উক্ত সংজ্ঞাটি সূচকের মৌলিক সূত্রটি ধরিয়া লইলেই পাওয়া যায়, কেননা, $a^{1/n} \times a^{1/n} \times a^{1/n} \times \cdots\cdots$ n-তম উৎপাদক পর্যন্ত

$$= a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots\cdots \; n\text{-তম পদ পর্যন্ত}}$$

$$= a^{n \cdot \frac{1}{n}} = a.]$$

মনে করি $x = a^{\frac{1}{n}}$. তাহা হইলে সংজ্ঞা অনুসারে $x^n = a$. **বীজগণিতের মৌলিক উপপাদ্য অনুসারে (Fundamental Theorem of Algebra)** এই সমীকরণটির nটি বীজ আছে। অতএব $a^{\frac{1}{n}}$ হইল এই সমীকরণের যে কোন একটি বীজ। সেইজন্যই বলা হইয়াছে $a^{\frac{1}{n}}$ হইল a'এর nটি n-তম মূলের যে কোন একটি মূল। [সেইরূপ $a^{\frac{1}{2}}$ (বা $\sqrt{a}$) হইল a'এর দুইটি বর্গমূলের মধ্যে যে কোন একটি ; $a^{\frac{1}{3}}$ (বা $\sqrt[3]{a}$) হইল a'এর তিনটি ঘনমূলের মধ্যে যে কোন একটি।]

(iv) যদি m এবং n দুইটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয় তাহা হইলে $a^{m/n}$ হইল এমন একটি সংখ্যা যাহাকে ঐ সংখ্যা দ্বারা n বার গুণ করিলে গুণফল a^m হয়। অর্থাৎ $a^{m/n}$ এর n-তম ঘাত সর্বদা a^m হয়।

এই সংজ্ঞা অনুসারে দেখা যাইবে যে $a^{\frac{m}{n}}$ হইল a^m-র n-তম মূলের যে কোন একটি মূল। $a^{\frac{m}{n}}$ কে $\sqrt[n]{a^m}$ দ্বারাও প্রকাশ করা হয়। যদি $x=a^{\frac{m}{n}}$ হয় তাহা হইলে সংজ্ঞা অনুসারে $x^n=a^m$ এবং এই সমীকরণের nটি বীজ আছে। অতএব $a^{m/n}$ হইল a^m এর nটি n-তম মূলের যে কোন একটি।

এখানেও লক্ষ্য কর—আমাদের সংজ্ঞাটি সূচকের মৌলিক সূত্রটিকে মানিয়াই গঠিত হইয়াছে।

$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m}{n}} \times \cdots \cdots n$-তম উৎপাদক পর্যন্ত

$= a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\cdots}$ $\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত $= a^{n \times \frac{m}{n}} = a^m$.

অতএব $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$.

আবার অন্যভাবেও বলা যায়

$a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \cdots m$-তম উৎপাদক পর্যন্ত $= a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots}$ $\cdots m$-তম পদ পর্যন্ত

$= a^{m \times \frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}. \quad \therefore \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$.

অতএব দেখা যাইতেছে $a^{\frac{m}{n}}$ কে a^m এর একটি n-তম মূল বলা যায়; $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)$ অথবা $a^{\frac{m}{n}}$ কে a'র একটি n-তম মূলের m-তম ঘাতও বলা যায় অর্থাৎ $(\sqrt[n]{a})^m$.

এখানে একটি প্রশ্ন উঠিতে পারে :

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

এইরূপ লেখা কি সর্বত্র বৈধ ?

লক্ষ্য কর, $\sqrt{4^4} = +16$ অথবা -16 কিন্তু $(\sqrt{4})^4$ এর একটি মাত্র মান (যথা : $+16$)-ই সম্ভব। অতএব নির্দিষ্ট সর্তের উল্লেখ ব্যতিরেকে $\sqrt{4^4} = (\sqrt{4})^4$ লেখা যুক্তিসংগত নহে।

এখন $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$—এই সমতার ব্যাখ্যা এইরূপ মনে করিতে হইবে :

॥ a^m এর কোন একটি n-তম মূল, a এর কোন একটি n-তম মূলের m-তম ঘাতের সমান ॥

4. সূচকের সূত্রাবলী (মূলদ সূচক) (Laws of Indices for Rational Exponents)

সূচকসমূহ যখন মূলদ সংখ্যা, তখন নিম্নলিখিত সূত্রাবলীর সত্যতা প্রমাণ করা যায়।

সূত্র 1. যদি n একটি অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা হয় তাহা হইলে উপযুক্ত সর্ত সাপেক্ষে

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

ইহার অর্থ হইল : a'র **কোন একটি** n-তম মূলের সহিত b'র **কোন একটি** n-তম মূল গুণ করিলে গুণফল ab'র nটি n-তম মূলের **কোন একটির** সহিত সমান হইবে।

$$[(a^{1/n}\times b^{1/n})^n=(a^{1/n}b^{1/n}).(a^{1/n}b^{1/n}).(a^{1/n}b^{1/n})\dots\dots n\text{-তম উৎপাদক পর্যন্ত}$$
$$=\{a^{1/n}.a^{1/n}.a^{1/n}\dots\dots n\text{-তম উৎপাদক পর্যন্ত}\}\times$$
$$\times\{b^{1/n}.b^{1/n}.b^{1/n}\dots\dots n\text{-তম উৎপাদক পর্যন্ত}\}$$
$$=a.b \text{ (সংজ্ঞা অনুসারে)।} \quad \text{অতএব উপরি-উক্ত তথ্যটি সত্য।]}$$

সূত্র 2. যদি m এবং n যে কোন দুইটি মূলদ সংখ্যা হয়, তাহা হইলে $a^m\times a^n=a^{m+n}$ (যেখানে a শূন্য ব্যতিরেকে যে কোন সংখ্যা অর্থাৎ, $a\neq 0$.)

প্রমাণ ॥ প্রথম ধাপ : যদি m এবং n যে কোন দুইটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয় তাহা হইলে সূত্রটির সত্যতা ইতিপূর্বেই প্রমাণিত (PI-এর প্রমাণ দ্রষ্টব্য)

দ্বিতীয় ধাপ : মনে করা যাক্ m এবং n দুইটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ যথাক্রমে p/q এবং r/s $(q\neq 0,\ s\neq 0)$; p, q, r, s সকলেই ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

তাহা হইলে $a^m\times a^n=a^{p/q}\times a^{r/s}=a^{\frac{ps}{qs}}\times a^{\frac{rq}{qs}}=\sqrt[qs]{a^{ps}}\times\sqrt[qs]{a^{rq}}$ (সংজ্ঞা অনুসারে)

$$=\sqrt[qs]{a^{ps}.a^{rq}} \text{ (সূত্র 1 অনুসারে)}=\sqrt[qs]{a^{ps+rq}} \text{ (প্রথম ধাপের সত্যতার জন্য)}$$

$$=a^{\frac{ps+rq}{qs}}=a^{\frac{ps}{qs}+\frac{rq}{qs}}=a^{p/q+r/s}=a^{m+n}.$$

তৃতীয় ধাপ : ধরা যাক m ও n দুইটি ঋণাত্মক মূলদ সংখ্যা যথাক্রমে $-p/q$ এবং $-r/s$.

তাহা হইলে $a^{-p/q}\times a^{-r/s}=\frac{1}{a^{p/q}}\times\frac{1}{a^{r/s}}$ $\left[\text{ সংজ্ঞা অনুসারে, } a^{-k}=\frac{1}{a^k}\right]$

$$=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}} \text{ (দ্বিতীয় ধাপের সত্যতার জন্য)}$$

$$=a^{-(\frac{p}{q}+\frac{r}{s})}=a^{(-\frac{p}{q})+(-\frac{r}{s})}.$$

চতুর্থ ধাপ : মনে করা যাক্ m ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা এবং $-n$ একটি ঋণাত্মক মূলদ সংখ্যা। তাহা হইলে দুইটি ক্ষেত্রের উদ্ভব হইতে পারে :—

(i) $m-n>0$; (ii) $m-n<0$.

(i) যখন $m-n>0$, $a^{m-n}\times a^n=a^{(m-n)+n}$ (পূর্ববর্তী ধাপ অনুসারে)

$$=a^m$$

$$\therefore\ a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n}=a^m\times a^{-n} \text{ ; অতএব প্রমাণিত।}$$

(ii) যখন $m-n<0$ (অর্থাৎ যখন $n-m>0$)

$$\frac{1}{a^{n-m}}=\frac{1}{a^n\times a^{-m}}=\frac{1}{a^n}\times\frac{1}{a^{-m}}=a^{-n}\times a^{-(-m)}=a^{-n}\times a^m$$

$\therefore\quad a^{-(n-m)}=a^{-n}\times a^m$ বা, $a^{m-n}=a^m\times a^{-n}$; অতএব প্রমাণিত।

যে ক্ষেত্রে m অথবা n অথবা উভয়েই শূন্য হইবে সে ক্ষেত্রেও সূত্রটির সত্যতা সহজেই যাচাই করা যায়। সূত্রটির প্রমাণ এখন সম্পূর্ণ হইল।]

সূত্র 3. m এবং n এর মূলদ সকল মানের জন্যই

$$a^m\div a^n=a^{m-n}\qquad(a\neq0)$$

[ইহা সূত্র 2 এর অনুসিদ্ধান্ত বলা যায় ; কেননা $a^{m-n}\times a^n=a^m$, যেখানে m এবং n যে কোন মূলদ সংখ্যা হউক না কেন।]

সূত্র 4. যদি m এবং n যে কোন মূলদ সংখ্যা হয় এবং $a\neq0$ হয় তাহা হইলে

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

প্রমাণ। **প্রথম ধাপ :** মনে করা যাক্ n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা এবং m যে কোন একটি মূলদ সংখ্যা। তাহা হইলে

$$(a^m)^n=a^m\times a^m\times a^m\times\cdots\cdots\ n\text{-তম উৎপাদক পর্যন্ত}$$
$$=a^{m+m+m+\cdots\cdots\ n\text{-তম পদ পর্যন্ত}}\quad(\text{সূত্র 1 অনুসারে})$$
$$=a^{nm}.$$

দ্বিতীয় ধাপ : যদি p ও q লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশিত দুইটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয় এবং $n=p/q$ হয়, তাহা হইলে

$(a^m)^n=(a^m)^{p/q}=\sqrt[q]{(a^m)^p}=\sqrt[q]{a^{mp}}$ (প্রথম ধাপ অনুসারে, p একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা)

$$=a^{\frac{mp}{q}}=a^{mn}.$$

তৃতীয় ধাপ : মনে করি n যে কোন একটি ঋণাত্মক মূলদ সংখ্যা। ধরি $n=-p$, যেখানে p একটি ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা।

তাহা হইলে,

$$(a^m)^n=(a^m)^{-p}=\frac{1}{(a^m)^p}=\frac{1}{a^{mp}}=a^{-mp}=a^{mn}.$$

(পূর্বের আলোচনা হইতে প্রতিটি সমতা সহজেই যাচাই করা যায়।)

অতএব, প্রমাণিত হইল যে m এবং n যে কোন মূলদ সংখ্যা হউক না কেন সূত্র 4 সর্বক্ষেত্রেই সত্য।

সূত্র 5. n এর যে কোন মূলদ মানের জন্য

$$(ab)^n=a^n.b^n\quad(a,b\neq o)$$

প্রমাণ। **প্রথম ধাপ :** n এর যে কোন ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার জন্য সূত্রটির সত্যতা ইতিপূর্বে প্রমাণিত হইয়াছে (PIV এর প্রমাণ দ্রষ্টব্য)।

দ্বিতীয় ধাপ ঃ যদি m যে কোন মূলদ সংখ্যা হয় এবং q যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তাহা হইলে,

$(a^mb^m)^q=(a^mb^m).(a^mb^m).(a^mb^m)\cdots\cdots q$-তম উৎপাদক পর্যন্ত

$=(a^m.a^m.a^m\cdots\cdots q$-তম উৎপাদক পর্যন্ত$).(b^m.b^m.b^m\cdots\cdots q$-তম উৎপাদক পর্যন্ত$)$

$=a^{mq}.b^{mq}.$

এখন n যদি একটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ হয় (ধরি $n=\frac{p}{q}$, p ও q ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা)

তাহা হইলে $(ab)^n=(ab)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(ab)^p}=\sqrt[q]{a^pb^p}$ ($\because$ p একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)।

আবার $(a^n b^n)^q=a^{nq}.\ b^{nq}$ (q যেহেতু ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)

$\therefore\ a^nb^n=\sqrt[q]{a^{nq}.b^{nq}}=\sqrt[q]{a^pb^p}\quad (\because\ nq=p)$

$=(ab)^n$ (উপরে প্রমাণিত)।

এইরূপে দেখা গেল যে $a^n b^n=(ab)^n$; n যে কোন ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা হউক না কেন।

তৃতীয় ধাপ ঃ যদি n একটি ঋণাত্মক মূলদ সংখ্যা হয় (ধরি, $n=-x$, যেখানে x একটি ধনাত্মক মূলদ রাশি) তাহা হইলেও

$$(ab)^n=(ab)^{-x}=\frac{1}{(ab)^x}=\frac{1}{a^x}\cdot\frac{1}{b^x}=a^{-x}.b^{-x}=a^n.b^n$$

সূত্র 6. যে কোন মূলদ সংখ্যা n এর জন্য

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\quad a,\ b\neq o)$$

[ইহা সূত্র 5 এর অনুসিদ্ধান্ত, কেননা $\left(a\times\frac{1}{b}\right)^n=a^n\times\left(\frac{1}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$]

সংক্ষিপ্তসার

[সূচক সম্পর্কীয় প্রশ্ন-সমাধানে বিশেষ প্রয়োজনীয়]

সংজ্ঞানুসারে ঃ I. $a^0=1\ (a\neq 0)$. II. $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

III. $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ IV. $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$.

সূত্রাবলী ঃ (যে কোন অখণ্ড ভগ্নাংশ মূলক সূচকের জন্য প্রযোজ্য) ঃ

V. $a^m\times a^n=a^{m+n}$. VI. $a^m\div a^n=a^{m-n}$.

VII. $(a^m)^n=a^{mn}$. VIII. $(a.b)^n=a^n.b^n$.

IX. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

[কোন নিধানই শূন্য ধরা হইবে না।]

॥ স্মরণ রাখিতে হইবে ॥

1. যদি n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয় এবং $a>o$ হয় তাহা হইলে $x^n=a$ এই সমীকরণের একটি এবং কেবলমাত্র একটি ধনাত্মক বীজ থাকে। অন্যরূপ উল্লেখ না

থাকিলে $\sqrt[n]{a}$ এই প্রতীক দ্বারা এই একমাত্র ধনাত্মক বীজকেই ধরিয়া, লইবে। (যথা ঃ $\sqrt{9}=+3$).

2. সরলীকরণের জন্য নিম্নলিখিত ইংগিতগুলি মনে রাখিবে ঃ

(*i*) ঋণাত্মক-সূচক থাকিলে উহা ধনাত্মক-সূচকে পরিণত করিয়া লওয়া যায় (II দ্রষ্টব্য)।

$$\left(\text{যেমন : } a^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}\right).$$

(*ii*) III এবং IV দ্বারা মূলের চিহ্ন '$\sqrt{\ }$' (radical sign) অপসারিত করিয়া খণ্ড-সূচকে পরিণত করা যায় $\left(\text{যেমন : } \sqrt[3]{64x^7y^{-6}}=(64x^7y^{-6})^{\frac{1}{3}}\right)$.

(iii) $(a^m)^n=a^{mn}$ ইহা সত্য, কিন্তু a^{m^n} বলিতে বুঝায় a'র m^n-তম ঘাত (ইহাকে কখনই a^m এর n-তম ঘাত মনে করিবে না)। এখন লক্ষ্য কর ঃ

$x^{2^{6n-1}}$ হইল x-এর 2^{6n-1}-তম ঘাত।

অতএব $\left(x^{2^{6n-1}}\right)^2=x^{2^{6n-1}\cdot 2}=x^{2^{6n-1+1}}=x^{2^{6n}}$.

উদা. $$\left\{\frac{81^{-\frac{3}{4}}}{6^{-2}}\right\}^{\frac{1}{3}}=\left\{\frac{6^2}{81^{\frac{3}{4}}}\right\}^{\frac{1}{3}}=\frac{6^{2\times\frac{1}{3}}}{81^{\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}}}=\frac{6^{\frac{2}{3}}}{(3^4)^{\frac{1}{4}}}=\frac{3^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{2}{3}}}{3}$$

$$=\frac{2^{\frac{2}{3}}}{3^{1-\frac{2}{3}}}=\frac{2^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}.$$

3. এই পুস্তকের প্রশ্নগুলির সমাধান করিবার সময় $a^x=b^x$ হইলে $a=b$ লিখিতে পার এবং $a^x=a^y$ হইলে, $x=y$ লিখিতে পার।

যেমন ঃ $9^{3x+1}=3^{2x+9}$ কে লেখা যায় $(3^2)^{3x+1}=3^{2x+9}$

বা $3^{6x+2}=3^{2x+9}$. অতএব লেখা যায় $6x+2=2x+9$.

সূচক সম্পর্কীয় সূত্রগুলির উপর বস্তুমুখী ও সংক্ষেপে উত্তর-সম্ভব প্রশ্নসমূহ

1. নিম্নলিখিত রাশিগুলি ধনাত্মক সূচকে প্রকাশ কর :—

$125^{-\frac{4}{3}}$; $7^{-\frac{8}{9}}$; x^3y^{-4}/a^2b^{-8}; $(-2)^{-\frac{2}{3}}$.

2. নিম্নের A স্তম্ভের অন্তর্গত রাশিগুলির সরলতম মান আবশ্যক। প্রতিটির জন্য কয়েকটি করিয়া সম্ভাব্য উত্তর B স্তম্ভে উল্লেখ করা হইয়াছে—উহাদের মধ্যে কেবলমাত্র একটি হইল সঠিক উত্তর। C স্তম্ভে তোমার মতে যেই উত্তরটি সঠিক তাহার **সংশ্লিষ্ট সংখ্যাটি** বসাও (মনে রাখিবে উত্তরটি সরাসরি বসাইতে হইবে না) :—

স্তম্ভ A	স্তম্ভ B	স্তম্ভ C
$(-1)^{-2/3}$	1. -1. 2. $+1$. 3. কোন বাস্তব সংখ্যা নয়।	
$-(-1)^{-2/3}$	1. -1. 2. $+1$. 3. কোন বাস্তব সংখ্যা নয়।	
$-(-1)^{-3/5}$	1. -1. 2. $+1$. 3. কোন বাস্তব সংখ্যা নয়।	
0°	1. 1. 2. 0. 3. অসংজ্ঞেয়।	
$(\cdot 02)^{-1}$	1. 50. 2. 50^{-1}. 3. 2.	
$(-8)^{2/3}$	1. -4. 2. 4. 3. 64.	
$(0\cdot125)^{1/3}.(0\cdot25)^{-1/2}$	1. 1. 2. $\sqrt{5}$. 3. $\sqrt[3]{5}$.	
$\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^2}}$	1. $a^{2/3}$. 2. $a^{1/3}$. 3. $\sqrt[9]{a}$.	
$\left(a^{2^{p-1}}\right)^2$	1. $a^{2^{2p-2}}$. 2. a^{2^p}. 3. $a^{4^{p-1}}$.	
$\left\{\left(32^{-2/3}\right)^{3/4}\right\}^{\frac{4}{5}}$	1. 1. 2. 4. 3. $\frac{1}{4}$.	
$3x^{-3/4}$	1. $\sqrt[4]{3x^{-3}}$. 2. $\sqrt[3]{3x^{-4}}$. 3. $\frac{3}{\sqrt[4]{x^3}}$.	
$\left(\frac{a.\ b^{-1}}{a^{-1}b}\right)^2\times\left(\frac{a^2.b^{-2}}{a^{-2}b^2}\right)^3$	1. $\left(\frac{b}{a}\right)^{16}$. 2. $\left(\frac{a}{b}\right)^{16}$. 3. $\sqrt[16]{\frac{a}{b}}$.	

3. শূন্য স্থান পূরণ কর :—(এক বা একাধিক শব্দ দ্বারা)

(i) a এর —— ঘনমূলের (Cubic roots) —— হইল $a^{\frac{1}{3}}$.

(ii) উদ্‌ঘাতন (Involution) হইল —— ক্রিয়া এবং মূলাকর্ষণ (Evolution) হইল —— ক্রিয়া।

(iii) $\sqrt{x^8}=(\sqrt{x})^8$ এই সমতাটির সঠিক ব্যাখ্যা হইল :

(iv) $2^{2^x}=16^{2^{3x}}$ হইলে x এর মান —— হইবে।

4. $\left(a^{1+\frac{m}{n}}\right)^{\frac{m}{m+n}} \div \sqrt[n]{\dfrac{a^{2m}}{(a^{-1})^{-m}}}$ এর সরলতম মান হইল 1 বা -1. (একটি সঠিক, অপরটি নয়)। কোন্ মানটি সঠিক ? a'র উপর কোন বাধানিষেধ আরোপ করার প্রয়োজন আছে কি ?

প্রশ্নমালা II (A)

1. (i) প্রমাণ কর যে $a^{\frac{1}{3}}, a^{-\frac{3}{4}}, \sqrt[3]{a^4}, a^{\frac{1}{12}}, \sqrt[8]{a^{\frac{25}{3}}}$ এবং $\left(a^{-\frac{7}{4}}\right)^{\frac{7}{6}}$ এর ক্রমিক গুণফল এক হইবে।

(ii) $\left(\dfrac{ay}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\dfrac{bx}{y^2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\dfrac{y^2}{a^2b^2}\right)^{\frac{1}{4}}$ এই রাশিটিকে $\dfrac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[6]{bx}}$ এর আকারে প্রকাশ কর।

(iii) $x^{\frac{5}{8}}\ y^{\frac{2}{3}}\ z^{\frac{3}{7}}$ কে $\sqrt[5]{x^2} \times \sqrt[3]{y^7} \times \sqrt[7]{z^8}$ দ্বারা ভাগ কর এবং ভাগফলকে $\sqrt[40]{x}.\ \sqrt[3]{y^5}.\ \sqrt[7]{z^5}$ দ্বারা গুণ কর। $x=16$ হইলে লব্ধ ফলটির মান কত ?

[ইংগিত : $\dfrac{x^{\frac{5}{8}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{3}{7}}}{x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{7}{3}}z^{\frac{8}{7}}} = x^{\frac{5}{8}-\frac{2}{5}}.\ y^{\frac{2}{3}-\frac{7}{3}}.\ z^{\frac{3}{7}-\frac{8}{7}} = x^{\frac{9}{40}}.\ y^{-\frac{5}{3}}.\ z^{-\frac{5}{7}}$.

এখন $\{x^{\frac{9}{40}}.\ y^{-\frac{5}{3}}.\ z^{-\frac{5}{7}}\}\cdot\{x^{\frac{1}{40}}.\ y^{\frac{5}{3}}.\ z^{\frac{5}{7}}\} = x^{\frac{1}{4}}$. যদি $x=16$ হয় তাহা হইলে নির্ণেয় মান $=16^{\frac{1}{4}}=(2^4)^{\frac{1}{4}}=2$.]

(iv) $ax^{-\frac{1}{3}}$ কে $\dfrac{3}{2a}\sqrt[4]{x^{-6}}$ দ্বারা ভাগ কর এবং ভাগফলকে $\dfrac{3}{8}x^{-\frac{7}{6}}$ দ্বারা গুণ কর। $a=2$ হইলে চূড়ান্ত গুণফলটির মান কত হইবে ? [উঃ 1.]

(v) গুণ কর : $x^{\frac{4}{7}}, \sqrt{x}, \sqrt[7]{x^3}$ এবং y^2 ; এই গুণফলকে এখন $\sqrt[8]{x^{-3}}.\ \sqrt[6]{y^6x^3}\ \left(x^{\frac{1}{8}}\right)^3$ দ্বারা ভাগ কর। [উঃ xy]

2. নিম্নলিখিত রাশিগুলির সরলতম মান নির্ণয় কর :

(i) $\dfrac{x^{m+2m}.x^{3m-8n}}{x^{2(2m-3n)}}$. (ii) $\{(x^{a+b-c}.x^{a-b+c})^b\}^c$.

(iii) $\dfrac{x^{a+b}.x^{a-b}.x^{c-2a}}{x^{c-a}}$.

(iv) $\left(8x^3 \div 27a^{-3}\right)^{2/3} \times \left(64x^3 \div 27a^{-3}\right)^{-2/3}$.

(v) $\left\{\sqrt[3]{4} \times \dfrac{1}{\sqrt[6]{8}} \times \sqrt[12]{2^{-1}}\right\}^{1/4}$.

(vi) $\left(\dfrac{a^l}{b^m}\right)^n \cdot \left(\dfrac{b^n}{c^l}\right)^m \cdot \left(\dfrac{c^m}{a^n}\right)^l$. (vii) $\left\{81^{-3/4} \times \dfrac{16^{1/4}}{6^{-2}} \times \left(\dfrac{1}{27}\right)^{-4/3}\right\}^{1/3}$.

(viii) $\dfrac{(bc)^{b-c}.(ca)^{c-a}.(ab)^{a-b}}{(a^{b-c}.b^{c-a}.c^{a-b})^{-1}}$.

[**(vii)-এর সমাধান :** $\left\{81^{-\frac{3}{4}}\times16^{\frac{1}{4}}\times6^{2}\times(27)^{\frac{4}{3}}\right\}^{\frac{1}{3}}$

$=81^{-\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}}\times16^{\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}}\times6^{2\times\frac{1}{3}}\times27^{\frac{4}{3}\times\frac{1}{3}}$

$=\frac{1}{\sqrt[4]{81}}\times\sqrt[12]{16}\times\sqrt[3]{6^2}\times\sqrt[9]{27^4}=\frac{1}{3^{4\times\frac{1}{4}}}\times2^{\frac{4}{12}}\times2^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{12}{9}}$

$=3^{-1+\frac{2}{3}+\frac{12}{9}}.2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=3.2=\mathbf{6}.$]

[উঃ (*i*) 1. (*ii*) x^{2abc}. (*iii*) x^{a}. (*iv*) 1/4. (*v*) 1. (*vi*) 1. (*viii*) 1.

3. (*i*) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{4}}$ কে $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{4}}$ দ্বারা গুণ কর।

(*ii*) $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}+1$ কে $x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}-1$ দ্বারা গুণ কর।

(*iii*) $x^{4^{n-1}}+y^{4^{n-1}}$ কে $x^{4^{n-1}}-y^{4^{n-1}}$ দ্বারা গুণ কর।

[ইংগিত : $\left(x^{4^{n-1}}\right)^2-\left(y^{4^{n-1}}\right)^2=x^{4^{n-1}\cdot2}-y^{4^{n-1}\cdot2}$

$=x^{2^{2n-2+1}}-y^{2^{2n-2+1}}=x^{2^{2n-1}}-y^{2^{2n-1}}.$]

(*iv*) প্রমাণ কর $\left(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}}\right)\left(x^{2^{n-1}}-a^{2^{n-1}}\right)=x^{2^n}-a^{2^n}$.

[উঃ (i) $x^{4/3}+x^{2/3}y^{1/2}+y$. (ii) $x^{3/4}-x^{1/2}+2x^{1/4}-1+2x^{-1/4}-x^{-1/2}+x^{-3/4}$.]

4. (*i*) নিম্নের অভেদগুলির সত্যতা যাচাই কর :

$(x-y)(x+y)=x^2-y^2$; $(x^2-y^2)(x^2+y^2)=x^{2^2}-y^{2^2}$;

$\left(x^{2^2}-y^{2^2}\right)\left(x^{2^2}+y^{2^2}\right)=x^{2^3}-y^{2^3}$.

এক্ষণে প্রমাণ কর

$(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)\cdots\cdots\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right)$

$=\frac{x^{2^n}-y^{2^n}}{x-y}$.

(*ii*) $x^{2^n}-y^{2^n}$ কে $x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}$ দ্বারা ভাগ কর।

[ইংগিত : $x^{2^n}=x^{2^{n-1}\cdot2}=\left(x^{2^{n-1}}\right)^2$.]

(*iii*) $x-y^2-3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{4}{3}}$ কে $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{4}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ দ্বারা ভাগ কর।

[ইংগিত : ভাজক ও ভাজ্য উভয় রাশিকেই x এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া লও।]

(*iv*) x^3+y^{-3} কে $x^2-xy^{-1}+y^{-2}$ দ্বারা ভাগ কর।

[উঃ (*ii*) $x^{2^{n-1}}-y^{2^{n-1}}$. (*iii*) $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$. (*iv*) $x+y^{-1}$.]

5. (*i*) প্রমাণ কর : $\left\{\dfrac{4^{m+\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{2.2^m}}{2. \sqrt{2^{-m}}}\right\}^{\frac{1}{m}}=8.$

[বাম পক্ষ$=\left\{\dfrac{2^{2(m+\frac{1}{4})} \cdot (2^{m+1})^{\frac{1}{2}}}{2.2^{-m/2}}\right\}^{\frac{1}{m}}=\left\{\dfrac{2^{2m+\frac{1}{2}+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}}}{2^{1-\frac{m}{2}}}\right\}^{\frac{1}{m}}$

$=\dfrac{2^{\left(\frac{5m}{2}+1\right)\frac{1}{m}}}{2^{\left(1-\frac{m}{2}\right)\frac{1}{m}}}=2^{\frac{5}{2}+\frac{1}{m}-\frac{1}{m}+\frac{1}{2}}=2^3=8.$]

(*ii*) প্রমাণ কর : $\left\{\dfrac{9^{n+\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{3.3^n}}{3. \sqrt{3^{-n}}}\right\}^{\frac{1}{n}}=27.$

(*iii*) প্রমাণ কর : $\dfrac{\sqrt{a^{-\frac{5}{3}} \cdot b^3 \cdot c^{-\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^4 \cdot c^{-1}}}=\dfrac{\sqrt[6]{b}}{a}.$

(*iv*) প্রমাণ কর : $\dfrac{\left\{(a^m)^{\frac{1}{r}} \cdot (a^q)^{\frac{1}{n}}\right\}^{nr}}{\left\{\sqrt[q]{b^n} \cdot (\sqrt[m]{b})^r\right\}^{mq}} \div \left\{\left(\dfrac{a}{b}\right)^q\right\}^r=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{mn}.$

6. দেখাও যে নিম্নের প্রতিটি রাশির সরলতম মান সমান ও প্রতি ক্ষেত্রেই ঐ মান 'এক' হয় :

(*i*) $\left(\dfrac{x^{m^2+n^2}}{x^{-mn}}\right)^{m-n} \times \left(\dfrac{x^{n^2+l^2}}{x^{-nl}}\right)^{n-l} \times \left(\dfrac{x^{l^2+m^2}}{x^{-lm}}\right)^{l-m}$;

[রাশিটি$=(x^{m^2+n^2+mn})^{m-n} \times (x^{n^2+l^2+nl})^{n-l} \times (x^{l^2+m^2+lm})^{l-m}$

$=x^{(m-n)(m^2+n^2+mn)+(n-l)(n^2+l^2+nl)+(l-m)(l^2+m^2+lm)}$

$=x^{m^3-n^3+n^3-l^3+l^3-m^3}=x^0=\mathbf{1}$]

(*ii*) $\left(\dfrac{x^m}{x^n}\right)^{m^2+mn+n^2} \cdot \left(\dfrac{x^n}{x^l}\right)^{n^2+nl+l^2} \cdot \left(\dfrac{x^l}{x^m}\right)^{l^2+lm+m^2}.$

(*iii*) $\sqrt[lm]{\dfrac{x^l}{x^m}} \cdot \sqrt[mn]{\dfrac{x^m}{x^n}} \cdot \sqrt[nl]{\dfrac{x^n}{x^l}}.$

(*iv*) $\sqrt[l+m]{\dfrac{x^{l^2}}{x^{m^2}}} \cdot \sqrt[m+n]{\dfrac{x^{m^2}}{x^{n^2}}} \cdot \sqrt[n+l]{\dfrac{x^{n^2}}{x^{l^2}}}.$

(*v*) $\left(\dfrac{x^{b/c}}{x^{c/b}}\right)^{\frac{1}{bc}} \cdot \left(\dfrac{x^{c/a}}{x^{a/c}}\right)^{\frac{1}{ac}} \cdot \left(\dfrac{x^{a/b}}{x^{b/a}}\right)^{\frac{1}{ab}}.$

(*vi*) $\left(a^{\frac{1}{x-y}}\right)^{\frac{1}{x-z}} \cdot \left(a^{\frac{1}{y-z}}\right)^{\frac{1}{y-x}} \cdot \left(a^{\frac{1}{z-x}}\right)^{\frac{1}{z-y}}.$

(vii) $\dfrac{1}{1+x^{b-a}+x^{c-a}}+\dfrac{1}{1+x^{a-b}+x^{c-b}}+\dfrac{1}{1+x^{a-c}+x^{b-c}}$.

[ইঙ্গিত : প্রথম পদ $=\dfrac{x^a}{x^a+x^b+x^c}$ (লব ও হরকে x^a দ্বারা গুণ করিয়া)]

(viii) $\dfrac{1}{1+x^{b-c}+x^{b-a}}+\dfrac{1}{1+x^{c-a}+x^{c-b}}+\dfrac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}}$

[এক্ষেত্রে প্রতিটি পদের লব ও হরকে এমন রাশি দ্বারা গুণ কর যেন প্রত্যেকটি পদের হর হয় $x^{-a}+x^{-b}+x^{-c}$.]

(ix) $\sqrt[c-a]{x^{\frac{a+b}{b-c}}}\times\sqrt[a-b]{x^{\frac{b+c}{c-a}}}\times\sqrt[b-c]{x^{\frac{c+a}{a-b}}}$.

7. প্রমাণ কর যে

(i) $\dfrac{(x+y^{-1})^m.(x-y^{-1})^n}{(y+x^{-1})^m.(y-x^{-1})^n}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{m+n}$.

(ii) $\dfrac{\left(p^2-\frac{1}{q^2}\right)^p\cdot\left(p-\frac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q^2-\frac{1}{p^2}\right)^q\cdot\left(q-\frac{1}{p}\right)^{p-q}}=\left(\dfrac{p}{q}\right)^{p+q}$.

8. (i) যদি $x^y=y^x$ হয় তাহা হইলে প্রমাণ কর যে $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{x/y}=x^{x/y-1}$,

(যেখানে x এবং y দুইটিই ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা)

[$\because$ $x^y=y^x$, উভয় পক্ষের y-তম মূল লইয়া পাওয়া যায় $\sqrt[y]{x^y}=\sqrt[y]{y^x}$. সুতরাং $x=y^{x/y}$ বা $\frac{1}{x}=y^{-x/y}$; উভয় পক্ষকে এখন $x^{x/y}$ দ্বারা গুণ করিলে পাওয়া যায় $x^{x/y-1}=x^{x/y}.\,y^{-x/y}$ $=\left(\frac{x}{y}\right)^{x/y}$.]

(ii) যদি $a^b=b^a$ হয় তবে প্রমাণ কর যে $a\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a/b}=a^{a/b}$. এক্ষণে $a:b=2:1$ হইলে a এবং b এর মান কত হইবে তাহা নির্ণয় কর।

(iii) যদি $xy^{p-1}=a$, $xy^{q-1}=b$, $xy^{r-1}=c$ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে

$$a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=1.$$

[ইঙ্গিত : $a^{q-r}=(x.y^{p-1})^{q-r}=x^{q-r}.\,y^{(p-1)(q-r)}$]

(iv) $m=a^x$, $n=a^y$ এবং $a^2=(m^yn^x)^z$ হইলে প্রমাণ কর যে $xyz=1$.

(v) $l^x=m^y=n^z$ এবং $m^2=ln$ হইলে প্রমাণ কর যে $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{y}$.

[ইঙ্গিত : $\because$ $m^2=ln$, $m^{2y}=l^yn^y$; $\therefore$ $l^{2x}=l^y.\left(l^{\frac{x}{z}}\right)^y$. অতএব $2x=y+\dfrac{xy}{z}$

অর্থাৎ $2xz=yz+xy$ বা $\frac{2}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}$(xyz দ্বারা উভয়পক্ষকে ভাগ করিয়া)]

(vi) যদি $\sqrt[a]{x}=\sqrt[b]{y}=\sqrt[c]{z}$ এবং $xz=y^2$ হয় তাহা হইলে দেখাও যে $a+c=2b$.

(vii) $p^a=q^b=r^c$ এবং $pqr=1$ হইলে, প্রমাণ কর যে $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=0$.

(viii) $p=a^x$, $q=a^y$ এবং $a^2=(p^y q^x)^z$ হইলে দেখাও যে $xyz=1$.

(ix) $\sqrt[a]{p}=\sqrt[b]{q}=\sqrt[c]{r}$ এবং $xyz=1$ হইলে, প্রমাণ কর যে $a+b+c=0$.

(x) যদি $a=x^{q+r}y^p$, $b=x^{r+p}y^q$, $c=x^{p+q}y^r$ হয় তবে প্রমাণ কর যে

$$a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=1.$$

9. (i) যদি $x=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে $x^3-6x-6=0$.

[ইঙ্গিত: $x^3=(\sqrt[3]{2})^3+(\sqrt[3]{4})^3+3\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$ বা $x^3=2+4+3\sqrt[3]{8}.x$ বা $x^3-6x-6=0$ ($\because$ $3\sqrt[3]{8}=3.2=6$.)]

(ii) যদি $x=3-\sqrt{3}$ হয় তাহা হইলে প্রমাণ কর যে $x^4-24x^2+36=0$.

(iii) যদি $x=2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$ হয় তাহা হইলে প্রমাণ কর যে $x^3-6x-6=0$.

(iv) যদি $ax^{\frac{2}{3}}+bx^{\frac{1}{3}}+c=0$, তবে দেখাও যে $a^3x^2+b^3x+c^3=3abcx$.

[ইঙ্গিত: এখানে $ax^{2/3}+bx^{1/3}=-c$; উভয় পক্ষের ঘন লইয়া

$a^3x^2+b^3x+3abx(ax^{2/3}+bx^{1/3})=-c^3$,

বা $a^3x^2+b^3x+3abx(-c)=-c^3$,

বা $a^3x^2+b^3x+c^3=3abcx$.]

(v) $x=3+3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}$ হইলে প্রমাণ কর যে $x^3-9x^2+18x-12=0$.

(vi) $x=1+2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}$ হইলে প্রমাণ কর যে $x^3-3x^2-3x-1=0$.

(vii) যদি $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=0$ হয় তবে প্রমাণ কর যে $(x+y+z)^3=27xyz$.

(viii) $a\neq0$ হইলে এবং $x=a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}$ হইলে প্রমাণ কর যে

$$ax^3-3ax-a^2-1=0.$$

(ix) $x=3+3^{\frac{2}{3}}-3^{\frac{1}{3}}$ হইলে দেখাও যে $x^3-9x^2+36x-60=0$.

(x) $x=2+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$ হইলে প্রমাণ কর যে $x^3-6x^2+6x-2=0$.

10. x এর সমাধান নির্ণয় কর, যদি

(i) $32^{x-3\frac{2}{5}}-56=200$

[ইঙ্গিত: এখানে $(2^5)^{x-3\frac{2}{5}}=256=2^8$, বা $2^{5x-17}=2^8$

বা $5x-17=8$, বা $x=5$.]

(ii) $2^{4x}.4^{3x-2}=\frac{4^{2x}}{2^{3x}}$. (iii) $9.81^x\frac{1}{27^{x-3}}$.

(iv) $9^{4x-5}=(27)^{x+10}$. (v) $2^{2^x}=16^{2^{3x}}$.

(vi) $4^{x+2}+2^{2x+3}=96$. (vii) $3^{2x-3}-5^{2x-1}=84375$.

[উঃ (ii) 4/9 ; (iii) 1 ; (iv) 8 ; (v) −1 ; (vi) 1 ; (vii) 3.]

TEST PAPERS (পরীক্ষামূলক প্রশ্নাবলী)

(সময় : এক ঘণ্টা)

1. প্রমাণ কর যে $\left(\frac{x}{x+y}\right)^{-1} \cdot \sqrt{\frac{x}{x+y}} = \sqrt{\frac{x+y}{x}}$

2. $x = \sqrt[3]{\{\sqrt{a^2+b^3}+a\}} - \sqrt[3]{\{\sqrt{a^2+b^3}-a\}}$ হইলে প্রমাণ কর যে $x^3+3bx-2a=0$.

3. $\sqrt[3]{(1-x^3)}.(y-z)+\sqrt[3]{(1-y^3)}.(z-x)+\sqrt[3]{(1-z^3)}.(x-y)=0$ হইলে এবং $x \neq y \neq z$ হইলে, প্রমাণ কর যে
$$(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)=(1-xyz)^3.$$

4. প্রমাণ কর যে
$$\left(a^{n^2-1}\right)^{\frac{n}{n+1}} + \frac{\sqrt[n]{a^{2n}}}{a} - \left(a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{n^2-1} = \sqrt{\frac{a^{2n}}{a^{2n-2}}}.$$

5. নিম্নের সমতাটির সত্যতা প্রমাণ কর :
$$\left(a^{\frac{1}{x-y}}\right)^{\frac{1}{x-z}} \times \left(a^{\frac{1}{y-z}}\right)^{\frac{1}{y-x}} \times \left(a^{\frac{1}{z-x}}\right)^{\frac{1}{z-y}} = 1.$$

6. $a^{\frac{3n}{2}} - a^{-\frac{3n}{2}}$ কে $a^{\frac{n}{2}} - a^{-\frac{n}{2}}$ দ্বারা ভাগ কর এবং ভাগফল $\frac{a^{2n}+1+a^n}{a^n}$ এর আকারে প্রকাশ কর।

7. $a^3=b^4$ হইলে দেখাও যে $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{4}{3}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{3}} + b^{-\frac{1}{4}}.$

8. $\left(a^{n^3}\right)^n = \left(a^{3^n}\right)^3$ হইলে প্রমাণ কর যে $\left(n^4\right)^{\frac{1}{n+1}} = 3.$

9. সমাধান কর : $9^{x+1} - 3^{2x+1} = 4374.$

10. $\left(\frac{y}{z}\right)^a \left(\frac{z}{x}\right)^b \left(\frac{x}{y}\right)^c = 1$ হইলে প্রমাণ কর যে $\left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{1}{b-c}} = \left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{1}{c-a}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{a-b}}.$

11. প্রমাণ কর :
$$\frac{a^{\frac{3}{2}} - ax^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}x - x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{5}{2}} - a^2x^{\frac{1}{2}} + 3a^{\frac{3}{2}}x - 3ax^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{1}{2}}x^2 - x^{\frac{5}{2}}} = \frac{x+a}{x^2+3x+a^2}.$$

12. লক্ষ্য কর, 0·0026 আকারের সংখ্যাকে $2{\cdot}6 \times 10^{-3}$ এই আকারে লেখা যায় এবং 16,000,000 আকারের সংখ্যাকে $1{\cdot}6 \times 10^{7}$ এই আকারে লেখা যায়। এখন নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলিকে একই প্রকারে প্রকাশ কর :—
0·36 ; 0·025 ; 1700 ; 0·00042 ; 36,900,000.

2.4. করণী (Surds)

মূলচিহ্নযুক্ত রাশির (Radical) সহিত ইতিপূর্বেই পরিচয় হইয়াছে। n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে $\sqrt[n]{a}$ (a'র n-তম মূল) আকারের রাশিকে **n-ক্রমের** (বা n সূচকের) **মূলচিহ্নযুক্ত রাশি** (Radical of order n) বলা হয়। '$\sqrt{\ }$' এই প্রতীক চিহ্নকে বা **মূলের সূচক চিহ্ন** (radical sign) এবং a কে **মূলসূচক চিহ্নাধীন রাশি** বা radicand বলা হয়।

উদা. : $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{8x^3-10y^2}$, $\sqrt[5]{32}$ হইলে যথাক্রমে 3, 4 এবং 5 ক্রমের মূলচিহ্নযুক্ত রাশি (অর্থাৎ Radicals of orders 3, 4, 5)। $\sqrt{3}$ হইল 2 ক্রমের মূলচিহ্নযুক্ত রাশি (লক্ষণীয়, এই বিশেষ ক্ষেত্রে মূলের ক্রমসূচক সংখ্যাটি লেখা হয় নাই) ; ইহাকে '3 এর বর্গমূল' এইরূপও পড়া হয়।

মূলচিহ্নযুক্ত এমন বহু রাশি আছে (**যথা** :, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt[5]{32}$ ইত্যাদি) যাহাদের মূলদ সংখ্যায় (rational number-এ) পরিণত করা যায় ; আবার মূলচিহ্নযুক্ত এমন রাশিসমূহও আছে (যেমন, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[5]{3}$ ইত্যাদি) যাহাদের মূলদ সংখ্যাতে পরিণত করা যায় না (প্রকৃতপক্ষে ইহাদের সীমাবদ্ধ অথবা পৌনঃপুনিক দশমিক আকারে প্রকাশ করা যায় না, অর্থাৎ ইহারা অমূলদ সংখ্যা (irrational number) —ইহাদের **করণী** বলা হয়।

সংজ্ঞা 1. যাহাকে মূলদ রাশিরূপে প্রকাশ করা যায় না, এইরূপ $\sqrt[n]{a}$ আকারের মূলচিহ্নযুক্ত রাশিকে n-ক্রমের করণী বলা হয়।

উদা. : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{11}$ প্রভৃতিকে দুই-ক্রমের করণী বলা হয় (দ্বিঘাত করণীও বলা হয়); $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{11}$ প্রভৃতি হইল তিন-ক্রমের করণী (বা ত্রিঘাত করণী) ইত্যাদি, ইত্যাদি।

স্মরণ রাখিতে হইবে : 1. মূলচিহ্নযুক্ত সকল রাশিই করণী নয়, কিন্তু সকল করণী মূলচিহ্নযুক্ত (যথা, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt{25}$ ইত্যাদি মূলচিহ্নযুক্ত রাশি, কিন্তু করণী নয়)

2. করণী এবং অমূলদ সংখ্যা সমার্থক নয়। প্রকৃতপক্ষে, সকল করণীই অমূলদ রাশি, কিন্তু সকল অমূলদ রাশিই করণী নয় (যথা, π, e অমূলদ রাশি কিন্তু করণী নয়)।

সংজ্ঞা 2. **মিশ্র করণীসমূহ (Mixed Surds)** হইল $a\sqrt[n]{b}$ এই আকারের এমন রাশি, যেখানে a মূলদ কিন্তু $\sqrt[n]{b}$ অমূলদ রাশি (যথা $2\sqrt[3]{3}$, $4\sqrt[5]{7}$ প্রভৃতি)। দুইটি মিশ্র করণীর অমূলদ অংশ অভিন্ন হইলে উহাদের **সদৃশ** (Similan) করণী বলা হয় (যথা : $4\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ প্রভৃতি) ; নতুবা উহাদের **অসদৃশ** বলা হয়। (যথা : $2\sqrt[3]{4}$ এবং $5\sqrt[5]{2}$ অসদৃশ করণী)।

করণীসমূহের যোগ-বিয়োগ প্রভৃতি কার্যাদির নিয়মাবলী

প্রথম নিয়ম। $\sqrt[n]{a^n}=a$ এই সূত্র প্রয়োগ করিয়া যে কোন মূলদ-সংখ্যাকে ঈপ্সিত যে কোন ক্রমের মূলচিহ্নযুক্ত সংখ্যারূপে প্রকাশ করা যায়।

উদা.ঃ $4=\sqrt[7]{4^7}$; $(a+x)=\sqrt[n]{(a+x)^n}$ ইত্যাদি।

দ্বিতীয় নিয়ম। মিশ্র করণীর মূলদ অংশটিকে নিম্নপ্রকারে মূলচিহ্নটির অধীনে আনা যায়ঃ

$$a\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{a^3}.\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{a^3x}\ ;\ 4\sqrt{2}=\sqrt{4^2}.\sqrt{2}=\sqrt{32}.$$

[লক্ষ্য করিতে হইবে, এখানে $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ এই সূত্রটি প্রয়োগ করা হইয়াছে।]

তৃতীয় নিয়ম। মূলচিহ্নাধীন রাশির কোন অংশকে মূলচিহ্নটির বাহিরেও আনা যায়, যেমনঃ

$$\sqrt{a^3-a^2x}=\sqrt{a^2(a-x)}=\sqrt{a^2}.\ \sqrt{a-x}=a\sqrt{a-x}$$

$$\sqrt{60}=\sqrt{4}.\ \sqrt{15}=2\sqrt{15}.$$

[লক্ষ্য কর, তৃতীয় নিয়ম প্রকৃতপক্ষে দ্বিতীয় নিয়মের বিপরীত।]

চতুর্থ নিয়ম। একই অমূলদ অংশযুক্ত দুইটি করণীর (অর্থাৎ সদৃশ করণীর) যোগ অথবা বিয়োগঃ

মূলদ সহগ দুইটির সমষ্টি অথবা অন্তরফলকে সাধারণ অমূলদ অংশের সহিত সহগরূপে যুক্ত করিতে হইবে।

উদা.ঃ $a\sqrt{x}\pm b\sqrt{x}=(a\pm b)\sqrt{x}$; $\sqrt{300}-5\sqrt{3}=\sqrt{3}.\sqrt{100}-5\sqrt{3}$
$=10\sqrt{3}-5\sqrt{3}=5\sqrt{3}.$

পঞ্চম নিয়ম। দুইটি করণীর গুণফল অথবা ভাগফলঃ

(i) একই ক্রমের দুইটি করণীর ক্ষেত্রে $\sqrt[n]{a}.\ \sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ অথবা $\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ সূত্র প্রয়োগ করিতে হইবেঃ

উদা.ঃ $\sqrt[3]{(a+b)}.\ \sqrt[3]{(a-b)}=\sqrt[3]{(a^2-b^2)}$; $a\sqrt{x}.\ b\sqrt{y}=ab\sqrt{xy}$

$(3\sqrt{8}).(5\sqrt{2})=15\sqrt{16}=15.4=60$; $\sqrt[3]{x}\div\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{\frac{x}{a}}$ ইত্যাদি।

(ii) $a^{\frac{p}{q}}$ এবং $b^{\frac{r}{s}}$ আকারের দুইটি রাশির গুণফল (অথবা ভাগফল):

যদি $q=s$ হয়, তবে রাশি দুইটিকে $\sqrt[q]{a^p}$ এং $\sqrt[q]{b^r}$ এই আকারে লিখিয়া (i)এর নিয়ম প্রয়োগ করা যায়।

যদি $q\neq s$ হয়, তবে $\frac{p}{q}$ এবং $\frac{r}{s}$ ভগ্নাংশ দুইটিকে সাধারণ হরবিশিষ্ট (q এবং s এর ল. সা. গু. হইল ঐ সাধারণ হর) ভগ্নাংশে রূপান্তরিত করিয়া $q=s$ হইলে যেরূপ হয় সেইরূপভাবে অগ্রসর হইতে হইবে।

উদা.ঃ $(a+x)^{\frac{1}{2}}.(a-x)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{(a+x)}\cdot\sqrt{(a-x)^3}=\sqrt{(a+x)(a-x)^3}.$

$$2^{\frac{3}{2}}.\ 3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2^3}.\sqrt{3}=\sqrt{24}.$$

$$a^{\frac{m}{n}} \div b^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \div \sqrt[n]{b^p} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^p}}.$$

$$(a+x)^{\frac{1}{4}}.(a-x)^{\frac{1}{2}} = (a+x)^{\frac{1}{4}}.(a-x)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{(a+x)}.\sqrt[4]{(a-x)^2}$$
$$= \sqrt[4]{(a+x)(a-x)^2}.$$

$$2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{6}}.3^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{2^3}.\sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{72}.$$

$$(a-x)^{\frac{1}{2}} \div (a+x)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[6]{(a-x)^3}}{\sqrt[6]{(a+x)^2}} = \sqrt[6]{\frac{(a-x)^3}{(a+x)^2}}.$$

(*iii*) মূলচিহ্নাধীন রাশি দুইটি একই (same radicand) এইরূপ দুইটি করণীর গুণফল বা ভাগফল নির্ণয়ের জন্য $a^{\frac{1}{n}}.a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}$ অথবা $a^{\frac{1}{n}} \div a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}$, এই সূত্র প্রয়োগ করিতে হইবে।

উদা. : $\sqrt{2}.\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}.$

$\sqrt[3]{x} \div \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{3}} \div x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{x}.$

সংক্ষেপে উত্তর-সম্ভব প্রশ্নাবলী (SHORT ANSWER QUESTIONS)

প্রশ্ন	উত্তর	প্রশ্ন	উত্তর	প্রশ্ন	উত্তর
1. 2কে মূল চিহ্নযুক্ত রাশিরূপে প্রকাশ কর যেন উহা 3-ক্রমের হয়	=	**4.** কোন্‌টি বৃহত্তর : $\sqrt[3]{14}$ অথবা $\sqrt[2]{6}$?	=	**11.** $\sqrt[3]{2}$ এবং $\sqrt[4]{5}$কে সমক্রমীয় করণীরূপে প্রকাশ কর	=
16-ক্রমের হয়	=	**5.** $\sqrt{5}$কে $\sqrt[3]{2}$ দ্বারা গুণ কর	=	**12.** কোন্‌টি ক্ষুদ্রতর : $\sqrt[3]{4}$ অথবা $\sqrt[4]{5}$?	=
n-ক্রমের হয়	=	**6.** $3\sqrt{5}$কে $2\sqrt[3]{2}$ দ্বারা গুণ কর	=	**13.** মানের নিম্নক্রমে সাজাও : $\sqrt[18]{12}$, $\sqrt[12]{9}$এবং $\sqrt[9]{8}$	=
2. মিশ্র করণী $5\sqrt[3]{3}$, $2\sqrt{2}$, $a\sqrt[n]{ab}$কে বিশুদ্ধ করণীর আকারে প্রকাশ কর	=	**7.** $\sqrt{2}$কে $\sqrt[3]{2}$ দ্বারা গুণ কর	=	$\sqrt[12]{10}$, $\sqrt[3]{6}$ এবং $\sqrt[6]{4}$	=
3. $\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{40}$	=	**8.** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$কে $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ দ্বারা গুণ কর	=	**14.** $\sqrt{108}-\sqrt{75}$	=
		9. $\sqrt[3]{4}$কে $\sqrt{8}$ দ্বারা ভাগ কর	=	**15.** $\sqrt{175}-\sqrt{112}$	=
		10. $\sqrt[5]{-486x^5y^{12}}$ কে মিশ্র করণীরূপে সরলতম আকারে প্রকাশ কর	=	**16.** $\sqrt[3]{4}\div\sqrt{6}$	=

ষষ্ঠ নিয়ম। হরের করণী নিরসন (Rationalising denominators) :

কখনও কখনও, বিশেষতঃ পাটীগণিতের প্রশ্ন সমাধানে, করণীযুক্ত হরের ভগ্নাংশকে মূলদ-হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে রূপান্তরের প্রয়োজন হয়। উহা কি প্রকারে করা হয়, তাহা নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি হইতে বুঝা যাইবে।

উদা : (i) $\dfrac{a}{\sqrt{b}}=\dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}.\sqrt{b}}=\dfrac{a}{b}\sqrt{b}$; $\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7}.\sqrt{7}}=\dfrac{2}{7}\cdot\sqrt{7}.$

(ii) $$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})}$$
$$=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2}=\frac{a}{b-c}(\sqrt{b}-\sqrt{c}).$$

[$\sqrt{b}+\sqrt{c}$ এবং $\sqrt{b}-\sqrt{c}$ কে পরস্পরের **প্রতিযোগী বা অনুবন্ধী** (**Conjugate**) বলা হয় ; উহাদের একটি অপরটির করণীনিরসক উৎপাদক।]

$$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$$
$$=\frac{3}{5-2}(\sqrt{5}+\sqrt{2})=\sqrt{5}+\sqrt{2}.$$

(iii) $$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}{6+2\sqrt{15}}$$
$$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2})(6-2\sqrt{15})}{(6)^2-(2\sqrt{15})^2}$$
$$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2})(6-2\sqrt{15})}{36-60}$$
$$=-\tfrac{1}{24}\{6\sqrt{3}+6\sqrt{5}-6\sqrt{2}-2\sqrt{45}-10\sqrt{3}-2\sqrt{30}\}.$$

(iv) $$\frac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{15}}=\frac{1}{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}=\tfrac{1}{8}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1).$$

পূর্ববর্তী উদাহরণগুলিতে প্রত্যেকটি হর দ্বিঘাত করণী (অর্থাৎ দুই-ক্রমের করণী) যুক্ত। এখন $\sqrt[p]{a}\pm\sqrt[q]{b}$ আকারের যে কোন দ্বিপদ রাশিকে করণীমুক্ত করিবার নিয়ম আলোচিত হইবে। প্রসঙ্গত নিম্নলিখিত অভেদগুলি জানা আবশ্যক :

1. যদি n ধনাত্মক অযুগ্ম সংখ্যা হয় তবে
$$(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots\cdots+y^{n-1})=x^n+y^n$$
2. যদি n ধনাত্মক যুগ্ম সংখ্যা হয় তবে
$$(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots\cdots-y^{n-1})=x^n-y^n$$
3. যদি n যে কোন অখণ্ড সংখ্যা হয় তবে
$$(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots\cdots+y^{n-1})=x^n-y^n$$

এখন $\sqrt[p]{a} \pm \sqrt[q]{b}$ আকারের যে কোন দ্বিপদ রাশির করণীনিরসক একটি উৎপাদক নির্ণয়ের জন্য প্রথমত p এবং q এর লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল. সা. গু.) $= n$ (মনে করা যাক্) নির্ণয় করা হইল। তাহা হইলে উপরের অভেদগুলির সাহায্যে $x \pm y$ (যেখানে $x = \sqrt[p]{a}$ এবং $y = \sqrt[q]{b}$ ধরা হইয়াছে) এর করণীনিরসক উৎপাদক পাওয়া যাইবে।

একটি উদাহরণ লওয়া যাক :

উদা. : $\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}$ এই দ্বিপদ রাশির করণীনিরসক উৎপাদক নির্ণয় করিতে হইবে। $\sqrt{a}$ এবং $\sqrt[3]{b}$ এর **ক্রমসূচক** সংখ্যাদ্বয়ের ল. সা. গু. 6 ; ইহা একটি ধনাত্মক যুগ্ম সংখ্যা।

জানা আছে : $(x+y)(x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5) = x^6 - y^6$

ধরা যাক্ $x = \sqrt{a}$ এবং $y = \sqrt[3]{b}$; তাহা হইলে ডান পক্ষ $= (\sqrt{a})^6 - (\sqrt[3]{y})^6$

$= a^3 - b^2 =$ মূলদ রাশি।

সুতরাং নির্ণেয় করণীনিরসক উৎপাদকটি হইল

$$(\sqrt{a})^5 - (\sqrt{a})^4(\sqrt[3]{b}) + (\sqrt{a})^3(\sqrt[3]{b})^2 - (\sqrt{a})^2(\sqrt[3]{b})^3 + (\sqrt{a})(\sqrt[3]{b})^4 - (\sqrt[3]{b})^5$$

$$= a^{\frac{5}{2}} - a^2b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}} - ab + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}} - b^{\frac{5}{3}}$$

উদা. : অনুরূপ পদ্ধতিতে $\sqrt[3]{2} - 1$ এবং $\sqrt[3]{9} + 1$ এর করণীনিরসক উৎপাদক নির্ণয় কর।

সপ্তম নিয়ম : a এবং b মূলদ কিন্তু $\sqrt{b}$ দ্বিঘাত করণী হইলে $a \pm \sqrt{b}$ আকারের রাশির বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইবে :

প্রথমে নিম্নের প্রতিপাদ্যটি প্রমাণ করা হইবে।

প্রতিপাদ্য : মনে করা যাক্ a, b, x এবং y মূলদ রাশি এবং $\sqrt{x}$ ও $\sqrt{y}$ দ্বিঘাত করণী। যদি $a + \sqrt{x} = b + \sqrt{y}$ হয় তবে $a = b$, এবং $x = y$.

প্রমাণ : প্রতিপাদ্যটি প্রমাণ করিতে নিম্নের মৌলিক সিদ্ধান্তটির সাহায্য আবশ্যক :

একটি মূলদ রাশি একটি অমূলদ রাশির সহিত সমান হইতে পারে না।

এখন $a + \sqrt{x} = b + \sqrt{y}$ এই প্রদত্ত সম্পর্ক হইতে লেখা যায়

$$a - b + \sqrt{x} = \sqrt{y}.$$

উভয় পক্ষের বর্গ লইয়া ও পরে পক্ষান্তর করিয়া পাওয়া যায়

$$2(a-b)\sqrt{x} = y - x - (a-b)^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

সুতরাং **যদি $\sqrt{x}$ এর সহগ শূন্য না হয়,** তবে বাম পক্ষের একটি অমূলদ রাশি ডান পক্ষের একটি মূলদ রাশির সহিত সমান হইতেছে, কিন্তু ইহা অসম্ভব।

অতএব (1) সমীকরণটির $\sqrt{x}$ এর সহগ অবশ্যই শূন্য হইবে, অর্থাৎ $a=b$.
এখন $a=b$ হইলে প্রদত্ত সম্পর্ক হইতে পাওয়া যায় $\sqrt{x}=\sqrt{y}$ বা $x=y$.

[**টীকা :** যেহেতু a, b, x, y প্রত্যেকে মূলদ, সুতরাং ডান পক্ষের $y-x-(a-b)^2$ ও মূলদ ($\because$ মূলদ সংখ্যাগুলির উপর চারিটি মৌলিক ক্রিয়া, যথা : যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ, প্রয়োগে উৎপন্ন সংখ্যাগুলিও মূলদ)]

অনুসিদ্ধান্ত : যদি $b=0$ এবং $a=c$ না হয় তবে $\sqrt{a}\neq b+\sqrt{c}$.
সুতরাং $\sqrt{a}\mp\sqrt{c}$ মূলদ হইতে পারে, যদি কেবল ইহার মান শূন্য হয়।

প্রতিপাদ্য : a এবং b উভয়েই মূলদ এবং $\sqrt{b}$ একটি দ্বিঘাত করণী হইলে $a\pm\sqrt{b}$ এর বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইবে।

নিম্নের মন্তব্যগুলি প্রথমে প্রণিধানযোগ্য :

(i) $a\pm\sqrt{b}$ এর বর্গমূল দুইটি—একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক। অর্থাৎ যদি অন্যতম বর্গমূল $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ হয়, তবে অপরটি $-(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

(ii) যদি a^2-b পূর্ণবর্গ হয়, তবেই ইহা সম্ভব যে $a+\sqrt{b}$ এর একটি বর্গমূল $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, যেখানে x এবং y মূলদ (এই উক্তিটি পরবর্তী আলোচনায় আরও পরিস্ফুট হইবে)।

$\sqrt{(a+\sqrt{b})}$ কে $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ এর আকারে প্রকাশের সম্ভাব্যতা এই যুক্তির দ্বারা সমর্থিত হয় যে $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=\underbrace{x+y}+2\underbrace{\sqrt{xy}}=$ একটি মূলদ অংশ + একটি মূলচিহ্নযুক্ত রাশি।

(iii) যদি $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ হয়, তবে $\sqrt{(a-\sqrt{b})}=\sqrt{x}\sim\sqrt{y}$].
এখন মনে করা যাক, $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ (x এবং y মূলদ সংখ্যা)।
উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া, $a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}$.

$\sqrt{b}$ একটি করণী, সুতরাং উভয় পক্ষের মূলদ অংশ দুইটি সমান এবং অমূলদ অংশ দুইটি সমান বলিয়া,

$$a=x+y;\quad \sqrt{b}=2\sqrt{xy}.$$

কিন্তু $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=a^2-b$; $\therefore\ x-y=\pm\sqrt{a^2-b}$.

এখন $x+y=a,\ x-y=\pm\sqrt{a^2-b}$ এই সমীকরণ দুইটি সমাধান করিতে হইবে।

প্রাপ্ত দুইজোড়া সমাধান হইল :

$$\left.\begin{array}{l} \text{যদি } x=\frac{1}{2}[a+\sqrt{a^2-b}],\ \text{তবে } y=\frac{1}{2}[a-\sqrt{a^2-b}] \\ \text{যদি } x=\frac{1}{2}[a-\sqrt{a^2-b}],\ \text{তবে } y=\frac{1}{2}[a+\sqrt{a^2-b}] \end{array}\right\}$$

যে কোন একজোড়া মান লইয়া লেখা যায় যে

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-b}}\right\}.$$

এইবার লক্ষ্য করিতে হইবে যে

1. যদি a^2-b ঋণাত্মক হয়, তবে $\sqrt{a^2-b}$ বাস্তব সংখ্যা নয়।

2. যদি a^2-b পূর্ণবর্গ হয়, তবেই $\sqrt{a^2-b}$ মূলদ এবং $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ (x, y মূলদ) এই অনুমান যুক্তিসিদ্ধ বলিয়া দেখা যায়। (পূর্বের মন্তব্য (ii) দ্রষ্টব্য।)

মনে রাখিতে হইবেঃ যখন $\sqrt{a^2-b}$ মূলদ হইবে, তখনই কেবল এই পদ্ধতিটি বাস্তব ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যুক্তিযুক্ত।

[নিম্নে উদাহরণস্বরূপ প্রদত্ত প্রশ্নগুলি দ্রষ্টব্য।]

3. যদি $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ হয়, তবে $\sqrt{(a-\sqrt{b})}=\sqrt{x}\sim\sqrt{y}$, কারণ প্রদত্ত শর্ত $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ হইতে পূর্বের মত পাওয়া যায় যে $x+y=a$, $2\sqrt{xy}=b$ এবং $a-\sqrt{b}=x+y-2\sqrt{xy}=(\sqrt{x}\sim\sqrt{y})^2$.

$\therefore \sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{x}\sim\sqrt{y}$.

পর্যবেক্ষণ দ্বারা (by inspection) বর্গমূল নির্ণয় :

যদি $a+\sqrt{b}$ এর বর্গমূল দুইটির $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ (x, y মূলদ) এই আকারে থাকা সম্ভব হয়, তবে উহাদের সাধারণত পর্যবেক্ষণ দ্বারাই লেখা যায়। কেন না,

$$a+\sqrt{b}=\tfrac{1}{2}\{2a+2\sqrt{b}\}.$$

এখন পর্যবেক্ষণ দ্বারা এমন দুইটি মূলদ সংখ্যা x ও y নির্ণয় করিতে হইবে যেন $x+y=2a$, $xy=b$ হয়। তাহা হইলে ইহা সুস্পষ্ট যে,

$$a+\sqrt{b}=\tfrac{1}{2}(x+y+2\sqrt{xy})=\tfrac{1}{2}(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2,$$

সুতরাং $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

এই পদ্ধতির প্রয়োগ বেশ সুবিধাজনক; সামান্য অভ্যাস করিলেই ইহা ছাত্র-ছাত্রীদের সহজ বলিয়া মনে হইবে।

উদা. 1. $\sqrt{(7-2\sqrt{10})}$ এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রথম পদ্ধতি। এখানে $7-2\sqrt{10}=7-\sqrt{40}$, সুতরাং পূর্বে প্রদত্ত অঙ্কপাতন (notation) অনুসারে $a^2-b=9$ (একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা)। অতএব ধরিয়া লওয়া যাক্

$$\sqrt{(7-2\sqrt{10})}=\pm(\sqrt{x}-\sqrt{y}) \quad (x, y \text{ মূলদ })।$$

উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া এবং মূলদ অংশ দুইটিকে পরস্পর সমান ও অমূলদ অংশ দুইটিকে সমান লিখিয়া,

$$7=x+y,\ xy=10$$

যেহেতু $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=49-40=9$, অতএব $x-y=\pm 3$.

$x+y=7$, $x-y=\pm 3$; এই সমীকরণ দুইটি সমাধান করিলে পাওয়া যায় $x=5, y=2$ বা $x=2, y=5$.

যে কোন মান যুগল লইয়া $\sqrt{(7-2\sqrt{10})}=\pm(\sqrt{5}-\sqrt{2})$.

পর্যবেক্ষণ পদ্ধতি : $7-2\sqrt{10}=5+2-2\sqrt{5}.\sqrt{2}=(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$

[এখানে $x+y=7$, $xy=10$]

$$\therefore \quad \sqrt{7-2\sqrt{10}}=\pm(\sqrt{5}-\sqrt{2}).$$

উদা. 2. $\sqrt{(18+12\sqrt{3})}$ এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

এক্ষেত্রে $\sqrt{a^2-b}$ মূলদ সংখ্যা নয়, সুতরাং নির্ণেয় বর্গমূলদ্বয়কে $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ (x,y মূলদ) এর আকারে প্রকাশ করা যাইবে না।

যাহা হউক, ইহা লিখিতে পারা যায় যে $18+12\sqrt{3}=9.2+3.4\sqrt{3}$
$=3\sqrt{3}(2\sqrt{3}+4)$.

এখন দেখা যায় যে $4+2\sqrt{3}=3+1+2\sqrt{3.1}=(\sqrt{3}+1)^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\sqrt{3\sqrt{3}}\,(\sqrt{3}+1)=\pm\sqrt[4]{27}\,(\sqrt{3}+1)$.

লক্ষ্য করা যায়, বর্গমূলদ্বয়কে $\pm(\sqrt[4]{243}+\sqrt[4]{27})$ এই আকারে প্রকাশ করা যায়; অর্থাৎ বর্গমূলদ্বয় $\pm(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})$, (যেখানে x ও y মূলদ), এই আকারে আছে।

উদা. 3. $\sqrt{(\sqrt{147}-\sqrt{135})}$ এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

ইহা লেখা যায় যে $\sqrt{147}-\sqrt{135}=7\sqrt{3}-3\sqrt{15}=\sqrt{3}\,(7-3\sqrt{5})$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(14-2\sqrt{45})=\frac{\sqrt{3}}{2}\,(9+5-2\sqrt{9}.\sqrt{5})$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\,(\sqrt{9}-\sqrt{5})^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\,(3-\sqrt{5})^2$$

$$\therefore \quad \sqrt{(\sqrt{147}-\sqrt{135})}=\pm\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(3-\sqrt{5})=\pm\frac{\sqrt[4]{12}}{2}(3-\sqrt{5}).$$

উদা. 4. $a+b+\sqrt{2ab+b^2}$ এর বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইবে।

$$a+b+\sqrt{2ab+b^2}=\tfrac{1}{2}\,[(2a+b)+b+2\sqrt{2a+b}.\sqrt{b}\,]$$

$=\frac{1}{2}\,[\sqrt{2a+b}+\sqrt{b}]^2$. $\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{2a+b}+\sqrt{b}]$

$$=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}[\sqrt{2a+b}+\sqrt{b}].$$

স্মরণ রাখিতে হইবে : সংখ্যা সম্বন্ধীয় প্রশ্নসমূহে, বিশেষত সরলীকরণের ক্ষেত্রে, $\sqrt{(7-2\sqrt{10})}$ এর কেবল ধনাত্মক বর্গমূলটি লইবে।

প্রশ্নমালা II(B)

[A]

1. নিম্নের প্রতিক্ষেত্রে করণীনিরসক উৎপাদকটি নির্ণয় কর :

(i) $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}$; (ii) $\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$; (iii) $\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}$.

2. $2+\sqrt{3}$ এর অনুবন্ধী রাশিটি কি ? $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ এর হরটি করণীমুক্ত কর এবং ইহার মান নির্ণয় কর, যদি $\sqrt{3}=1{\cdot}732051$ হয়। [উ : 3·732051]

3. প্রতি ক্ষেত্রে দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর :

(i) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$; (ii) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

(iii) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-\sqrt{18}-2\sqrt{12}+\sqrt{8}}$

[উ : 5·83 ; (ii) 9·80 ; (iii) 7·90]

4. সরল কর :

(i) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

(ii) $\dfrac{(7-2\sqrt{5})(5+\sqrt{7})(31+13\sqrt{5})}{(6-2\sqrt{7})(3+\sqrt{5})(11+4\sqrt{7})}$ (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}$;

(iv) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{21}-\sqrt{10}-\sqrt{35}}$

[লক্ষ্য কর, হর $=(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{7})$] ;

(v) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$.

[উ : (i) 0 ; (ii) 14·5 ; (iii) $\frac{1}{12}(\sqrt{30}+2\sqrt{3}-3\sqrt{2})$;
(iv) $\frac{1}{10}(\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{21}-\sqrt{35})$; (v) $\frac{1}{3}(4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+4)$]

5. বর্গমূল নির্ণয় কর :

(i) $7-4\sqrt{3}$; (ii) $18+8\sqrt{5}$; (iii) $75-12\sqrt{21}$.

(iv) $\sqrt{27}+\sqrt{15}$; (v) $2x+1+2\sqrt{x^2+x-2}$;

(vi) $a+b+c+2\sqrt{ac+bc}$.

[উ : (i) $\pm(2-\sqrt{3})$; (ii) $\pm(\sqrt{10}+2\sqrt{2})$; (iii) $\pm(3\sqrt{7}-2\sqrt{3})$;
(iv) $\pm\sqrt[4]{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$; (v) $\pm(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1})$;
(vi) $\pm(\sqrt{a+b}+\sqrt{c})$].

[B]

1. কোন্ উৎপাদককে $\sqrt{a}-\sqrt[3]{b^2}$ দ্বারা গুণ করিলে গুণফল a^3-b^4 হইবে ?

[উঃ $a^{5/2}+a^2b^{2/3}+a^{3/2}b^{4/3}+ab^2+a^{1/2}b^{8/3}+b^{10/3}$].

2. (*i*) প্রমাণ কর যে $\dfrac{(3+\sqrt{3})(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-2)}{(5-\sqrt{5})(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{1}{5}\sqrt{15}.$

(*ii*) সরল কর : $\dfrac{8+3\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}}+\dfrac{8-3\sqrt{2}}{3-\sqrt{5}}$ এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত ইহার আসন্ন মান নির্ণয় কর। [উঃ 7·26]

3. দেখাও যে

(*i*) $\dfrac{15}{\sqrt{10}+\sqrt{20}+\sqrt{40}-\sqrt{5}-\sqrt{80}}=\sqrt{5}(1+\sqrt{2})$;

[বাম পক্ষের হর $=3\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)$]

(*ii*) $\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-1)(3\sqrt{3}-5)(2+\sqrt{2})}=2+\sqrt{3}.$

4. সরল কর :

(*i*) $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$;

(*ii*) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$;

(*iii*) $\dfrac{\sqrt{ax}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}-\sqrt{(a+x)}}-\dfrac{\sqrt{ax}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}+\sqrt{(a+x)}}.$

[উঃ (i) $4x\sqrt{x^2-1}$; (ii) $2x^2$; (iii) $\sqrt{a+x}$]

5. বর্গমূল নির্ণয় কর :

(*i*) $16+5\sqrt{7}$; (*ii*) $ab+c^2+\sqrt{\{(a^2-c^2)(b^2-c^2)\}}$;

(*iii*) $-9+6\sqrt{3}$; (*iv*) $1+(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}$

(*v*) $(a+b)^2-4(a-b)\sqrt{ab}$; (*vi*) $x+\sqrt{x^2-y^2}.$

{ ইঙ্গিত : (ii) প্রদত্ত রাশি $=\frac{1}{2}[2ab+2c^2+2\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}]$

$$=\tfrac{1}{2}[2ab+2c^2+2\sqrt{(a+c)(b+c)}.\sqrt{(a-c)(b-c)}]$$
$$=\tfrac{1}{2}[\{\sqrt{(a+c)(b+c)}\}^2+\{\sqrt{(a-c)(b-c)}\}^2+2\sqrt{(a+c)(b+c)}.\sqrt{(a-c)(b-c)}]$$
$$=\tfrac{1}{2}[\sqrt{(a+c)(b+c)}+\sqrt{(a-c)(b-c)}]^2.$$

[উঃ (i) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(5+\sqrt{7})$; (iii) $\pm\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(3-\sqrt{3})$;

(iv) $\pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{(1-a^2)}}.\dfrac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\}$;

(v) $a-2\sqrt{ab}-b$; (vi) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})$].

[C]

1. দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় কর :

$$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}-\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right).$$ [উঃ $\frac{1}{3}\sqrt{6}=2\cdot45$]

2. সরল কর :

(i) $\dfrac{\sqrt{6}-2}{5\sqrt{3}-\sqrt{32}-\sqrt{48}+\sqrt{18}}$; (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$;

(iii) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$.

[উঃ (i) $\sqrt{2}$; (ii) $\frac{1}{2}[\sqrt{21}+\sqrt{10}-\sqrt{14}-\sqrt{15}]$; (iii) $\sqrt[3]{2}-1$]

3. যদি $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ হয়, তবে নিম্নে প্রদত্ত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

(i) $\dfrac{1+x}{1+\sqrt{(1+x)}}+\dfrac{1-x}{1+\sqrt{(1-x)}}$; (ii) $\dfrac{1+x}{1+\sqrt{(1+x)}}+\dfrac{1-x}{1-\sqrt{(1-x)}}$;

(iii) $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$.

[উঃ (i) $\frac{5}{3}\sqrt{3}-2$; (ii) 1; (iii) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$]

4. (i) $x=3+2\sqrt{2}$ হইলে প্রমাণ কর যে $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=2$ (x-এর ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত বর্গমূল লইতে হইবে)।

[এখানে $x=(\sqrt{2}+1)^2$; $\sqrt{x}=\sqrt{2}+1$; বামপক্ষ$=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}=\dfrac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)}=2.$]

(ii) যদি $x=17+12\sqrt{2}$ হয় তবে $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ এর মান নির্ণয় কর।

[উঃ 6]

5. সরল কর :

(i) $\dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\sqrt{(3+\sqrt{5})}}-\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{18}-\sqrt{(3-\sqrt{5})}}$;

(ii) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{(2+\sqrt{3})}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{(2-\sqrt{3})}}$;

(iii) $\dfrac{1}{\sqrt{(12-\sqrt{140})}}-\dfrac{1}{\sqrt{(8-\sqrt{60})}}-\dfrac{2}{\sqrt{(10+\sqrt{84})}}$;

(iv) $\dfrac{1}{\sqrt{(11-2\sqrt{30})}}-\dfrac{3}{\sqrt{(7-2\sqrt{10})}}-\dfrac{4}{\sqrt{(8+4\sqrt{3})}}$.

[**সমাধান :** (i) $3+\sqrt{5}=\frac{1}{2}(6+2\sqrt{5})=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)^2$;

$\therefore\ \sqrt{(3+\sqrt{5})}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{5}+1)$;

অনুরূপভাবে $\sqrt{(3-\sqrt{5})}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1)$;

সুতরাং প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{10\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{5}+1)}-\dfrac{\sqrt{10}+3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1)}$

$=\dfrac{20}{5-\sqrt{5}}-\dfrac{2\sqrt{5}+6}{7-\sqrt{5}}=\dfrac{20(5+\sqrt{5})}{5^2-(\sqrt{5})^2}-\dfrac{(2\sqrt{5}+6)(7+\sqrt{5})}{7^2-(\sqrt{5})^2}$

$=(5+\sqrt{5})-\dfrac{13+5\sqrt{5}}{11}=\frac{6}{11}(7+\sqrt{5})$ **উত্তর**]

[উঃ (ii) $\sqrt{2}$; (iii) 0; (iv) 0.]

[D]

1. (i) বর্গমূল নির্ণয় কর: $10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}$.

[কোন কোন সময় $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ এই আকারের রাশির বর্গমূল নির্ণয় করিবার সময় ধরিয়া লওয়া যায় যে $\sqrt{(a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$, যেখানে x, y, z মূলদ। তাহা হইলে $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=(x+y+z)+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}+2\sqrt{xy}$; এখন লিখিতে পারা যায় যে $2\sqrt{yz}=\sqrt{b}$, $2\sqrt{zx}=\sqrt{c}$, $2\sqrt{xy}=\sqrt{d}$ এবং যদি ইহা হইতে প্রাপ্ত x, y, z এর মূলদ মানগুলি $x+y+z=a$ সমীকরণটিকেও সিদ্ধ করে, তাহা হইলে নির্ণেয় বর্গমূল পাওয়া যাইবে। উদাহরণস্বরূপ ধরা হইল:

$\sqrt{(10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ (x, y, z মূলদ);

তাহা হইলে $10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}=x+y+z+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}+2\sqrt{xy}$.

এখন লেখা গেল $2\sqrt{yz}=2\sqrt{6}$, $2\sqrt{zx}=2\sqrt{10}$, $2\sqrt{xy}=2\sqrt{15}$; সুতরাং প্রথম দুইটি গুণ করিলে $\sqrt{yz}\times\sqrt{zx}=\sqrt{6}\,.\sqrt{10}=\sqrt{60}$ এবং $\sqrt{xy}=\sqrt{15}$; অতএব ভাগ দ্বারা $z=2$ পাওয়া গেল; সুতরাং $x=5$, $y=3$; অতএব নির্ণেয় বর্গমূল হইল $\pm(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$.]

(ii) বর্গমূল নির্ণয় কর:

$8+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}$; $11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$;

$5+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{15}$;

$17+4\sqrt{2}-4\sqrt{3}-4\sqrt{6}-4\sqrt{5}-2\sqrt{10}+2\sqrt{30}$;

$9\frac{x}{y}-24\sqrt{\frac{x}{y}}+34-24\sqrt{\frac{y}{x}}+9\frac{y}{x}$.

[উঃ $\pm(\sqrt{5}+\sqrt{2}+1)$; $\pm(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6})$; $\pm\left\{1+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\right\}$;

$\pm(2+\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{6})$]

2. (*i*) $10+\sqrt{108}$ এর একটি ঘনমূল নির্ণয় কর।

[কোন কোন সময় (কিন্তু সব সময় নয়) $a+\sqrt{b}$ আকারের রাশির ঘনমূল নির্ণয় এইরূপ ধরিয়া লইয়া করা যায় যে $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}=x+\sqrt{y}$; ইহা হইতে পাওয়া যায় যে $\sqrt[3]{(a-\sqrt{b})}=x-\sqrt{y}$; উহাদের গুণ করিয়া পাওয়া গেল $\sqrt[3]{(a^2-b)}=x^2-y$; এখন মনে করি, $a^2-b=$ পূর্ণঘন রাশি $=c^3$। তাহা হইলে $c=x^2-y$;

এখন $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}=x+\sqrt{y}$ কে ঘন করিয়া এবং উভয় পক্ষের মূলদ অংশদ্বয়কে সমান ধরিয়া পাওয়া যায় $a=x^3+3xy$; ইহাতে y এর মান বসাইয়া পাওয়া যায়

$$x^3+3x(x^2-c)-a=0, \text{ বা } 4x^3-3cx-a=0\,;$$

ইহা হইতে পরখ দ্বারা x এর মান এবং পরে $y=x^2-c$ হইতে y এর মান পাওয়া যাইবে। সুতরাং a^2-b **পূর্ণঘন** না হইলে এই পদ্ধতি বিশেষ কার্যকরী হয় না।

বর্তমান ক্ষেত্রে, ধরা যাক্ $\sqrt[3]{(10+\sqrt{108})}=x+\sqrt{y}$, তাহা হইলে $\sqrt[3]{(10-\sqrt{108})}=x-\sqrt{y}$;

গুণ করিলে $\sqrt[3]{(100-108)}=x^2-y$, **অর্থাৎ** $-2=x^2-y$;

আবার $10=x^3+3xy=x^3+3x(x^2+2)$, বা $4x^3+6x-10=0$;

পরখ দ্বারা পাওয়া যায় $x=1$, সুতরাং $y=3$; অতএব নির্ণেয় ঘনমূল $=1+\sqrt{3}$.]

(*ii*) প্রদত্ত রাশির একটি ঘনমূল নির্ণয় কর : $7+5\sqrt{2}$; $18\sqrt{3}+14\sqrt{5}$.

[উঃ $\sqrt{2}+1$; $\sqrt{3}(1+\sqrt{\frac{5}{3}})$].

3. (*i*) যদি $x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ এবং $y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$x^2-xy+y^2=13$ এবং $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$ এর মানও নির্ণয় কর।

[$x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy$; $x+y=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}{2}$

$=\dfrac{2\{(\sqrt{3})^2+1\}}{2}=4$ এবং $xy=1$, ইত্যাদি।]

(*ii*) $x=\sqrt{\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)}$ হইলে প্রমাণ কর যে $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2=n(n-1)$.

4. (*i*) যদি $x=\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$bx^2-2ax+b=0.$$

[ইঙ্গিত : $x=\dfrac{\{\sqrt{(a+b)}+\sqrt{(a-b)}\}^2}{\{\sqrt{(a+b)}\}^2-\{\sqrt{(a-b)}\}^2}=\dfrac{a+b+a-b+2\sqrt{(a^2-b^2)}}{(a+b)-(a-b)}=\dfrac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$

বা $bx-a=\sqrt{a^2-b^2}$; এখন বর্গ করিয়া ও সরল করিয়া ঈপ্সিত ফল পাওয়া যাইবে।]

(*ii*) যদি $x=\dfrac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে $bx^2-ax+b=0$.

(iii) $x=\dfrac{\sqrt[3]{a+2b}+\sqrt[3]{a-2b}}{\sqrt[3]{a+2b}-\sqrt[3]{a-2b}}$ হইলে দেখাও যে $2bx^3-3ax^2+6bx-a=0$.

5. "$a+b+c=0$ হইলে $a^3+b^3+c^3=3abc$", এই সুপরিচিত অভেদের সাহায্যে কখনও কখনও খণ্ড ঘাতযুক্ত রাশি সম্বন্ধীয় প্রশ্নের সমাধান করা হয়। কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল :

(i) যদি $(x+y)^{\frac{1}{3}}+(y+z)^{\frac{1}{3}}+(z+x)^{\frac{1}{3}}=0$ হয়, তবে দেখাও যে $(x+y+z)^3=9(x^3+y^3+z^3)$.

[**সমাধান :** ধরা হইল $a=\sqrt[3]{(x+y)}$, $b=\sqrt[3]{(y+z)}$, $c=\sqrt[3]{(z+x)}$; যেহেতু $a+b+c=0$, সুতরাং, $a^3+b^3+c^3=3abc$,

অর্থাৎ $2(x+y+z)=3\sqrt[3]{\{(x+y)(y+z)(z+x)\}}$.

বা $8(x+y+z)^3=27(x+y)(y+z)(z+x)$;

উৎপাদকে বিশ্লেষণ সম্পর্কে এই গুরুত্বপূর্ণ অভেদটিও জানা আছে যে

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b) ;$$

$\therefore$ $8(x+y+z)^3=9.\{(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3\}$,

বা $(x+y+z)^3=9(x^3+y^3+z^3)$.]

(ii) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=0$ হইলে প্রমাণ কর যে $(x+y+z)^3=27xyz$.

(iii) যদি $\sqrt[3]{(1-x^3)}(y-z)+\sqrt[3]{(1-y^3)}(z-x)+\sqrt[3]{(1-z^3)}(x-y)=0$ হয়, তবে দেখাও যে $(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)=(1-xyz)^3$.

পরীক্ষামূলক প্রশ্নাবলী (TEST PAPERS)

(সময় : এক ঘণ্টা)

1. সরল কর :

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{12}-\sqrt{8})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{5+\sqrt{24}}};$$

$$\frac{4}{\sqrt{(8+4\sqrt{3})}}+\frac{3}{\sqrt{(7-2\sqrt{10})}}-\frac{1}{\sqrt{(11-2\sqrt{30})}}.$$

2. যদি $x=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $a(bx^3-3bx-a)=b^2$.

3. যদি $a\sqrt[3]{x^2y}+b\sqrt[3]{y^2z}+c\sqrt[3]{z^2x}=0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $a^3x^2y+b^3y^2z+c^3z^2x=3abcxyz$.

4. প্রমাণ কর যে

$$\{+\sqrt{a^2+2b\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-2b\sqrt{a^2-b^2}}\}^2=4b^2.$$

5. $x=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}-\sqrt[3]{\sqrt{a^2+b^3}-a}$ হইলে প্রমাণ কর যে, $x^3+3bx-2a$.

6. বর্গমূল নির্ণয় কর :

(i) $28-6\sqrt{3}$; (ii) $\sqrt[3]{4}\times\frac{1}{\sqrt[9]{8}}\times\sqrt[12]{16^{-1}}$;

(iii) $\frac{1}{2}(3x+1)-\sqrt{2x^2-x-6}$.

7. প্রমাণ কর যে $\dfrac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{12}-\sqrt{32}+\sqrt{50}}=\sqrt{3}$.

8. দেখাও যে $(8x^3\div 27a^{-3})^{\frac{2}{3}}\times(64x^3\div 27a^{-3})^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}$.

9. বর্গমূল নির্ণয় কর : $8+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}-2\sqrt{10}$.

10. প্রমাণ কর যে

$$\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=0.$$

11. প্রমাণ কর যে $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}=x+\sqrt{y}$ হইলে $\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}=x-\sqrt{y}$,

12. $x=7+4\sqrt{3}$ হইলে $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ এর মান নির্ণয় কর।

13. প্রমাণ কর যে $\sqrt[4]{97-56\sqrt{3}}=\pm(2-\sqrt{3})$.

14. প্রমাণ কর যে $+\sqrt{6+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}-\dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}=1$.

[উঃ 1. $\sqrt{6}-2$; 6. $\pm(3\sqrt{3}-1)$; ±1 ; $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}\right)$;
9. $\pm(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})$; 12. $2\sqrt{3}$.]

3

প্রগতি—সমান্তর ও গুণোত্তর
(PROGRESSIONS—ARITHMETIC & GEOMETRIC)

3·1. সূচনা

বর্তমান অধ্যায়ের আলোচ্য বিষয় হইল বিভিন্ন প্রকারের সংখ্যার অনুক্রম বা sequence of numbers. "সংখ্যার অনুক্রম" বলিতে শুধু যে কতিপয় সংখ্যার সংগ্রহ বা সেট বুঝায় তাহাই নহে—অনুক্রম কথাটির মধ্যে সংখ্যাগুলি যে ক্রমপর্যায়ানুসারে সজ্জিত এই বিশেষ ধারণাটি অন্তর্নিহিত আছে। অনুক্রমের সংখ্যাগুলির একটি প্রথম, একটি দ্বিতীয়, একটি তৃতীয়—এইভাবে সজ্জিত থাকে; অর্থাৎ প্রতিটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা 1, 2, 3, ⋯, n, ⋯এর সহিত অনুক্রমের এক একটি সংখ্যাকে যুক্ত বলিয়া ধরিতে হইবে। সংখ্যার অনুক্রমের নিয়মগত সংজ্ঞাটি এইভাবে ব্যক্ত করা যায় :—

মনে করি, কোন একটি বা একাধিক সূত্র অনুসারে যে কোন ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n এর সহিত একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা x_n যুক্ত করা যায়। তাহা হইলে 1, 2, 3, ⋯, n, ⋯ প্রভৃতি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার অনুরূপক্রমে সজ্জিত

$$\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$$

সংখ্যাগুলির সংগ্রহ বা সেটকে বলা হয় একটি **সংখ্যার অনুক্রম**। অনুক্রমের সংখ্যাগুলিকে উহার **পদ** (বা term) বলা হয় - যেমন, x_n হইল n-তম পদ।

যদি x_n সম্পর্কে n এর আকারে প্রকাশিত কোন সূত্র জানা থাকে তাহা হইলে সম্পূর্ণ অনুক্রমটি লেখা যায়—যথা, যদি $x_n=2n-1$ হয়, তাহা হইলে অনুক্রমটি হইল $\{1, 3, 5, 7, \cdots, 2n-1, \cdots\}$;

আবার যদি $x_n=2n$ হয়, তাহা হইলে অনুক্রমটিকে লেখা যায়

$$\{2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots\}।$$

এই অধ্যায়ে আমরা দুইটি বিশেষ ধরনের অনুক্রম সম্পর্কে বিশদ আলোচনা করিব—উহাদের একটি হইল **সমান্তর প্রগতি** বা Arithmetic Progression এবং অপরটি হইল **গুণোত্তর প্রগতি** বা Geometric Progression। অধ্যায়ের শেষাংশে **বিপরীত প্রগতি** বা Harmonic Progression নামে অভিহিত অপর একটি অনুক্রম সম্পর্কেও সংক্ষিপ্ত ধারণা দেওয়া হইবে।

3·2. সমান্তর প্রগতি

সংজ্ঞা : সমান্তর প্রগতি বা Arithmetic Progression (A.P.) হইল সংখ্যার এমন একটি অনুক্রম যাহার প্রথম পদের পরবর্তী প্রত্যেক পদ উহার ঠিক পূর্ববর্তী পদের সহিত একটি ধ্রুবক রাশি যোগ দ্বারা পাওয়া যায়। ধ্রুবক রাশিটিকে **সাধারণ অন্তর** বা Common Difference (C. D.) (সংক্ষেপে, **সা. অ.**) বলা হয়।

উদা. ঃ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots \cdots\}$ অনুক্রম একটি সমান্তর শ্রেণী ; ইহার দ্বিতীয় পদ = প্রথম পদ $+2$; তৃতীয় পদ = দ্বিতীয় পদ $+2$; চতুর্থ পদ = তৃতীয় পদ $+2$ ইত্যাদি। এখানে সাধারণ অন্তর (সা. অ.) হইল 2.

লক্ষণীয় যে, কোন সমান্তর প্রগতির যে কোন একটি পদকে উহার পরবর্তী পদ হইতে বিয়োগ করিলে বিয়োগফল প্রতিক্ষেত্রে একই হয় ; এই ধ্রুবক অন্তরফলই সাধারণ অন্তর—ইহা ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হইতে পারে।

সমান্তর প্রগতিতে আছে এইরূপ আরও কয়েকটি অনুক্রমের উদাহরণ নিচে দেওয়া হইল :

(i) $\{1, 5, 9, 13, 17, 21 \quad \cdots \quad \cdots$; সা. অ. $= 4\}$

(ii) $\{40, 36, 32, 28, 24, 20 \quad \cdots \quad \cdots$; সা. অ. $= -4\}$

(iii) $\{a, a+b, a+2b, a+3b \quad \cdots \quad \cdots$; সা. অ. $= b\}$

(iv) $a, a-b, a-2b, a-3b \quad \cdots \quad \cdots$; সা. অ. $= -b\}$

(v) $\{7, 5\frac{1}{2}, 4, 2\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} \quad \cdots \quad \cdots$; সা. অ. $= -1\frac{1}{2}\}$

(vi) $\{-1, -3, -5, -7, -9 \cdots \quad \cdots$; সা. অ. $= -2\}$

3·3. সমান্তর প্রগতির সূত্রাবলী

সূত্র 1. ধরা যাক্ কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর যথাক্রমে a এবং d ; তাহা হইলে ইহার n-তম পদটি $= a+(n-1)d$.

[সূত্রটির সত্যতা সহজেই যাচাই করা যায়, কারণ

দ্বিতীয় পদ = প্রথম পদ $+d = a+d$;

তৃতীয় পদ = দ্বিতীয় পদ $+d = (a+d)+d = a+2d$;

চতুর্থ পদ $= a+3d$

এবং আরও সাধারণভাবে n-তম পদ $= a+(n$ অপেক্ষা 1 কম$) \times d = a+(n-1)d$.]

টীকা : যদি প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর জানা থাকে তাহা হইলে প্রতিটি পদ তথা সমগ্র সমান্তর প্রগতিটিই নির্ধারিত বলিয়া গণ্য করা যাইবে।

উদা. 1. $\{3, 7, 11, 15, \cdots \cdots\}$ এই সমান্তর প্রগতিটির দশম পদটি কত ?

সমাধান : দশম পদ = প্রথম পদ $+(10-1) \times$ সাধারণ অন্তর $= 3+9\times 4 = 39$.

লক্ষ্য করা যায়, যে কোন পদকে উহার পরবর্তী পদ হইতে বিয়োগ করিয়া সা. অ. $=4$ পাওয়া যাইতেছে। এইভাবে দেখা যায় যে প্রগতিটি নিশ্চয়ই একটি সমান্তর প্রগতি বা A. P.।

সূত্র 1 হইতে নিম্নলিখিত প্রয়োজনীয় তথ্যটি সহজেই প্রমাণ করা যায় :—

নির্দিষ্ট সংখ্যক পদ লইয়া গঠিত একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম ও শেষ দিক হইতে সমদূরবর্তী যে কোন দুইটি পদের সমষ্টি ঐ প্রগতির প্রথম ও শেষ দুইটি পদের সমষ্টির সমান।

প্রমাণ : মনে করি, কোন সমান্তর প্রগতির প্রথম পদ a, সাধারণ অন্তর d, পদ সংখ্যা $=n$, এবং শেষ পদ (অর্থাৎ n-তম পদ) $=l$. শেষ পদের ঠিক পূর্বের পদটি হইবে $l-d$ এবং তার ঠিক পূর্বের পদটি $l-2d$, ইত্যাদি।

এক্ষণে প্রথম দিক হইতে গণনা করিলে r-তম পদ $=a+(r-1)d$ (সূত্র 1)

কিন্তু শেষ দিক হইতে গণনা করিলে r-তম পদ হইবে $=l-(r-1)d$

$\therefore$ এই দুইটি পদের সমষ্টি $=a+l=$ প্রথম পদ $+$ শেষ পদ

অর্থাৎ প্রথম ও শেষ দিক হইতে সমদূরবর্তী দুইটি পদের সমষ্টির মান সর্বদাই একটি ধ্রুবক $(=a+l)$।

সূত্র 2. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d হইলে উহার n সংখ্যক পদের সমষ্টি (S) নির্ণয় করিতে নিম্নলিখিত সূত্রগুলির যে কোন একটি ব্যবহার করা যায় :

$S=\frac{1}{2}$\{ পদের সংখ্যা \}\{ প্রথম পদ $+$ শেষ পদ \}

বা, $S=\frac{1}{2}n(a+l)$, যেখানে $l=$ শেষ পদ বা n-তম পদ

বা, $S=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$

প্রমাণ : ধরা যাক $S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত

অর্থাৎ $S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-d)+l$,

[$l=n$তম পদ]

[যদি $l=n$-তম পদ $=a+(n-1)d$, তবে উহার ঠিক পূর্ববর্তী পদটি $l-d$ এবং শেষ দিক হইতে তৃতীয় পদটি $=l-2d$ ইত্যাদি।]

S এর পদগুলিকে বিপরীতক্রমে লিখিয়া (সসীম সংখ্যক পদের ক্ষেত্রে ইহা যুক্তিসম্মত বলিয়া) পাওয়া যায়—

$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots\cdots+(a+d)+a$

যোগ করিয়া, $2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)$ \{এইরূপ n-সংখ্যক পদ\}

$=n(a+l)$

$\therefore\ S=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{n}{2}\{a+a+(n-1)d\}$, $l=a+(n-1)d$ বসাইয়া

$=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

স্মরণ রাখিতে হইবে : সমান্তর শ্রেণীর যে কোন সংখ্যক পদের সমষ্টি = পদ সংখ্যা এবং প্রথম ও শেষ পদের সমষ্টির গুণফলের অর্ধেক।

উদা. 2. $1+2+3+\cdots\cdots+100=100\times(1+100)\times\frac{1}{2}=5050$.

উদা. 3. \{3, 7, 11, ⋯ ⋯\} এই সমান্তর শ্রেণীর প্রথম 6টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে প্রথম পদ $a=3$, সাধারণ অন্তর $d=4$, পদের সংখ্যা $n=6$

$\therefore\ S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=\frac{6}{2}\{2.3+(6-1).4\}=3.26=\mathbf{78}$.

অন্য প্রকারে, $\because$ শেষ পদ l অর্থাৎ ষষ্ঠ পদ $=a+5d=3+5\times4=23$

$$\therefore\ S=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{6}{2}(3+23)=\mathbf{78}.$$

উদা. 4. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 5, শেষ পদ 45 এবং কতিপয় পদের সমষ্টি 400 ; পদের সংখ্যা ও সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরা যাক্ পদের সংখ্যা n ; তাহা হইলে $S=\frac{n}{2}(a+l)$ বলিয়া $400=\frac{n}{2}(5+45)$ অর্থাৎ $n=\mathbf{16}$.

সাধারণ অন্তর d হইলে, $45=5+(16-1)d$ অর্থাৎ $d=\frac{40}{15}=2\frac{2}{3}$.

কোন সমান্তর শ্রেণীর যে কোন দুইটি পদ দেওয়া থাকিলে শ্রেণীটি সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা যায় :

উদা. 5. কোন সমান্তর শ্রেণীর 61তম ও অষ্টম পদ দুইটি যথাক্রমে 182 এবং 23 হইলে শ্রেণীটির প্রথম চারিটি পদ এবং 28-তম পদ নির্ণয় কর।

সমাধান : 61-তম পদ $=a+60d=182$
এবং অষ্টম পদ $=a+7d=23$ } যেখানে $a=$ প্রথম পদ, $d=$ সাধারণ অন্তর

সমাধান করিয়া পাওয়া যায় $d=3,\ a=2$

সুতরাং সমান্তর শ্রেণীটি $\{2, 5, 8, 11\cdots\cdots\}$

এবং ইহার 28-তম পদ $=2+27\times3=\mathbf{83}$.

3·4. সমান্তর মধ্যক (Arithmetic mean)

সংজ্ঞা : তিনটি রাশি সমান্তর প্রগতিতে থাকিলে মধ্যরাশিটিকে অপর দুইটির **সমান্তর মধ্যক** বলা হয়। যথা : $\{7, 9, 11\}$ এই সমান্তর প্রগতিতে 9 হইল 7 এবং 11 এর সমান্তর মধ্যক।

লক্ষ্য করা যাইতে পারে, $a-d, a, a+d$ সমান্তর প্রগতি এবং তাহা হইলে এখানে a কে বলা হইবে $(a-d)$ এবং $(a+d)$ এর সমান্তর মধ্যক।

মনে করা যাক্, তিনটি রাশি a, b, c সমান্তর প্রগতিতে আছে, তাহা হইলে $b-a=c-b$ (=সা. অ.)।

সুতরাং $2b=a+c$ বা $b=\dfrac{a+c}{2}$.

স্মরণ রাখিতে হইবে : যে কোন দুইটি প্রদত্ত রাশির সমান্তর মধ্যক উহাদের সমষ্টির অর্ধেক। মধ্যক শব্দটি আরও ব্যাপকতর অর্থে ব্যবহৃত হয় :

সংজ্ঞা : কোন প্রগতির যে কোন দুইটি প্রদত্ত পদের মধ্যবর্তী পদগুলিকে ঐ পদ দুইটির **মধ্যক** বলা হয়।

যেমন, $\{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ এই সমান্তর প্রগতিটি বিবেচনা করিলে দেখা যায়, 3 এবং 13 এর মধ্যে চারিটি সমান্তর মধ্যক আছে, যথা : 5, 7, 9 এবং 11.

উদা. 1. 4 এবং 67 এর মধ্যে 4টি সমান্তর মধ্যক বসাও।

সমাধান : 4 এবং 67 এর মধ্যে 4টি পদ a, b, c, d বসান যাক্, যাহাতে 4, a, b, c, d, 64 সমান্তর প্রগতিতে থাকে। ধরা যাক্, সাধারণ অন্তরটি p, তাহা হইলে

ষষ্ঠ পদ $= 64 = 4 + 5p$, অর্থাৎ $p = 12$.

∴ দ্বিতীয় পদ $= a = 4 + 12 = 16$; তৃতীয় পদ $= b = 16 + 12 = 28$;

চতুর্থ পদ $= c = 28 + 12 = 40$; পঞ্চম পদ $= d = 40 + 12 = 52$.

∴ নির্ণেয় চারিটি সমান্তর মধ্যক হইল : **16, 28, 40 এবং 52.**

উদা. 2. দুইটি প্রদত্ত রাশি a ও b এর মধ্যে nটি সমান্তর মধ্যক বসাও।

সমাধান : a এবং b এর মধ্যে nটি সমান্তর মধ্যক বসাইলে এমন একটি সমান্তর প্রগতি পাওয়া যাইবে যাহার প্রথম পদ a, এবং $(n+2)$-তম পদ b ; সমান্তর প্রগতিটির সাধারণ অন্তর, ধরা যাক্ d ; তাহা হইলে,

$$b = (n+2)\text{-তম পদ} = a + (n+1)d, \text{ অর্থাৎ } d = \frac{b-a}{n+1}.$$

সুতরাং নির্ণেয় মধ্যকগুলি হইল

$$a + \frac{b-a}{n+1}, a + \frac{2(b-a)}{n+1}, \cdots \cdots, a + \frac{n(b-a)}{n+1}.$$

প্রশ্নমালা III (A)

[A]

1. অনুক্রমের n-তম পদ x_n যথাক্রমে

(i) $2n+3$; (ii) n^2+32 ; (iii) n^3-3n ; (iv) 4^n ; (v) $5/2^n$ হইলে প্রতিক্ষেত্রে উহার প্রথম ছয়টি পদ নির্ণয় কর। [উঃ প্রদত্ত হইল না।]

2. (a) নিম্নলিখিত সমান্তর প্রগতিগুলির প্রত্যেকটির পরবর্তী পদ দুইটি এবং n-তম পদটি নির্ণয় কর :

(i) 1, 7, 13, 19, ⋯ ⋯ (ii) $a, a+d, a+2d, a+3d, \cdots \cdots$

(ii) $-9, -6, -3, \cdots \cdots$ (iv) $3, \frac{7}{3}, 1\frac{2}{3}, \cdots \cdots$

(b) নিম্নলিখিত সমান্তর প্রগতিগুলির প্রতিটি ক্ষেত্রে শেষ পদটি **কততম** পদ, তাহা বল :

(i) 2, 4, 6,⋯ ⋯,34. (ii) $-1, -3, -5, -7, \cdots \cdots, -39$.

(iii) 100, 84, 68, ⋯ ⋯, -108. (iv) 7, 10, 13, ⋯ ⋯, 640

[উঃ প্রদত্ত হইল না]

3. (i) 667 কি 11, 18, 25, 32,⋯ ⋯এই সমান্তর প্রগতির একটি পদ ? যুক্তি দেখাও। [উঃ না]

(*ii*) প্রমাণ কর, যে কোন সমান্তর প্রগতির তৃতীয় এবং 19-তম পদ দুইটির সমষ্টি নবম এবং 13-তম পদ দুইটির সমষ্টির সমান।

(*iii*) যে সমান্তর প্রগতির পঞ্চম পদ 34 এবং 15-তম পদ 9, তাহার সাধারণ অন্তর এবং pতম পদ নির্ণয় কর।

(*iv*) 60 এবং 360 এর মধ্যে কতগুলি অযুগ্ম সংখ্যা আছে? [উঃ 150]

[ইঙ্গিত: (i) সম্ভব হইলে, ধরা যাক্ 667 সমান্তর প্রগতিটির nতম পদ। $\therefore 667=11+(n-1)7$ দেখা যাইবে, কোন ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না। সুতরাং ……]

(iv) প্রথম অখণ্ড সংখ্যা=61, দ্বিতীয়টি 63,… শেষ অখণ্ড সংখ্যাটি 359; ইহারা একটি সমান্তর প্রগতিতে আছে, যাহার প্রথম পদ 61 এবং সাধারণ অন্তর 2; যদি 359, n-তম পদ হয়, তবে $359=61+(n-1)2$, অর্থাৎ $n=150$; সুতরাং 60 এবং 360 এর মধ্যে 150টি অযুগ্ম সংখ্যা বর্তমান।]

4. (*i*) 33 এবং 333 এর মধ্যে কতগুলি 7-এর গুণিতক আছে? [উঃ 43]

(*ii*) 100 এবং 950 এর মধ্যে কতগুলি 12 এর গুণিতক আছে? [উঃ 71]

(*iii*) দেখাও যে $(p^2-2pq-q^2)^2$, $(p^2+q^2)^2$, $(p^2+2pq-q^2)^2$ সমান্তর প্রগতিতে আছে।

(*iv*) 40 এবং 400 এর মধ্যবর্তী কতগুলি সংখ্যা 28 দ্বারা বিভাজ্য? [উঃ 13]

5. নিম্নলিখিত সমান্তর প্রগতিগুলির '—' চিহ্নিত শূন্যস্থানগুলি পূরণ কর:

(*i*) 78,—,—, 180, … …

(*ii*) 17,—, —, —, 11,… …

(*iii*) 34,—, —, —, —, 48, … … [উঃ প্রদত্ত হইল না]

6. নিম্নলিখিত সমান্তর প্রগতিগুলির মধ্যবর্তী পদ (বা পদগুলি) নির্ণয় কর:

(*i*) 1, 9, 17,… …, 321. [উঃ 161]

(*ii*) 20, 16, 12, …, −176 উঃ −76, −80]

(*iii*) 3, 6, 9, … …, 120 [উঃ 60, 63]

(*iv*) 3, 7, 11, … …, 147 [উঃ 75]

[ইঙ্গিত: পদের সংখ্যা n অযুগ্ম হইলে একটিমাত্র মধ্যম পদ হইবে এবং উহা $\frac{n+1}{2}$-তম পদ, n যুগ্ম হইলে মধ্যম পদ দুইটি হইবে এবং উহারা $\frac{n}{2}$-তম এবং $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-তম পদ।]

[B]

1. সরাসরি সূত্র প্রয়োগ না করিয়া নিম্নলিখিত সমান্তর প্রগতিগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর:

[প্রগতির পদগুলি বিপরীতক্রমে লিখিয়া সমষ্টি নির্ণয়ের পদ্ধতি অবলম্বন কর।]

(*i*) $1+3+5+\cdots\cdots+19.$ (*ii*) $7+11+15+\cdots\cdots+103.$

(*ii*) $7+5\frac{1}{2}+4+\cdots\cdots+(-24\frac{1}{2}).$ (*iv*) $2+5+8+\cdots\cdots+47.$

[উঃ (i) 100. (ii) 1375. (iii) $-192\frac{1}{2}$. (iv) 392.]

2. বিধিসম্মত সূত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত সমান্তর প্রগতিগুলির সমষ্টিগুলি লিখ :

(i) $3+4{\cdot}2+5{\cdot}4+\cdots\cdots\cdots$20-তম পদ পর্যন্ত।

(ii) $-4-6{\cdot}7-9{\cdot}4-\cdots\cdots$13-তম পদ পর্যন্ত।

(iii) $(a)+(a+b)+(a+2b)+\cdots\cdots+(a+3rb)$.

(iv) $b+c+(2c-b)+\cdots\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত।

[উঃ (i) 288. (ii) $-262{\cdot}6$. (iii) $\frac{1}{2}(3r+1)(2a+3rb)$. (iv) $\frac{1}{2}n[(n-1\ c-(n-3)b.]$

3. নিম্নলিখিত সমান্তর প্রগতির যোগফল নির্ণয় কর :

(i) $\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}, \frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n},\cdots\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত।

(ii) $\sqrt{7}+\sqrt{7}\,(1+\sqrt{7})+\sqrt{7}(1+2\sqrt{7})+\cdots\cdots+\sqrt{7}(1+24\sqrt{7})$.

(iii) $(a-b)^2, a^2+b^2, (a+b)^2, \cdots\cdots,(a^2+b^2+20ab)$.

[উঃ (i) $\frac{1}{2}(3n-3)$; (ii) $2100+25\sqrt{7}$. (iii) $12(a^2+b^2+9ab)$].

4. (i) কোন সমান্তর প্রগতির পঞ্চম পদ 16 এবং 13-তম পদটি 30 ; প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর ; প্রথম 20টি পদের সমষ্টিও নির্ণয় কর।

[উঃ 9, $\frac{7}{4}$, $512\frac{1}{2}$]

(ii) 100 এবং 400 এর মধ্যে অবস্থিত 7 এর গুণিতকগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর।

[ইঙ্গিত : (ii) $7\ \underline{|\ 100}$ / $14-2$; $100+(7-2)=105$. $7\ \underline{|\ 400}$ / $57-1$; $400-1=399$.

100 এবং 400 এর মধ্যে অবস্থিত এবং 7 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যাগুলির প্রথম ও শেষ দুইটি হইল যথাক্রমে 105 এবং 399 ; এই সংখ্যাগুলি একটি সমান্তর প্রগতিতে আছে যাহার প্রথম পদ 105, শেষ পদ 399 এবং সাধারণ অন্তর 7 ; পদের সংখ্যা n হইলে $399=105+(n-1)\,7$, সুতরাং $n=43$; $\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $=\frac{1}{2}.\,43\,(105+399)=10{,}836$.]

(iii) 1, 2, 3,⋯প্রভৃতি স্বাভাবিক সংখ্যাগুলির মধ্যে সেইগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর যেগুলি 200 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং

(a) 3 দ্বারা সম্পূর্ণ বিভাজ্য ;

(b) 7 দ্বারা সম্পূর্ণ বিভাজ্য ;

(c) 3 এবং 7 দ্বারা সম্পূর্ণ বিভাজ্য ;

(d) 3 দ্বারা অথবা 7 দ্বারা সম্পূর্ণ বিভাজ্য। [উঃ 6633 ; 2842 ; 945 ; 8530]

5. (i) 5, 8, 11, 14 ⋯ ⋯ এই সমান্তর প্রগতির কতগুলি পদ লইলে উহাদের সমষ্টি 1105 হইবে ? [উঃ 26]

(ii) { 23, 25, 27, 29, ⋯ ⋯ } এবং { 1, 4, 7, 10, ⋯ ⋯ } এই সমান্তর প্রগতি দুইটির n-সংখ্যক পদের সমষ্টি দুইটি সমান ; n এর মান নির্ণয় কর।

[উঃ 45]

6. (i) কোন অনুক্রমের n-সংখ্যক পদের সমষ্টি $3n^2+5n$; ইহার n-তম পদটি নির্ণয় কর। প্রমাণ কর যে এই অনুক্রমের পদগুলি একটি সমান্তর প্রগতি গঠন করে।

(ii) কোন সমান্তর প্রগতির n-সংখ্যক পদের সমষ্টি m এবং m-সংখ্যক পদের সমষ্টি n হইলে প্রমাণ কর যে $(m+n)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $-(m+n)$.

[ইঙ্গিত ঃ (i) $S_n = n$-সংখ্যক পদের সমষ্টি $= 3n^2 + 5n$, $\therefore S_{n-1} = 3(n-1)^2 + 5(n-1)$; এখন n-তম পদ $= S_n - S_{n-1} = 6n + 2$; প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়,……পদগুলি 8, 14, 20, ⋯ সুতরাং অনুক্রমটি একটি সমান্তর প্রগতি, যাহার সা. অ. $= 6$.]

(ii) $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} = m$ এবং $S_m = \frac{m}{2}\{2a + (m-1)d\} = n$, ইহা হইতে a এবং d নির্ণয় করা যাইবে, সুতরাং $S_{m+n} = \frac{m+n}{2}\{2a + (m+n-1)d\} = \cdots$

[C]

1. (*i*) $\frac{1}{4}$ এবং $-9\frac{3}{4}$ এর মধ্যে 19টি সমান্তর মধ্যক বসাও।

(*ii*) $-35a$ এবং $3a$ এর মধ্যে 18টি সমান্তর মধ্যক বসাও।

(*iii*) p^2 এবং 1 এর মধ্যে pটি সমান্তর মধ্যক বসাও।

[উঃ (i) $-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \cdots, -9\frac{1}{4}$. (ii) $-33a, -31a, \cdots, a$. (iii) $p^2 - p + 1, p^2 - 2p + 2, \cdots\cdots, p$.]

2. (*i*) দুইটি সংখ্যার সমষ্টি $\frac{13}{6}$ এবং উহাদের মধ্যে এমন যুগ্মসংখ্যক সমান্তর মধ্যক বসান হইল যাহাদের সমষ্টি মধ্যকগুলির সংখ্যা অপেক্ষা 1 বেশী; মধ্যকগুলির সংখ্যা কত ?

[ইঙ্গিত ঃ ধরা যাক সংখ্যা দুইটি a ও b এবং উহাদের মধ্যে $2k$ সংখ্যক সমান্তর মধ্যক বসান হইল, যেখানে $a + b = 2\frac{1}{6}$; তাহা হইলে যে সমান্তর প্রগতিটির প্রথম পদ a, তাহার $(2k+2)$-তম পদটি b; সাধারণ অন্তর d ধরিলে $b = a + (2k+1)d$. এখন সমান্তর মধ্যকগুলির সমষ্টি $= (a+d) + (a+2d) + \cdots 2k$-তম পদ পর্যন্ত $= \frac{1}{2}.2k\{2(a+d) + (2k-1)d\} = k\{2a + (2k+1)d\} = k(a+b) = k.\frac{13}{6}$ দেওয়া আছে, এই সমষ্টি $2k$ অপেক্ষা 1 বেশী, সুতরাং $\frac{13k}{6} - 2k = 1$ বা $k = 6$. $\therefore$ নির্ণেয় মধ্যকের সংখ্যা $= 2k = 12$.]

(*ii*) 1 এবং 36 এর মধ্যে এমন সংখ্যক সমান্তর মধ্যক বসাও যেন প্রাপ্ত সমান্তর প্রগতিটির পদগুলির সমষ্টি 148 হয়। [উঃ 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36]

(*iii*) প্রমাণ কর যে, যে কোন দুইটি সংখ্যার মধ্যবর্তী x-সংখ্যক সমান্তর মধ্যকের সমষ্টি ও y-সংখ্যক সমান্তর মধ্যকের সমষ্টির অনুপাত $x : y$.

3. কোন সমান্তর প্রগতির p-তম পদ a এবং qতম পদ b ; দেখাও যে উহার প্রথম $(p+q)$ পদের সমষ্টি $\frac{1}{2}(p+q)\left\{a + b + \frac{a-b}{p-q}\right\}$.

4. (*i*) কোন সমান্তর প্রগতির p-তম, q-তম, r-তম পদ যথাক্রমে a, b, c হইলে প্রমাণ কর যে $a(q-r) + b(r-p) + c(p-q) = 0$.

(*ii*) কোন সমান্তর প্রগতির p, q এবং r সংখ্যক পদের সমষ্টি যথাক্রমে a, b, c হইলে প্রমাণ কর যে

$$\frac{a}{p}(q-r) + \frac{b}{q}(r-p) + \frac{c}{r}(p-q) = 0.$$

5. (*i*) তিনটি সমান্তর প্রগতির প্রত্যেকটির প্রথম পদ 1 এবং উহাদের সাধারণ অন্তর যথাক্রমে 1, 2, 3 ; উহাদের n-সংখ্যক পদের সমষ্টি যথাক্রমে S_1, S_2, S_3 হইলে প্রমাণ কর যে $\frac{1}{2}(S_1 + S_3) = S_2$.

(*ii*) কোন সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য সমান্তর প্রগতিতে থাকিলে দেখাও যে তাহাদের অনুপাত 3 : 4 : 5.

প্রশ্নমালা III (B)

[প্রয়োগমূলক প্রশ্নাবলী]

1. একটি শ্রেণীর ছাত্রদের বয়স সমান্তর প্রগতিতে আছে এবং প্রগতিটির সাধারণ অন্তর 3 মাস। কনিষ্ঠ ছাত্রটির বয়স ঠিক 7 বৎসর এবং ঐ শ্রেণীর ছাত্রদের মোট বয়স 153 বৎসর হইলে, ছাত্রদের সংখ্যা নির্ণয় কর। [উঃ 17]

[ইঙ্গিত : $a=7$, $d=\frac{1}{4}$, $S_n=153$; n নির্ণয় করিতে হইবে।]

2. স্থির অবস্থা হইতে একটি পতনশীল বস্তু প্রথম সেকেণ্ডে 16 ফুট, দ্বিতীয় সেকেণ্ডে 48 ফুট, তৃতীয় সেকেণ্ডে 80 ফুট, চতুর্থ সেকেণ্ডে 112 ফুট, এইভাবে পড়িতেছে, অর্থাৎ অতিক্রান্ত দূরত্বগুলি সমান্তর প্রগতিতে আছে। বস্তুটি (*i*) দশম সেকেণ্ডে এবং (*ii*) 19-তম সেকেণ্ডে কত কত দূরত্ব অতিক্রম করিবে? (*iii*) কততম সেকেণ্ডে উহা 368 ফুট পড়িবে?

(*iv*) প্রথম 15 সেকেণ্ডে এবং (*v*) 20-তম সেকেণ্ড এবং 38-তম সেকেণ্ডের মধ্যবর্তী সময়ে উহা কত কত দূরত্ব অতিক্রম করিবে?

[উঃ (i) 304 ফুঃ. (ii) 592 ফুঃ. (iii) 12-তম সেঃ. (iv) 3600 ফুঃ. (v) 16704 ফুঃ.]

3. কোন ব্যক্তিকে দুইটি চাকুরির সুযোগ দেওয়া হইল। প্রথমটিতে প্রারম্ভিক বেতন 1200 টাকা এবং বাৎসরিক বেতন বৃদ্ধির হার 80 টাকা ; দ্বিতীয়টিতে উহারা যথাক্রমে 850 টাকা এবং 120 টাকা। যেটিতে প্রথম 16 বৎসরে মোট টাকার পরিমাণ সর্বাপেক্ষা বেশী হইবে সেই চাকুরিটি ঐ ব্যক্তি গ্রহণ করিলেন। তিনি কোন্ চাকুরিটি গ্রহণ করিলেন? [উঃ প্রথমটি]

4. এক ব্যক্তির প্রারম্ভিক আয় 125 টাকা এবং বাৎসরিক আয়বৃদ্ধি 10 টাকা। যদি সে আয়ের 6% সঞ্চয় করে, তবে (i) প্রথম পাঁচ বৎসরে এবং (*ii*) প্রথম 20 বৎসরে সে যথাক্রমে কত টাকা সঞ্চয় করিবে? [উঃ (i) 43·50 টাকা। (ii) 264 টাকা।]

5. বাৎসরিক 25 টাকা হারে বৃদ্ধি পাইয়া এক ব্যক্তির বেতন 400 টাকায় আরম্ভ হইয়া সর্বোচ্চ 700 টাকায় পৌছাইল। (*i*) চাকুরির প্রথম 10 বৎসরে এবং (*ii*) চাকুরির প্রথম 20 বৎসরে ঐ ব্যক্তি মোট কত কত টাকা যথাক্রমে উপায় করিলেন? [উঃ (i) টা. 5125 ; (ii) টা. 12,050]

6. এক ব্যক্তি বিনা সুদে বন্ধুকে 1000 টাকা ধার দিলেন এবং মাসিক কিস্তিতে উহা ফেরৎ লইতে স্বীকৃত হইলেন। ধার দেওয়ার এক মাস পরে প্রথম প্রাপ্ত কিস্তি যদি 64 টাকা হয় এবং কিস্তিগুলি যদি প্রতি মাসে 2 টাকা করিয়া হ্রাস পায়, তবে কত মাসে ঐ ধার শোধ হইবে? [উঃ 25]

[ইঙ্গিত : $64+62+60+\cdots n$-সংখ্যক মাস পর্যন্ত$=1000$; ইহা হইতে পাওয়া যায় $(n-25)(n-40)=0$ $\therefore$ n এর দুইটি মান, যথা 25 এবং 40 পাওয়া যায়। সুতরাং নির্ণেয় মাসের সংখ্যা$=25$; কারণ 34-তম কিস্তি হইতে পরবর্তী কিস্তিগুলি ঋণাত্মক হইবে (এই বাস্তব ক্ষেত্রে যাহার কোন অর্থ নাই), ফলতঃ $n=40$ গ্রহণযোগ্য নহে।]

7. এক ব্যক্তি 40টি বাৎসরিক কিস্তিতে 3600 টাকার ঋণ পরিশোধের ব্যবস্থা করিলেন ; কিস্তিগুলি সমান্তর প্রগতিতে আছে। যখন 30টি কিস্তি দেওয়া হইল তখন ঋণের এক-তৃতীয়াংশ বাকী রাখিয়া ঐ ব্যক্তি মারা গেলেন ; প্রথম কিস্তির মান নির্ণয় কর। [উঃ 51 টাকা]

8. প্রথম দিনের সঞ্চয় 1 পয়সা, দ্বিতীয় দিনের 2 পয়সা, পরবর্তী দিনের 3 পয়সা, এইভাবে যদি সঞ্চয় করা হয় তবে 365 দিনে কত সঞ্চয় হইবে ? [উঃ 667·95 টাকা]

9. এক ব্যক্তির মাসিক বেতনের হারের বাৎসরিক বৃদ্ধিগুলি সমান্তর প্রগতিতে ছিল। জানা যায়, তিনি তাঁহার চাকুরির একাদশ বৎসরে মাসিক 200 টাকা এবং 29তম বৎসরে 380 টাকা করিয়া পাইতেছিলেন। তাঁহার প্রারম্ভিক বেতন এবং বাৎসরিক বেতন বৃদ্ধির হার নির্ণয় কর। 35 বৎসরের চাকুরি সম্পূর্ণ করিবার ঠিক পরে অবসর গ্রহণকালে তাঁহার বেতন কত ছিল ? [উঃ 100 টা. ; 10 টা ; 450 টা.]

10. এক কোষাধ্যক্ষকে 4500 টাকার এক টাকার নোট গণনা করিতে হইবে। তিনি প্রথমে প্রতি মিনিটে 150 টাকা করিয়া 10 মিনিট কাল গণনা করিলেন। ইহার পর তিনি প্রতি মিনিটে, পূর্ববর্তী মিনিটে যত টাকা গণনা করিয়াছেন তাহা অপেক্ষা 2 টাকা কম করিয়া গণনা করিতে লাগিলেন। ঐ নগদ 4500 টাকা গণনা করিতে তাঁহার কত সময় লাগিবে ? [উঃ 34 মিনিট]

11. এক ব্যক্তি প্রতি বৎসর জানুয়ারী মাসের প্রথম তারিখে জাতীয় সঞ্চয় সার্টিফিকেট ক্রয় করেন, যাহার মূল্য পূর্ববর্তী বৎসরের সার্টিফিকেটের মূল্য অপেক্ষা 100 টাকা বেশী। 10 বৎসর পরে তিনি দেখিলেন, তাঁহার ক্রীত সার্টিফিকেটের মোট মূল্য 5000 টাকা। (*i*) প্রথম বৎসরে এবং (*ii*) অষ্টম বৎসরে ক্রীত সার্টিফিকেটের মূল্য নির্ণয় কর। [উঃ 50 টাকা ; 750 টাকা]

12. একটি নলকূপ বসাইবার খরচ প্রথম 100 মিটারের জন্য প্রতি মিটারে 1 টাকা 50 পয়সা এবং পরবর্তী প্রত্যেক মিটারের জন্য **অতিরিক্ত** 6 পয়সা। 249 মিটার গভীর একটি নলকূপ বসাইতে উহার শেষ মিটারের জন্য কত খরচ পড়িবে এবং নলকূপটি বসাইতে মোট খরচই বা কত পড়িবে তাহা নির্ণয় কর। [উঃ 10·44 টা. ; 1044 টা.]

13. A একটি বিদ্যালয়ে প্রতি বৎসর নিয়মিত চাঁদা দিয়া থাকেন। চাঁদার পরিমাণ প্রতি বৎসরই একটি নির্দিষ্ট পরিমাণে বৃদ্ধি পায়। যদি পঞ্চম এবং নবম বৎসরে তিনি যথাক্রমে 425 টাকা এবং 825 টাকা চাঁদা দিয়া থাকেন, তবে তৃতীয় বৎসর হইতে দ্বাদশ বৎসর পর্যন্ত তিনি মোট কত টাকা চাঁদা দিয়াছেন ? [উঃ 6750 টা.]

14. একটি আলুদৌড় প্রতিযোগিতায় এক সরলরেখা বরাবর 8টি আলুকে পরস্পর হইতে 6 মিটার দূরে দূরে রাখা হইল। একই সরলরেখায় রক্ষিত একটি ঝুড়ি হইতে প্রথম আলুটির দূরত্বও 6 মিটার। একজন প্রতিযোগী ঝুড়িটির নিকট হইতে যাত্রা করিয়া এক একবারে একটি করিয়া আলু ঐ ঝুড়িতে রাখিতে লাগিল। দৌড় শেষ করিতে তাহাকে মোট কত দূরত্ব যাইতে হইবে, তাহা নির্ণয় কর।

[**ইঙ্গিত :** এখানে $a=2.6$, $l=2(6.8)=96$; $S=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{8}{2}(12+96)=432$মিটার।]

3·5. গুণোত্তর প্রগতি (Geometric Progression)

সংজ্ঞা : কোন সংখ্যার অনুক্রমে (sequence of numbers) প্রথম পদের পরবর্তী যে কোন একটি পদকে, যদি উহার ঠিক পূর্ববর্তী পদকে একটি ধ্রুবক সংখ্যার (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) দ্বারা গুণ করিয়া পাওয়া যায়, তবে ঐ অনুক্রম গুণোত্তর প্রগতিতে (G. P.) আছে বলা হয়। প্রকারান্তরে বলা যায়, অনুক্রমটির যে কোন একটি পদ ও উহার ঠিক পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সর্বদা ধ্রুবক। এই ধ্রুবক রাশিটিকে গুণোত্তর প্রগতিটির **সাধারণ অনুপাত (Common ratio)** বলা হয়।

উদা. : { 2, 4, 8, 16, ⋯ ⋯ } একটি গুণোত্তর প্রগতি, কারণ ইহার প্রথম পদটির পরবর্তী প্রত্যেক পদকে পাওয়া যায়, উহার ঠিক পূর্ববর্তী পদকে ধ্রুবক সংখ্যা 2 দ্বারা গুণ করিয়া ; যথা, দ্বিতীয় পদ = প্রথম পদ × 2 ; তৃতীয় পদ = দ্বিতীয় পদ × 2 ; ইত্যাদি।

লক্ষ্য করা যায়, যে কোন একটি পদ ও উহার ঠিক পূর্ববর্তী পদের অনুপাত = 2 = ধ্রুবক ; এখানে 2 হইল **সাধারণ অনুপাত**।

স্মরণ রাখিতে হইবে : গুণোত্তর প্রগতির যে কোন একটি পদকে উহার ঠিক পূর্ববর্তী পদ দ্বারা ভাগ করিয়া উহার **সাধারণ অনুপাত** (C. R.) নির্ণয় করিতে হয়।

গুণোত্তর প্রগতি সংক্রান্ত উদাহরণ :

(i) $\{1, 3, 9, 27, \cdots \cdots\}$; সাধারণ অনুপাত = 3.

(ii) $\{4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \cdots \cdots\}$; সা. অনু: $= -\frac{1}{2}$

(iii) $\{a, a^3, a^5, a^7, \cdots \cdots\}$; সা. অনু: $= a^2$

(iv) $\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \cdots \cdots\}$; সা. অনু: $= -\frac{1}{2}$

3·6. গুণোত্তর প্রগতি বিষয়ক সূত্রাবলী

I. কোন গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হইলে উহার যে কোন পদ (যথা n-তম পদ) নির্ণয় :

স্পষ্টত : দ্বিতীয় পদ $= a.r$

তৃতীয় পদ $= ar^2$

... ...

n-তম পদ $= a.r^{n-1}$

সুতরাং

গুণোত্তর প্রগতির যে কোন পদ = উহার প্রথম পদ × (সাধারণ অনুপাত)$^{\text{পদটির ক্রমসংখ্যা} - 1}$

টীকা : প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত জানা থাকিলে গুণোত্তর প্রগতিটি সম্পূর্ণভাবে নির্ণয় করা যায়।

উদা. { 3, 12, 48, ⋯ ⋯ 3072 } এই গুণোত্তর প্রগতির পঞ্চম পদ নির্ণয় কর। ইহার কততম পদ 3072 ?

সমাধান : পঞ্চম পদ $= 3 \times 4^{5-1}$ (এখানে প্রথম পদ $a = 3$, সা. অনু. $r = 4$)
$= 768.$

ধরা যাক্ 3072 প্রগতিটির p-তম পদ। তাহা হইলে $3\times4^{p-1}=3072$,
বা $4^{p-1}=1024=4^5$, বা $p-1=5$, বা $p=6$
অর্থাৎ 3072 হইল 6-তম পদ।

II. গুণোত্তর প্রগতির যে কোন দুইটি পদ দেওয়া হইলে প্রগতিটি সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা যায়।

নিম্নপ্রদত্ত উদাহরণটি দিয়া শুরু করা যাক :

উদা. : কোন গুণোত্তর প্রগতির তৃতীয় পদ 18 এবং দশম পদ 39366 হইলে প্রগতিটির প্রথম পাঁচটি পদ লিখ।

সমাধান : a প্রথম পদ এবং r সাধারণ অনুপাত হইলে

$ar^2=18$ এবং $ar^9=39366$, $\therefore\ r^7=2187=3^7$

$\therefore\ r=3$ এবং $a.3^2=18$, বা $a=2$

$\therefore$ নির্ণেয় প্রগতিটি $\{2, 6, 18, 54, 162, \cdots\ \cdots\}$.

আরও সাধারণ একটি ক্ষেত্র লওয়া যাক্ :

উদা. : কোনও গুণোত্তর প্রগতির m-তম এবং n-তম পদ দুইটি যথাক্রমে α এবং β হইলে প্রগতিটির প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরা যাক্ প্রথম পদটি a এবং সাধারণ অনুপাত r ; তাহা হইলে m-তম পদ $=ar^{m-1}$ এবং n-তম পদ $=ar^{n-1}$. সুতরাং $ar^{m-1}=\alpha$, $ar^{n-1}=\beta$,

$\therefore\ r^{m-n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$, বা $r=\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{m-n}}$; $\therefore\ a=\dfrac{\alpha}{r^{m-1}}=\alpha.\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{m-1}{m-n}}=\alpha^{\frac{1-n}{m-n}}\cdot\beta^{\frac{1-m}{n-m}}$.

III. কোন গুণোত্তর প্রগতির সীমাবদ্ধ সংখ্যক (Finite number of) পদের সমষ্টি নির্ণয় :

ধরা যাক্ প্রথম পদটি a এবং সাধারণ অনুপাত r.

এখানে ধরি $r\neq1$.

মনে করি, $S_n=$ গুণোত্তর প্রগতিটির n-সংখ্যক পদের সমষ্টি

$$=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\ \cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}$$

উভয় পক্ষকে r দ্বারা গুণ করিয়া :

$$\underline{r.S_n=\quad ar+ar^2+ar^3+\cdots\ \cdots+\cdots+ar^{n-1}+ar^n}$$

বিয়োগ করিয়া, $S_n(1-r)=a-ar^n=a(1-r^n)$

$\because\ r\neq1$ মনে করা হইয়াছে, সুতরাং $1-r$ দ্বারা ভাগ করা যায় এবং

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\ \cdots\ \cdots \qquad (1)$$

r এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর না হইলে, অর্থাৎ $-1<r<1$ হইলে (1) নং সূত্রটি গুণোত্তর প্রগতির n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়ে ব্যবহার করা হয়।

(1) হইতে ইহাও লেখা যায় $S = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ ... (2)

যদি $r > 1$ হয় (বা $r < -1$ হয় অর্থাৎ যদি r-এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হয়), তাহা হইলে পদসমষ্টি নির্ণয় করিবার জন্য (2) সূত্র ব্যবহার করা হয়।

স্মরণ রাখিতে হইবে : $r=1$ হইলে (1) অথবা (2) কোন সূত্রই প্রয়োগ করা যায় না।

বিশেষ ক্ষেত্র : $r=1$ হইলে প্রগতিটিকে $\{a, a, a, \cdots \cdots\}$ এইভাবে লেখা যায়। সুতরাং S_n = প্রতিটি পদ a এইরূপ n-সংখ্যক পদের সমষ্টি $= na$.

উদা. $\{3, 6, 12, \cdots \cdots\}$ এই গুণোত্তর প্রগতিটির প্রথম 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান। এখানে প্রথম পদ $a=3$, সা. অনু. $r=2$, পদের সংখ্যা $n=10$ সুতরাং (2) সূত্র প্রয়োগ করিয়া ($\because r>1$)

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} = 3.\frac{2^{10}-1}{2-1} = 3069.$$

ছাত্রদের সরাসরি সূত্র প্রয়োগ না করিয়া সমষ্টি নির্ণয়ের অভ্যাসের পরামর্শ দেওয়া যাইতেছে : যেমন, এখানে

$$S_n = 3+6+12+ \cdots +3.2^9$$
$$2S_n = \quad 6+12+ \cdots +3.2^9+3.2^{10}$$

বিয়োগ করিয়া, $-S_n = \quad 3-3.2^{10}$

অর্থাৎ $S_n = 3(2^{10}-1) = 3069.$

IV. গুণোত্তর মধ্যক (Geometric Means)

সংজ্ঞা 1. তিনটি রাশি গুণোত্তর প্রগতিতে থাকিলে মধ্যম রাশিটিকে অপর দুইটির **গুণোত্তর মধ্যক** বলা হয়।

যেহেতু 2, 4, 8 এবং 2, −4, 8 উভয়েই গুণোত্তর প্রগতিতে আছে,

সুতরাং 2 এবং 8 এর গুণোত্তর মধ্যক 4 অথবা −4.

ধরা যাক্ a, b, c গুণোত্তর প্রগতিতে আছে ; তাহা হইলে, সাধারণ অনুপাতের সংজ্ঞা অনুসারে $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b}$; $\therefore\ b = \pm\sqrt{ac}.$

অতএব, দুইটি প্রদত্ত রাশির গুণোত্তর মধ্যক হইল, রাশি দুইটির গুণফলের বর্গমূল।

সংজ্ঞা 2. যখন সীমাবদ্ধ সংখ্যক রাশিসমূহ গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে, তখন মধ্যবর্তী সকল রাশিকেই প্রান্তীয় রাশি দুইটির **গুণোত্তর মধ্যক** বলা হয়। এই বিবেচনায় {2, 4, 8, 16, 32, 64, 128} এর গুণোত্তর প্রগতির ক্ষেত্রে 2 এবং 128 এর পাঁচটি গুণোত্তর মধ্যক হইবে 4, 8, 16, 32 এবং 64.

উদা. : 4 এবং 972 এর মধ্যে চারিটি গুণোত্তর মধ্যক বসাও।

সমাধান। গুণোত্তর মধ্যক চারিটি $t_1, t_2, t_3,$ এবং t_4 হইলে $\{4, t_1, t_2, t_3, t_4, 972\}$ হইবে একটি গুণোত্তর প্রগতি, যাহার প্রথম পদ 4 এবং 6-তম পদ 972.

যদি সাধারণ অনুপাত r হয়, তবে $972 = 4r^5$ বা $r^5 = 243 = 3^5$,

বা $r = 3$; সুতরাং $t_1 = 12, t_2 = 36, t_3 = 108, t_4 = 324$.

$\therefore$ নির্ণেয় গুণোত্তর মধ্যক চারিটি হইল **12, 36, 108, 324**

প্রশ্নমালা III (C)

[A]

1. নিম্নপ্রদত্ত গুণোত্তর প্রগতিগুলির পরবর্তী পদ দুইটি এবং n-তম পদটিও নির্ণয় কর :

(i) 256, 128, 64, 32, ··· ···

(ii) 1, −1, 1, −1, ··· ···

(iii) $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9},$ ··· ···

(iv) $xy, xy^3, xy^5, xy^7,$ ··· ···

(v) $\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{9\sqrt{3}},$ ··· ···

[উঃ (i) 16, 8 ; 2^{9-n}. (ii) 1, −1 ; $(-1)^{n-1}$. (iii) $\frac{1}{27}, \frac{1}{81}$; 3^{2-n}.

(iv) xy^9, xy^{11} ; xy^{2n-1}. (v) $\frac{1}{27\sqrt{3}}, \frac{1}{81\sqrt{3}}$; $3^{\frac{3}{2}-n}$.]

2. (i) {0·6, 0·03, 0·0015, ··· ··} এই গুণোত্তর প্রগতির ষষ্ঠ ও একাদশ পদ কত ?

(ii) $\{2, -2\sqrt{2}, 4, \cdots \cdots\}$ এর 16-তম পদ নির্ণয় কর।

(iii) 1, 3, 9, 27 ··· ··· এর কততম পদ 6561 ?

(iv) 12288 কি 2, 4, 8, 16 ··· ··· এই গুণোত্তর প্রগতির একটি পদ ?

[উঃ (i) $1{\cdot}875 \times 10^{-7}$; $5{\cdot}85936 \times 10^{-16}$; (ii) $-256\sqrt{2}$; (iii) নবম পদ ; (iv) না।]

[**একটি প্রয়োজনীয় দশমিক প্রতিরূপ :** ·0036 আকারের সংখ্যাকে $3{\cdot}6 \times 10^{-3}$ রূপে, ·0964 কে $9{\cdot}64 \times 10^{-2}$ রূপে, এই প্রকারে অনুরূপ অন্যান্য সংখ্যাকেও লেখা যায়। আবার 16000 কে $1{\cdot}6 \times 10^4$ আকারে, 26900000 কে $2{\cdot}69 \times 10^7$ আকারে এবং অনুরূপ অন্যান্য সংখ্যাকে এইরূপ আকারে লেখা যায়। এখন উপরে (i) এর উত্তরগুলি লক্ষ্য করা যাইতে পারে।]

3. সূত্র প্রয়োগ না করিয়া নিম্নপ্রদত্ত গুণোত্তর প্রগতিগুলির প্রতি ক্ষেত্রে উল্লিখিত নির্দিষ্ট সংখ্যক পদগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর :

(i) 4, 12, 36, 108, ··· ··· 10-তম পদ পর্যন্ত

(ii) 0·6, 0·06, 0·006, 0·0006, ··· ··· 20-তম পদ পর্যন্ত

(iii) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27},$ ··· ··· p-তম পদ পর্যন্ত

[উত্তর। (i) $2(3^{10}-1)$; (ii) $\frac{2}{3} - \frac{2}{3 \cdot 10^{20}}$; (iii) $\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{p-1}\right\}$]

4. (*a*) কোন গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদ 3, শেষ পদ 48 এবং প্রত্যেক পদ উহার ঠিক পূর্ববর্তী পদের দ্বিগুণ ; প্রগতিটির পদের সংখ্যা এবং সমষ্টি নির্ণয় কর।

[উঃ 5 ; 93.]

(*b*) একটি গুণোত্তর প্রগতির ষষ্ঠ ও নবম পদ দুইটি যথাক্রমে 64 এবং 512 হইলে উহার প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত কত ? [উঃ 2 ; 2.]

(*c*) কোন গুণোত্তর প্রগতির তৃতীয় পদটি প্রথম পদের বর্গ এবং পঞ্চম পদ 64 ; প্রগতিটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টিটি লিখ। [উঃ 4096.]

(*d*) একটি G. P.র 9-তম পদ 360 এবং 21-তম পদ 1215 ; প্রথম পদ কত ?

[(d)এর জন্য ইঙ্গিত : $ar^8=360$; $ar^{20}=1215$; ভাগ দ্বারা $r^{12}=27/8$ বা $r^4=3/2$ নির্ণয় কর। $\therefore$ $r^8=9/4$ এবং $a=360/r^8=360/(9/4)=$ **160**.]

5. নিম্নের গুণোত্তর প্রগতিগুলিতে শূন্যস্থান পূরণ কর :

(*i*) 45,—, 80,··· ··· ···

(*ii*) 64,—, —, 216, ··· ··· ···

(*iii*) 46875, —, —, —, —, 480, ··· ··· ···

[ইঙ্গিত : (iii) $480=46875r^5$; $\therefore$ $r=\frac{2}{5}$; এখন শূন্য স্থান পূরণ কর।]

[উঃ (*i*) 60 ; (*ii*) 96,144 ; (*iii*) 18750, 7500, 3000, 1200.]

[B]

1. (*i*) কোন গুণোত্তর প্রগতির পর পর তিনটি পদের মধ্যমটি 6 এবং প্রথম ও তৃতীয় পদ দুইটির সমষ্টি 15 ; পদ তিনটি নির্ণয় কর। [উঃ 3, 6, 12 বা 12, 6, 3]

(*ii*) তিনটি সংখ্যার সমষ্টি 65 এবং উহারা গুণোত্তর প্রগতিতে আছে ; যদি তৃতীয় সংখ্যাটি অপর দুইটির সমষ্টির $2\frac{1}{4}$ গুণ হয়, তবে সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

[উঃ 5, 15, 45 বা 80, −60, 45]

(*iii*) গুণোত্তর প্রগতিতে অবস্থিত তিনটি সংখ্যার গুণফল 64 ; উহাদের প্রতি দুইটির গুণফলের সমষ্টি 84 হইলে সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

[ইঙ্গিত : ঐ সংখ্যা তিনটি a,b,c হইলে $b^2=ac$, কারণ a,b,c G.P.তে আছে ;

প্রদত্ত : $abc=64$ এবং $ab+ac+bc=84$.

$\because$ $abc=64$, $\therefore$ $b^3=64$ ($\because$ $b^2=ac$) বা $b=4$; আবার $ab+ac+bc=84$ বলিয়া, $b(a+b+c)=84$ ($ac=b^2$ লিখিয়া), $\therefore$ $a+c=17$; আবার $ac=b^2=16$;

এখন $(a-c)^2=(a+c)^2-4ac=225$ বা $a-c=\pm15$; সুতরাং $a+c=17$, $a-c=15$ হইতে $a=16$, $c=1$ এবং $a+c=17$, $a-c=-15$ হইতে $a=1$, $c=16$ পাওয়া যায়। প্রতি ক্ষেত্রেই সংখ্যা তিনটি 1, 4 এবং 16 ; উহারা হয় {1,4.16} বা {16,4,1} ক্রমে আছে।]

2. নিম্নের গুণোত্তর প্রগতিগুলির প্রতি ক্ষেত্রে n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর :

(*i*) $2, \sqrt{2}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}$, ··· ··· ···

(*ii*) $2{\cdot}5+1{\cdot}25+{\cdot}625+\cdots$ ··· ···

(*iii*) $2+5+12\frac{1}{2}+$ ··· ··· ···

[উঃ (*i*) $2^{\frac{3-n}{2}}(2^{\frac{n}{2}}-1)(2^{\frac{1}{2}}+1)$; (*ii*) 4·990234375 ; (*iii*) $324\frac{3}{16}$.]

3. (*i*) কোন গুণোত্তর প্রগতির প্রথম চারিটি পদের সমষ্টি 40 এবং প্রথম আটটি পদের সমষ্টি 3280 ; প্রগতিটি নির্ণয় কর।

[উঃ 1, 3, 9, 27...... বা −2, 6, −18, 54, ...]

(*ii*) একটি গুণোত্তর প্রগতির প্রথম 20টি পদের সমষ্টি, প্রগতিটির প্রথম 10টি পদের সমষ্টির 244 গুণ ; সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

[ইঙ্গিত : $\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=244.\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}$; ইহা হইতে পাওয়া যায়

$r^{10}+1=244$ বা $r^{10}=243=3^5=(\sqrt{3})^{10}$ বা $(-\sqrt{3})^{10}$

$\therefore\ r=\pm\sqrt{3}$.]

4. (*i*) কোন G.P.র প্রথম, দ্বিতীয় ও শেষ পদ যথাক্রমে $a, b, l,$ হইলে দেখাও যে প্রগতিটির সমষ্টি $(bl-a^2)/(b-a)$.

[ইঙ্গিত : $r=\frac{b}{a}, l=ar^{n-1}$ বা $lr=ar^n$ বা $\frac{lb}{a}=ar^n$; সুতরাং $S=\cdots$ইত্যাদি।]

(*ii*) কোন গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r এবং প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি S ; যদি পদগুলির অন্যোন্যকের (reciprocals) সমষ্টিকে S_1 দ্বারা নির্দেশ করা হয়, তবে প্রমাণ কর যে $S/S_1=a^2r^{n-1}$.

[ইঙ্গিত : গুণোত্তর প্রগতির পদসমূহের অন্যোন্যকগুলিও যে গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে, প্রথমে এই সত্যটি যাচাই করিয়া লও।]

(*iii*) কোন G.P.র প্রথম n-সংখ্যক, $2n$-সংখ্যক এবং $3n$-সংখ্যক পদের সমষ্টি যথাক্রমে S_1, S_2, S_3 হইলে প্রমাণ কর যে $S_1(S_3-S_2)=(S_2-S_1)^2$।

[ইঙ্গিত : $S_1=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$; $S_2=\frac{a(r^{2n}-1)}{r-1}$; $S_3=\frac{a(r^{3n}-1)}{r-1}$; তাহা হইলে

$S_3-S_2=\frac{ar^{2n}(r^n-1)}{r-1}=S_1r^{2n}$ এবং $S_2-S_1=\frac{ar^n(r^n-1)}{r-1}=S_1r^n$ ইত্যাদি।]

5. (I) যদি $a, b, c, d,$ G. P. তে থাকে, তবে প্রমাণ কর যে,

(*i*) $a+b,\ b+c,\ c+d$ ও G. P.তে আছে ; (*ii*) $a^2+b^2,\ b^2+c^2,\ c^2+d^2$ ও G.P.তে আছে।

(II) n অযুগ্ম সংখ্যা হইলে প্রমাণ কর যে কোন G.P.র n-সংখ্যক পদের গুণফল, মধ্যম পদটির n-তম ঘাতের সমান।

[ইঙ্গিত : ধরা যাক $n=2k+1$; $\therefore\ a.\,ar.\,ar^2\cdots ar^{2k}=a^{2k+1}.\,r^{k(2k+1)}$

$=a^nr^{\frac{n(n-1)}{2}}=(ar^{\frac{n-1}{2}})^n$; মধ্যমপদ $=(k+1)$তম পদ $=ar^k=ar^{\frac{n-1}{2}}$; ইত্যাদি।]

(III) একটি G. P.র $(p+q)$-তম পদ m এবং $(p-q)$-তম পদ n হইলে p-তম এবং q-তম পদ দুইটি নির্ণয় কর।

[C]

(কঠিনতর প্রশ্নাবলী)

1. (*i*) দুইটি প্রদত্ত রাশি a এবং b এর মধ্যে একক গুণোত্তর মধ্যক G হইলে ও দুইটি সমান্তর মধ্যক p এবং q হইলে প্রমাণ কর যে $G^2=(2p-q)(2q-p)$.

(*ii*) একটি সমান্তর প্রগতি ও একটি গুণোত্তর প্রগতির প্রত্যেকের p-তম, q-তম এবং r-তম পদ যথাক্রমে a, b, c হইলে প্রমাণ কর যে,

$$a^{b-c}.\,b^{c-a}.\,c^{a-b}=1.$$

[**সমাধান ঃ** ধরা যাক্ সমান্তর প্রগতিটির প্রথম পদ α এবং সাধারণ অন্তর β এবং গুণোত্তর প্রগতিটির প্রথম পদ A এবং সাধারণ অনুপাত B ; তাহা হইলে $a=$ A. P.র p-তম পদ$=\alpha+(p-1)\beta$; $a=$ G.P.র p-তম পদ$=AB^{p-1}$.

অনুরূপভাবে $b=\alpha+(q-1)\beta$ এবং $b=AB^{q-1}$;

$c=\alpha+(r-1)\beta$ এবং $c=AB^{r-1}$; যেহেতু $b-c=(q-r)\beta$, $c-a=(r-p)\beta$, $a-b=(p-q)\beta$, অতএব $a^{b-c}.\,b^{c-a}.\,c^{a-b}=(AB^{p-1})^{(q-r)\beta}.\,(AB^{q-1})^{(r-p)\beta}.\,(AB^{r-1})^{(p-q)\beta}$; এখন সরল করিতে হইবে।]

(*iii*) a, b, c যদি কোন G.P.র যথাক্রমে pতম, qতম এবং rতম পদ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$a^{q-r}.\,b^{r-p}.\,c^{p-q}=1.$$

[**ইঙ্গিত ঃ** উপরে যেমন (*ii*) এর ক্ষেত্রে, এখানেও $AB^{p-1}=a$, $AB^{q-1}=b$, $AB^{r-1}=c$.

$\therefore$ বামপক্ষ$=(AB^{p-1})^{q-r}.(AB^{q-1})^{r-p}.(AB^{r-1})^{p-q}=A^0B^0=1$.]

2. (*i*) a, b, c যদি A. P. তে এবং x, y, z G.P. তে থাকে, তবে প্রমাণ কর যে, $x^{b-c}.y^{c-a}.z^{a-b}=1.$

(*ii*) p, q, r সমান্তর প্রগতিতে থাকিলে প্রমাণ কর যে কোন গুণোত্তর প্রগতির p-তম, q-তম এবং r-তম পদ তিনটিও গুণোত্তর প্রগতিতে থাকিবে।

[**ইঙ্গিত ঃ** প্রদত্ত $2q=p+r$; প্রমাণ করিতে হইবে $(AB^{q-1})^2=(AB^{p-1}).(AB^{r-1})$.]

3. (*i*) a, b, c A.P.তে এবং a, b, d G.P. তে হইলে দেখাও যে a, $a-b$, $d-c$, G.P.তে আছে।

[**ইঙ্গিত ঃ** প্রদত্ত $2b=a+c$ এবং $b^2=ad$; প্রমাণ করিতে হইবে ; $a(d-c)=(a-b)^2$.]

(*ii*) a,b,c G.P.তে আছে এবং (a, b) ও (b, c) এর মধ্যে সমান্তর মধ্যক যথাক্রমে x ও y ; প্রমাণ কর যে

$$(i)\ \ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{b}\ \ \text{এবং}\ \ (ii)\ \ \frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2.$$

4. (*i*) a, b, c গুণোত্তর প্রগতিতে থাকিলে প্রমাণ কর যে,

$\dfrac{1}{a+b}$, $\dfrac{1}{2b}$, $\dfrac{1}{b+c}$ সমান্তর প্রগতিতে আছে, কিন্তু a^2+b^2, $ab+bc$, b^2+c^2 G.P.তে আছে।

(*ii*) প্রমাণ কর যে a এবং bএর মধ্যবর্তী 16টি গুণোত্তর মধ্যকের গুণফল $(ab)^8$.

5. (*i*) প্রমাণ কর যে দুইটি ধনাত্মক ও অসমান রাশির সমান্তর মধ্যকটি, উহাদের গুণোত্তর মধ্যকটি অপেক্ষা বৃহত্তর। রাশি দুইটি সমান হইলে কি হইবে ?

[**সমাধান ঃ** ধরা যাক্ রাশি দুইটি a ও b এবং $a\neq b$; তাহা হইলে ইহাদের সমান্তর মধ্যক $=\dfrac{a+b}{2}$ এবং গুণোত্তর মধ্যক$=\pm\sqrt{ab}$; c এবং b উভয়ে ধনাত্মক বলিয়া $\dfrac{a+b}{2}$ স্পষ্টতঃ ধনাত্মক এবং

$-\sqrt{ab}$এর ন্যায় যে কোন ঋণাত্মক রাশি অপেক্ষা বৃহত্তর। সুতরাং ইহা প্রমাণ করিলেই চলিবে যে $\frac{a+b}{2} \geqslant +\sqrt{ab}$; এখন $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a+b-2\sqrt{ab}$; $\therefore \frac{1}{2}(a+b)-\sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 =$ একটি ধনাত্মক রাশি ($\because a \neq b$), সুতরাং $\frac{1}{2}(a+b) > \sqrt{ab}$; $a=b$ হইলে স্পষ্টত সমান্তর মধ্যক ও গুণোত্তর মধ্যক দুইটি সমান হইবে। সুতরাং ইহা সত্য যে, যে কোন **দুইটি ধনাত্মক সংখ্যার ক্ষেত্রে সমান্তর মধ্যক $\geqslant$গুণোত্তর মধ্যক।**]

(*ii*) a, b, c ধনাত্মক হইলে এবং উহারা G.P.তে থাকিলে প্রমাণ কর যে $a+c>2b$.

(*iii*) দুইটি অসমান ধনাত্মক সংখ্যা x এবং y এর সমান্তর মধ্যক A এবং গুণোত্তর মধ্যক G ;

প্রমাণ কর যে (*i*) $A>G>\frac{G^2}{A}$ এবং (*ii*) সংখ্যা দুইটি হইল $A \pm \sqrt{A^2-G^2}$.

6. (*i*) দুইটি প্রদত্ত সংখ্যার সমান্তর মধ্যক A এবং উহাদের মধ্যবর্তী দুইটি গুণোত্তর মধ্যক a ও b হইলে প্রমাণ কর যে

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right).$$

(*ii*) কোন দুইটি সংখ্যার সমান্তর মধ্যকটি, উহাদের গুণোত্তর মধ্যকটির f হইলে প্রমাণ কর যে সংখ্যা দুইটি $2+\sqrt{3} : 2-\sqrt{3}$ অনুপাতে থাকিবে।

(*iii*) দুইটি ধনাত্মক সংখ্যার সমান্তর মধ্যক 40 এবং গুণোত্তর মধ্যক 24 ; গ দুইটি নির্ণয় কর। [উঃ 72, 8]

7. (*i*) কোন গুণোত্তর প্রগতির nটি পদের সমষ্টি S, উহাদের গুণফল P এবং উহাদের অন্যোন্যকগুলির সমষ্টি R হইলে প্রমাণ কর যে

$$\left(\frac{S}{R}\right)^n = P^2.$$

[ইঙ্গিত: $a(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1})=S$; $a \cdot ar.ar^2\cdots ar^{n-1}=P$;

$\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{r^{n-1}}\right)=R$; অর্থাৎ $S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$. $P=a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}$ এবং

$R=\frac{1}{a}\frac{(\frac{1}{r})^n-1}{\frac{1}{r}-1}$; এখন প্রমাণ কর।]

(*ii*) যদি $\frac{a-bx}{a+bx}=\frac{b-cx}{b+cx}=\frac{c-dx}{c+dx}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে a, b, c, d, G. P. তে আছে।

(*iii*) কোন সমান্তর প্রগতির এবং গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদ দুইটি একই সংখ্যা, উহাদের যথাক্রমে সাধারণ অন্তর ও সাধারণ অনুপাতও একই সংখ্যা 2 ; আবার প্রগতি দুইটির প্রত্যেকের প্রথম পাঁচটি পদের সমষ্টিও একই সংখ্যা। প্রগতি দুইটির প্রত্যেকের পঞ্চম পদ নির্ণয় কর। [উঃ $\frac{114}{13}$, $\frac{160}{13}$.]

8. (*i*) a, b, c, d এই চারিটি সংখ্যা সমান্তর প্রগতিতে আছে এবং a, c, d গুণোত্তর প্রগতিতে ; প্রমাণ কর $b=3a/4$ এবং $a^2+3ad=d^2+3b^2$.

(*ii*) a, b, c, d গুণোত্তর প্রগতিতে আছে ; প্রমাণ কর যে

(*i*) $(b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)=b^2(a^2+d^2)$

(*ii*) $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$

9. (*i*) কোন গুণোত্তর প্রগতির n-তম পদ t_n হইলে প্রমাণ কর যে, যে প্রগতির n-তম পদ $U_n=1/(t_n^2+t_{n+1}^2)$ তাহাও গুণোত্তর প্রগতি ; প্রথমোক্ত প্রগতিটির সাধারণ অনুপাত r হইলে দ্বিতীয় প্রগতিটির সাধারণ অনুপাতকে r দ্বারা প্রকাশ কর।

[ইঙ্গিত : $t_n=ar^{n-1}, t_{n+1}=ar^n$; $\therefore\ U_n=\dfrac{1}{a^2r^{2n-2}+a^2r^{2n}}=\dfrac{1}{a^2r^{2n}}\left[\dfrac{1}{r^{-2}+r^2}\right]$,

সুতরাং $U_{n+1}=\dfrac{1}{a^2r^{2n+2}}\left[\dfrac{1}{r^{-2}+r^2}\right]$, (U_n-এ nএর পরিবর্তে $n+1$ বসাইয়া)

$\therefore\ U_{n+1}/U_n=\dfrac{1}{r^2}$= দ্বিতীয় গুণোত্তর প্রগতির সাধারণ অনুপাত।]

(*ii*) কোন গুণোত্তর প্রগতিতে $3p$-সংখ্যক পদ আছে। ইহার প্রথম p-সংখ্যক পদের সমষ্টি K_1 ; $p+1$-তম পদ হইতে শুরু করিয়া p সংখ্যক পদের সমষ্টি K_2 এবং প্রগতিটির শেষ p-সংখ্যক পদের সমষ্টি K_3 ; প্রমাণ কর যে $(K_3/K_1)=(K_2/K_1)^2$.

10. (*i*) a প্রথম পদ, r সাধারণ অনুপাত, এইরূপ একটি গুণোত্তর প্রগতির t-সংখ্যক পদের সমষ্টি S_t এবং $U_n=S_1+S_2+\cdots\cdots+S_n$; U_n এর মানকে a, r এবং n এর সাহায্যে প্রকাশ কর। ইহাও প্রমাণ কর যে

$$rS_n+(1-r)U_n=na.$$

[ইঙ্গিত : দেখাও যে $rS_t=S_{t+1}-a$; এখন t এর পরিবর্তে পরপর $1, 2, 3, \cdots (n-1)$ বসাও এবং প্রাপ্ত ফলগুলিকে যোগ কর→প্রশ্নটির দ্বিতীয় অংশ প্রমাণিত হইবে।]

(*ii*) প্রমাণ কর যে

$1+(1+x)+(1+x+x^2)+(1+x+x^2+x^3)+\cdots\ \cdots$ এইরূপ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত $=\dfrac{n}{1-x}-\dfrac{x(1-x^n)}{(1-x)^2}$.

প্রশ্নমালা III(D)

(প্রয়োগমূলক প্রশ্ন)

1. কোন শহরের লোকসংখ্যা প্রত্যেক বৎসরের শেষে, ঐ বৎসরের প্রথমে যাহা ছিল তাহার 10% বৃদ্ধি পায়। চার বৎসর পরে লোকসংখ্যা শতকরা কত বৃদ্ধি পায় ? [উঃ 46·41%.]

[ধরা হইল, প্রারম্ভিক লোকসংখ্যা P ; এক বৎসর পরে লোকসংখ্যা $=P+\frac{10}{100}P=(1\cdot1)P$; 2 বৎসর পরে লোকসংখ্যা $=(1\cdot1)P+\frac{10}{100}(1\cdot1)P=(1\cdot1)^2P$; অনুরূপে 3 বৎসর পরে লোকসংখ্যা $=(1\cdot1)^3P$ এবং 4 বৎসর পরে লোকসংখ্যা $=(1\cdot1)^4P=1\cdot4641P=P+\cdot4641P=P+\dfrac{46\cdot41}{100}P$; $\therefore$ লোকসংখ্যা বৃদ্ধি পায় 46·41%।]

2. কোন রাজ্যের লোকসংখ্যার বাৎসরিক বৃদ্ধি প্রতি হাজারে 25 ; বর্তমান অধিবাসীর সংখ্যা 26,24,000 হইলে তিন বৎসর পরে লোকসংখ্যা কত হইবে ? [উঃ 28,26,000]

3. একটি বায়ুনিষ্কাশন যন্ত্র কোন পাত্র হইতে প্রতি স্ট্রোকে বায়ুর এক-দশমাংশ নিষ্কাশিত করে। পঞ্চম স্ট্রোকের শেষে পাত্রটিতে বায়ুর প্রাথমিক আয়তনের কত অংশ থাকিবে? [উঃ 0·59049%]

4. 256 গ্যালন কোন তরল হইতে কয়েক গ্যালন তরল তুলিয়া লইয়া ঐ স্থানে সমপরিমাণ জল ঢালা হইল; দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ বার অনুরূপ কার্য সাধিত হইল এবং দেখা গেল, এখন মিশ্রণটিতে ঐ তরলের 81 গ্যালন পড়িয়া আছে। প্রতিবার কত গ্যালন করিয়া তুলিয়া লওয়া হইয়াছিল? [উঃ 64]

[চতুর্থবার কার্যটি হইবার পর অবশিষ্ট তরলের পরিমাণ $=256(1-\frac{x}{256})^4$, যেখানে প্রতিবার তুলিয়া লওয়া তরলের পরিমাণ x গ্যালন ধরা হইয়াছে।]

5. এক ব্যক্তি বিনা সুদে 9841 টাকা ধার করেন এবং 9টি মাসিক কিস্তিতে উহা পরিশোধ করেন; দ্বিতীয় কিস্তি ও উহার পরবর্তী প্রত্যেক কিস্তি তাহার ঠিক পূর্ববর্তী কিস্তির তিন গুণ হইলে শেষ কিস্তি কত টাকার ছিল? [উঃ 6561 টাকা।]

6. কোন একটি দোলকের পিণ্ডটি (bob) পর পর দোলনের সময় যে দূরত্বগুলি অতিক্রম করে তাহারা যথাক্রমে {16, 12, 9,⋯} সে.মি. এই গুণোত্তর প্রগতিতে আছে; দশম দোলনের পর অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। [উঃ $64[1-(\frac{3}{4})^{10}]$ সে.মি.]

7. এক ঠিকাদার এক লাখ টাকায় (Rs. 100,000) কোন মাসের 30 দিন ধরিয়া দেশলাই কাঠি সরবরাহের এক চুক্তি করিল; প্রথম দিন একটি কাঠি, দ্বিতীয় দিন 2টি, তৃতীয় দিন 4টি, চতুর্থ দিন 8টি, এইভাবে দেশলাই কাঠি সরবরাহ করিতে সে স্বীকৃত হইল। যদি 60 কাঠির একটি দেশলাই বাক্সের মূল্য ছয় পয়সা হয়, তবে ঐ সরবরাহকারীর কত লাভ বা ক্ষতি হইবে তাহা আসন্ন টাকায় নির্ণয় কর। [উঃ ক্ষতি 973741 টাকা।]

8. একটি বালক প্রথম দিন এক পয়সা, দ্বিতীয় দিন দুই পয়সা, তৃতীয় দিন চার পয়সা, চতুর্থ দিন আট পয়সা, এইভাবে মজুরি লইয়া কাজ করিতে স্বীকৃত হইল। বার দিন পরে সে কত মজুরি পাইবে? [উঃ 40·95 টাকা।]

9. 250 গ্যালন অ্যালকোহল (alcohol) দ্বারা পূর্ণ একটি চৌবাচ্চা হইতে 60 গ্যালন অ্যালকোহল তুলিয়া লইয়া জল দ্বারা উহাকে আবার পূর্ণ করা হইল। এখন এই মিশ্রণ হইতে 60 গ্যালন আবার অপসারিত করা হইল এবং পূর্বের ন্যায় জল দ্বারা চৌবাচ্চাটি আবার পূর্ণ করা হইল। এইরূপ কার্য পর পর মোট পাঁচবার করিবার পর চৌবাচ্চায় কত গ্যালন অ্যালকোহল থাকিবে? [উঃ 57 গ্যালন।]

10. একটি ট্যাঙ্কে রক্ষিত লবণ জলের দ্রবণে 972 গ্রাম লবণ দ্রবীভূত আছে। দ্রবণটির এক-তৃতীয়াংশ অপসারিত করিয়া শূন্যস্থান আবার জল দ্বারা পূর্ণ করা হইল। সমসত্ব করিবার জন্য মিশ্রণটিকে আলোড়ন করিয়া উহা হইতে উহার এক-তৃতীয়াংশ পুনরায় অপসারণ এবং শূন্যস্থান জল দ্বারা পূর্ণ করা হইল। পর পর চারবার এইরূপ প্রক্রিয়ার পর ট্যাঙ্কে কি পরিমাণ লবণ তখনও অবশিষ্ট থাকিবে? [উঃ 192 গ্রাম।]

3·7. সসীম শ্রেণীসমূহ ও তাহাদের সমষ্টি (Finite Series and their Sums)

যদি $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ সংখ্যাসমূহের একটি সীমাবদ্ধ অনুক্রম (sequence) হয়, তবে **ইহাদের সমষ্টি** বলিয়া কথিত অপর একটি অনন্য সংখ্যা S_n কে ইহাদের সহিত সংশ্লিষ্ট করা যায়, যেখানে

$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots \cdots + x_n.$

$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$ কে সাধারণত n পদের সসীম শ্রেণী (Finite series), S_n কে শ্রেণীটির সমষ্টি এবং x_n কে n-তম পদ (বা সাধারণ পদ) বলা হয়। তদনুসারে

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \cdots + \frac{1}{n}$ হইল একটি সসীম শ্রেণী, যাহার পদের সংখ্যা n এবং n তম পদটি $\frac{1}{n}$.

সিগ্‌মা (Σ) অঙ্কপাতন (The Sigma Notation)

Σ(Sigma) অঙ্কপাতন হইল শ্রেণীর সমষ্টিকে প্রকাশ করিবার একটি সাংকেতিক লিখন পদ্ধতি মাত্র। যেমন, $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\cdots + x_n$ এই সমষ্টি বা শ্রেণীফল বুঝাইতে লেখা হয় $\sum_{r=1}^{n} x_r$.

x_r কে বলা হয় **সমষ্টিকরণের অধীন সাধারণ পদ** (Summand) এবং r হইল **সমষ্টিকরণের সূচক (Index of summation)**। Σ চিহ্নের নিম্নে লিখিত প্রতীক $r=1$ এবং উপরে লিখিত প্রতীক $r=n$ হইল r কর্তৃক গৃহীত যথাক্রমে প্রাথমিক এবং শেষতম মান। তদনুসারে r এর মানগুলি হইল $1, 2, 3, \cdots, n$ এবং Σ চিহ্ন নির্দেশ করে যে x_r কর্তৃক গৃহীত $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ মানগুলি যোগ করিতে হইবে।

উদা. 1. $\sum_{r=1}^{10} r^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots \cdots + 10^2.$

উদা. 2. $\sum_{r=1}^{n} (2r-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots \cdots + (2n-1).$

r এর পরিবর্তে অন্য সাফিক্সও (Suffix) ব্যবহার করা যায়, যেমন n ; এতদনুসারে

উদা. 3. $\sum_{n=1}^{10} 2n = 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots\cdots + 20.$

উদা. 4. $\sum_{r=1}^{n} x_r = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{k=1}^{n} x_k$ ইত্যাদি।

x গুলির প্রত্যেকটি যদি একই কোন নির্দিষ্ট রাশি c এর সমান হয়, তবে

উদা. 5. $\sum_{r=1}^{n} x_r = c + c + c + \cdots + c$ [n সংখ্যক পদ] $= nc$; এক্ষেত্রে লেখা হয়

$\sum_{r=1}^{n} c = nc$; যেমন $\sum_{r=1}^{5} 1 = 5.$

যদি $x_r = ky_r$ হয়, যেখানে k ধ্রুবক, তাহা হইলে

উদা. 6. $\sum_{r=1}^{n} x_r = \sum_{r=1}^{n} ky_r = ky_1 + ky_2 + \cdots \cdots + ky_n = k\sum_{r=1}^{n} y_r.$

যদি $x_r = y_r + z_r$ হয়, তবে $\sum_{r=1}^{n} x_r = \sum_{r=1}^{n} y_r + \sum_{r=1}^{n} z_r.$

কারণ
$$\sum_{r=1}^{n} x_r = \sum_{r=1}^{n} (y_r + z_r) = (y_1 + z_1) + (y_2 + z_2) + \cdots + (y_n + z_n)$$
$$= (y_1 + y_2 + \cdots \cdots + y_n) + (z_1 + z_2 + \cdots \cdots + z_n)$$
$$= \sum_{r=1}^{n} y_r + \sum_{r=1}^{n} z_r.$$

উদা. 7. $\sum_{r=1}^{n} (ax_r + by_r) = a\sum_{r=1}^{n} x_r + b\sum_{r=1}^{n} y_r.$

অনুশীলনের জন্য কয়েকটি প্রশ্ন :

1. দেওয়া আছে $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = 3, x_5 = 7, x_6 = -8.$
   মান নির্ণয় কর : $\sum_{i=1}^{6} x_i$; $\sum_{i=1}^{6} x_i^2$; $\sum_{i=1}^{6} (2x_i + 3)$; $\sum_{i=1}^{6} (x_i + 2)(x_i - 2)$.

2. নিম্নে প্রদত্ত শ্রেণী দুইটিকে Σ অঙ্কপাতনের সাহায্যে প্রকাশ কর :
   (i) $2t + 4t^2 + 8t^3 + 16t^4 + 32t^5 + 64t^6.$
   (ii) $1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots \cdots + n(n-1).$

3. দেওয়া আছে $x_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$; $\sum_{n=1}^{p} x_n$ কে সম্পূর্ণ শ্রেণীর আকারে লিখ।

3·8. প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার (Natural Numbers) সমষ্টি —উহাদের ঘাতযুক্ত অবস্থায় সমষ্টি—সংশ্লিষ্ট প্রশ্নাদি।

পূর্বের অধ্যায়ে সংখ্যা সম্পর্কে আলোচনার কালে বলা হইয়াছে যে $1, 2, 3, \cdots, n$ হইল প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যা।

I. প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি :

অর্থাৎ যদি ধরা যায় $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots \cdots + n$ তবে S_n এর মান নির্ণয় করিতে হইবে। শ্রেণীটির পদগুলি একটি সমান্তর প্রগতিতে আছে, যাহার প্রথম পদ 1 এবং সাধারণ অন্তরও 1 ; পদের সংখ্যা n এবং শেষ পদ n.

সুতরাং $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}.$

ইহাও লেখা যায় যে $\sum_{r=1}^{n} r = \dfrac{n(n+1)}{2}.$

অনুসিদ্ধান্ত 1. প্রথম n-সংখ্যক ধনাত্মক অযুগ্ম সংখ্যার সমষ্টি

$$=1+3+5+\cdots \quad \cdots+(2n-1)=\frac{n(1+\overline{2n-1})}{2}=n^2.$$

অর্থাৎ $\sum\limits_{r=1}^{n}(2r-1)=n^2.$

অনুসিদ্ধান্ত 2. প্রথম n-সংখ্যক ধনাত্মক যুগ্ম সংখ্যার সমষ্টি

$$=2+4+6+\cdots \quad \cdots+2n=\frac{n(2+2n)}{2}=n(n+1)$$

অর্থাৎ $\sum\limits_{r=1}^{n}2r=n(n+1).$

II. স্বাভাবিক সংখ্যাগুলির প্রথম হইতে nটির বর্গগুলির সমষ্টি ঃ

$S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\sum\limits_{r=1}^{n}r^2$ হইলে ; S_n এর মান নির্ণয় করিতে হইবে। নিম্নে প্রদত্ত অভেদটির সাহায্য লওয়া হইবে ঃ

$$r^3-(r-1)^3=3r^2-3r+1.$$

এই অভেদে r এর পরিবর্তে পর পর $1, 2, 3, \cdots, n$ লিখিয়া পাওয়া গেল

$$1^3-0^3=3.1^2-3.1+1$$
$$2^3-1^3=3.2^2-3.2+1$$
$$3^3-2^3=3.3^2-3.3+1$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$n^3-(n-1)^3=3.n^2-3.n+1$$

যোগ করিলে, $n^3-0^3=3.(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-3.(1+2+3+\cdots+n)+n$

$$=3S_n-\frac{3n(n+1)}{2}+n$$

$$\therefore \quad 3S_n=n^3+\frac{3n(n+1)}{2}-n=\frac{2n^3+3n^2+3n-2n}{2}$$

$$=\frac{n(2n^2+3n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\therefore \quad S_n=\sum_{r=1}^{n}r^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

III. স্বাভাবিক সংখ্যাগুলির প্রথম হইতে nটির ঘনগুলির সমষ্টি ঃ

$S_n=1^3+2^3+3^3+\cdots \quad \cdots+n^3=\sum\limits_{r=1}^{n}r^3$ ধরা হইল ; S_n এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

নিম্নে প্রদত্ত অভেদ

$r^4-(r-1)^4=4r^3-6r^2+4r-1$ তে

r এর পরিবর্তে পর পর 1, 2, 3, ⋯, n এই মান বসাইয়া এবং পূর্বের ন্যায় যোগ করিয়া পাওয়া গেল

$$n^4-0^4=4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)-6(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+4(1+2+3+\cdots+n)-n$$

অর্থাৎ $n^4=4S_n-6\sum_{r=1}^{n} r^2+4\sum_{r=1}^{n} r-n.$

$$\therefore\quad 4S_n=n^4+6\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4.\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$=n^4+2n^3+3n^2+n-2n^2-2n+n$$

$$=n^4+2n^3+n^2=n^2(n^2+2n+1)=\{n(n+1)\}^2$$

সুতরাং $\quad S_n=\sum_{r=1}^{n} r^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$

স্মরণ রাখিতে হইবে : স্বাভাবিক সংখ্যাগুলির প্রথম হইতে nটির ঘনের সমষ্টি = (প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি)^2 ।

এখন পূর্বলব্ধ ফলগুলির প্রয়োগস্বরূপ কতিপয় উদাহরণ দেওয়া হইল :

উদা. 1. কোন শ্রেণীর n-তম পদ $n(n+1)$; শ্রেণীটির প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান। এখানে $\sum_{r=1}^{n} r(r+1)=1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots+n(n+1)$ এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)=\sum_{r=1}^{n}(r^2+r)=\sum_{r=1}^{n} r^2+\sum_{r=1}^{n} r=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\left\{\frac{2n+1}{3}+1\right\}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{2(n+2)}{3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

উদা. 2. নিম্নলিখিত শ্রেণীটির n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর :

$$(3^3-2^3)+(5^3-4^3)+(7^3-6^3)+\cdots\cdots$$

সমাধান। শ্রেণীটির n-তম পদ প্রথমে নির্ণয় করিতে হইবে। ধরা যাক উহা x_n;

এখন $x_n=\{3, 5, 7, 9, \cdots$ অনুক্রমের n-তম পদ$\}^3-\{2, 4, 6, 8, \cdots$ অনুক্রমের n-তম পদ$\}^3$

$$=\{3+(n-1)2\}^3-\{2+(n-1)2\}^3$$

$$=(2n+1)^3-(2n)^3=12n^2+6n+1$$

$$\therefore\quad \sum_{r=1}^{n} x_r=\sum_{r=1}^{n}(12r^2+6r+1)=12\sum_{r=1}^{n} r^2+6\sum_{r=1}^{n} r+\sum_{r=1}^{n} 1$$

$$=12.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+6.\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$=n\{2(n+1)(2n+1)+3(n+1)+1\}=n(4n^2+9n+6)$$

উদা. 3. নিম্নে প্রদত্ত শ্রেণীটির প্রথম n পদের সমষ্টি নির্ণয় কর :

$$1-2+3-4+5-6+\cdots\ \cdots\ \cdots$$

সমাধান। প্রথম ক্ষেত্র : ধরা হইল n ধনাত্মক যুগ্ম সংখ্যা এবং $n=2k$
[k ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা]

$\therefore$ n-তম পদ পর্যন্ত প্রদত্ত শ্রেণী

$=(1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots k$-তম এইরূপ দল (group) পর্যন্ত

$=(-1)+(-1)+(-1)+\cdots\ \cdots k$-তম এইরূপ পদ পর্যন্ত

$=-k=\underline{-\frac{n}{2}}\quad(\because k=\frac{n}{2})$

দ্বিতীয় ক্ষেত্র : ধরা হইল n ধনাত্মক অযুগ্ম সংখ্যা এবং $n=(2k+1)$
[k ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা]

$\therefore$ n-তম পদ পর্যন্ত প্রদত্ত শ্রেণী

$=1-(2-3)-(4-5)-\cdots\ \cdots$ বন্ধনীভুক্ত এইরূপ k-তম পদ পর্যন্ত

$=1-(-1)-(-1)-\ \cdots\ \cdots$ '$-(-1)$' সদৃশ k-তম পদ পর্যন্ত

$=1+k=1+\frac{n-1}{2}=\underline{\frac{n+1}{2}}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $=-\frac{n}{2}$ অথবা $\frac{n+1}{2}$, যখন n যথাক্রমে যুগ্ম অথবা অযুগ্ম।

টীকা। ঐ সমষ্টিকে আরও সংক্ষিপ্ত আকারে প্রকাশ করা সম্ভব—ছাত্রছাত্রীরা ইহা যাচাই করিয়া দেখিতে পারে, যথা

নির্ণেয় সমষ্টি $=\frac{1}{4}\{1-(2n+1)(-1)^n\}$, যেখানে n যুগ্ম অথবা অযুগ্ম ধনাত্মক সংখ্যার যে-কোনটি হউক না কেন।

উদা. 4. n পদের সমষ্টি নির্ণয় কর :

$$2+5+10+17+\cdots\ \cdots\ \cdots$$

সমাধান। এখানে শ্রেণীটির n-তম পদ x_n নির্ণয় ছাত্রদের নিকট কিছুটা কষ্টসাধ্য মনে হইতে পারে : লক্ষ্য করা যায়, $\{2, 5, 10, 17, \cdots\}$, ইহা এমন একটি অনুক্রম যে ইহার পর পর দুই দুইটি পদের অন্তরফলগুলি লইয়া যদি অপর একটি অনুক্রম গঠন করা হয়, তবে এই শেষোক্ত অনুক্রম $\{3, 5, 7, \cdots\}$ সমান্তর প্রগতিতে আছে এবং ইহার সাধারণ অন্তর 2.

এই ধারণা হইতে নিম্নলিখিত পদ্ধতিটি অবলম্বনের যৌক্তিকতা খুঁজিয়া পাওয়া যায় :

ধরা যাক্ $S_n=2+5+10+17+\cdots\ \cdots\ +x_n$

আবার $S_n=\quad 2+5+10+\cdots\ \cdots\ +x_{n-1}+x_n$

$\therefore$ বিয়োগ দ্বারা, $0=2+3+5+7+\cdots\ \cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত $-x_n$

$=2+\{3+5+7+\cdots\ \cdots\ (n-1)$তম পদ পর্যন্ত $\}-x_n$

$=2+\frac{(n-1)\{6+(n-2)2\}}{2}-x_n$

[সমান্তর প্রগতির $(n-1)$ পদের সমষ্টি]

বা $x_n = 2+(n-1)(n+1) = n^2+1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $= \sum_{r=1}^{n} x_r = \sum_{r=1}^{n} (r^2+1) = \sum_{r=1}^{n} r^2 + \sum_{r=1}^{n} 1$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n = \tfrac{1}{6}n(2n^2+3n+7).$$

উদা. 5. কোন শ্রেণীর n-তম পদ x_n কে যদি অন্তরফল $V_n - V_{n-1}$ এর আকারে প্রকাশ করা যায়, তবে নিম্নের পদ্ধতি (**অন্তরফলের পদ্ধতি** বা **Method of Difference** বলিয়া পরিচিত) অবলম্বন করিতে হইবে।

কোন শ্রেণীর n-তম পদ $\frac{1}{n(n+1)}$; শ্রেণীটির n পদের সমষ্টি নির্ণয় কর,

অর্থাৎ $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+ \cdots \cdots +\frac{1}{n(n+1)}$ এই সমষ্টিফল নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে, r-তম পদ $x_r = \frac{1}{r(r+1)} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}$

r এর পরিবর্তে পর পর 1, 2, 3, $\cdots$ n বসাইয়া এবং পরে উহাদের যোগ করিয়া

$$x_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$x_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{r=1}^{n} x_r = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} = \text{নির্ণেয় সমষ্টি}$$

প্রশ্নমালা III(E)

1. নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির প্রথম n পদের সমষ্টি নির্ণয় কর :

(i) $1.2.3+2.3.4+3.4.5+ \cdots \cdots \cdots$

(ii) $1+(1+3)+(1+3+5)+ \cdots \cdots \cdots$

(iii) $1^2+3^2+5^2+7^2+ \cdots \cdots \cdots$

(iv) $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+ \cdots \cdots$

(v) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+ \cdots \cdots \cdots \cdots$

(vi) $2.3+3.6+4.11+ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

[উঃ (i) $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$; (ii) $\frac{1}{6}n\,n+1)(2n+1)$;
(iii) $\frac{1}{3}n(4n^2-1)$; (iv) $\frac{1}{2}(-1)^n n(n-1)$, n যুগ্ম বা অযুগ্ম যাহাই হউক ;
(v) $\frac{n}{2n+1}$; (vi) $\frac{1}{12}n\left(3n^3+10n^2+21n+38\right)$].

2. প্রমাণ কর যে

(i) $\sum\limits_{r=1}^{n}(r+1)(r+2)=\frac{1}{3}n(n^2+6n+11)$

(ii) $\sum\limits_{r=1}^{n}\frac{1}{(3r-2)(3r+1)}=\frac{n}{3n+1}$

3. নিম্নে প্রদত্ত শ্রেণীগুলির n-তম পদ নির্ণয়পূর্বক প্রথম n পদের সমষ্টি নির্ণয় কর :

(i) $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots$ [উঃ $\frac{n(n+1)}{2}$; $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$]

(ii) $1\,2^2+2.3^2+3.4^2+4.5^2+\cdots$

[উঃ $n(n+1)^2$; $\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$]

(iii) $1.3+3.5+5.7+7.9+\cdots$ [উঃ $(2n-1)(2n+1)$; $\frac{1}{3}n(4n^2+6n-1)$]

(iv) $1.2.3+2.3.5+3.5.7\cdots$ [উঃ $n(n+1)(2n+1)$; $\frac{1}{3}n(n+1)^2(n+2)$]

(v) $1+3+6+10+\cdots$ [উঃ $\frac{n\,n+1)}{2}$; $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$]

(vi) $1+4+10+22+\cdots$ [উঃ $3.2^{n-1}-2$; 3.2^n-2n-3]

4. (i) প্রথম $(2n+1)$ পদের সমষ্টি নির্ণয় কর : $1-3+5-7+ \cdots$

[উঃ $2n+1$]

(ii) প্রথম $(3n+2)$ পদের সমষ্টি নির্ণয় কর :

$1+2-3+4+5-6+7+8-9+\cdots$ [উঃ $\frac{3}{2}(n+1)(n+2)$]

5. (i) যে অখণ্ড সংখ্যাগুলি পূর্ণবর্গ এবং যাহাদের মান 39 এবং 17823 এর মধ্যে অবস্থিত তাহাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

[ইঙ্গিত : $7^2+8^2+9^2+\cdots \quad \cdots+133^2$ এর সমষ্টি নির্ণয় করিতে হইবে।]

(ii) যে অখণ্ড পূর্ণবর্গ সংখ্যাগুলি 90 এবং 890 এর মধ্যে অবস্থিত তাহাদের সমষ্টি নির্ণয় কর। [উঃ (i) 792988 ; (ii) 8270]

6. (i) প্রথম n পদের শ্রেণীফল (sum) নির্ণয় কর :

$7+77+777+\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

[নির্ণেয় সমষ্টি $=7(1+11+111+\cdots \quad \cdots \quad \cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত)

$=\frac{7}{9}(9+99+999+\cdots \quad \cdots \quad \cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত)

$=\frac{7}{9}\{(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots \quad \cdots$ এইরূপ n-তম দল পর্যন্ত }

$=\frac{7}{9}\{(10+10^2+10^3+\ldots+10^n)-n\}=\frac{7}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}$]

(ii) n পদের সমষ্টি নির্ণয় কর :

$5+55+555+5555+\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$\cdot9+\cdot99+\cdot999+\cdot9999+ \quad \cdots \quad \cdots$

[উঃ $\frac{5}{9}\{\frac{10}{9}(10^n-1)-n\}$; $n-\frac{1}{9}(1-10^{-n})$]

7. [সমান্তর-গুণোত্তর মিশ্র শ্রেণী (Arithmetico-Geometric Series)]

(i) প্রথম n পদের শ্রেণীফল নির্ণয় কর :

$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots \quad \cdots$

[লক্ষ্য করা যায় 1, 2, 3 ... ... সমান্তর প্রগতিতে এবং x, x^2, x^3, ... গুণোত্তর প্রগতিতে অবস্থিত। সেই কারণেই এইরূপ শ্রেণীকে সমান্তর-গুণোত্তর মিশ্র শ্রেণী বলা হয়।

ধরা যাক् $S_n=1+2x+3x^2+4x^3+ \quad \cdots \quad +nx^{n-1}$;

(সাঃ অনুপাত x দ্বারা গুণ করিয়া) $x.S_n= \quad x+2x^2+3x^3+ \quad \cdots \quad +(n-1)x^{n-1}+nx^n$

বিয়োগ দ্বারা, $(1-x)S_n=1+x+x^2+x^3+ \quad \cdots \quad +x^{n-1}-nx^n$

$$=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n$$

$$\therefore \quad S_n=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}. \Big]$$

(ii) n পদের শ্রেণীফল নির্ণয় কর :

$1+3.4+5.4^2+7.4^3+\cdots \quad \cdots \quad \cdots$ [উঃ $\frac{1}{9}\{(6n-5)4^n+5\}$]

8. (i) শ্রেণীফল নির্ণয় কর

$1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots \quad \cdots+n^2x^{n-1}$

[নির্ণেয় শ্রেণীফল s ধরিলে $s(1-x)=1+3x+5x^2+\cdots+(2n-1)x^{n-1}-n^2x^n$

ধরা হইল $s'=1+3x+5x^2+\cdots\cdots+(2n-1)x^{n-1}$;

তাহা হইলে $s'(1-x)=1+2x+2x^2+\cdots+2x^{n-1}-(2n-1)x^n$

$$=\frac{2(1-x^n)}{1-x}-1-(2n-1)x^n$$

$$\therefore \quad s=\frac{2(1-x^n)}{(1-x)^3}-\frac{1+(2n-1)x^n}{(1-x)^2}-\frac{n^2x^n}{1-x}. \Big]$$

(ii) শ্রেণীফল নির্ণয় কর :

$a+(a+d)r+(a+2d)r^2+\cdots \quad \cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত

$$\left[\text{উঃ} \quad \frac{a}{1-r}-\frac{a+(n-1)d}{1-r}.\, r^n+\frac{d(r-r^n)}{(1-r)^2}. \right]$$

9. নিম্নে প্রদত্ত শ্রেণীগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর :

(i) $2.5.8+5.8.11+8.11.14+ \quad \cdots \quad \cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত

(ii) $1.5+2.6+3.7+ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত

(iii) $1^2.2+2^2.3+3^2.4+ \quad \cdots \quad \cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত

(iv) $1.2.3+4.5.6+7.8.9+ \quad \cdots \quad \cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত

(v) $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\quad\cdots\quad\cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত

(vi) $\frac{1}{1.5}+\frac{1}{3.7}+\frac{1}{5.9}+\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত

(vii) $\frac{3}{1^2.2^2}+\frac{5}{2^2.3^2}+\frac{7}{3^2.4^2}+\quad\cdots\quad\cdots$ n-তম পদ পর্যন্ত

[এখানে $x_r=\frac{2r+1}{r^2(r+1)^2}=\frac{(r+1)^2-r^2}{r^2(r+1)^2}=\frac{1}{r^2}-\frac{1}{(r+1)^2}$]

[উঃ (i) $\frac{1}{12}(3n-1)(3n+2)(3n+5)(3n+8)+\frac{20}{3}$;
(ii) $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+13)$; (iii) $\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)$;
(iv) $\frac{3}{4}n(n+1)(3n+1)(3n-2)$; (v) $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$;
(vi) $\frac{n(4n+5)}{3(2n+1)(2n+3)}$; (vii) $\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.]

3·9. অসীম গুণোত্তর শ্রেণী বা Infinite Geometric Series.

সংজ্ঞা ঃ মনে করা যাক্ $\{x_1, x_2, x_3, \cdots \cdots, x_n, \cdots\}$ একটি প্রদত্ত অনুক্রম বা Sequence. এই অনুক্রমের পদগুলি দ্বারা নিম্নবর্ণিত উপায়ে অপর একটি অনুক্রম গঠন করা যায়। যথা—

$$\{S_1, S_2, S_3, \cdots \cdots, S_n, \cdots\},$$

যেখানে $S_1=x_1$, $S_2=x_1+x_2$, $S_3=x_1+x_2+x_3$, $\cdots \quad \cdots$

$$S_n=x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=\sum_{r=1}^{n} x_r, \quad \cdots \quad \cdots$$

এই শেষোক্ত অনুক্রমটিকে আমরা সাধারণত একটি **প্রতীক** বা symbol দ্বারা প্রকাশ করি। প্রতীকটি হইল এইরূপ

$$x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots \quad \cdots+x_n+\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

বা $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ বা কেবলমাত্র Σx_n.

এইরূপ **প্রতীক** বা symbol কে আমরা বলি **অসীম শ্রেণী** বা Infinite Series ; x_n কে বলা হয় অসীম শ্রেণীর n-তম পদ এবং s_n কে বলা হয় অসীম শ্রেণীর n-তম আংশিক যোগফল বা nth partial sum.

উদা. 1. অনুক্রম $\{1^2, 1^2+2^2, 1^2+2^2+3^2, \cdots \cdots,$
$1^2+2^2+\cdots+n^2, \cdots \cdots\}$ কে

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2=1^2+2^2+3^2+\cdots \quad \cdots+n^2+\cdots$ এই অসীম শ্রেণী দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

উদা. 2. অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর একটি উদাহরণ হইল :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \quad \cdots \quad \cdots$$

ইহার nতম আংশিক যোগফল হইল $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$.

মন্তব্য : এইস্থলে ইহা জোরের সহিত বলা প্রয়োজন যে $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ একটি প্রতীক ব্যতিরেকে আর কিছু নহে। এইরূপ প্রতীকের আদৌ কোন তাৎপর্য আছে কি না তাহাই আমাদের বিচার্য। কেন না আমরা জানি যে যোগক্রিয়া বা Summation একটি **সুসংজ্ঞাত** (well-defined) প্রক্রিয়া—দুই বা যে কোন নির্দিষ্ট সংখ্যক পদের মধ্যে সর্বদাই এই প্রক্রিয়া প্রযোজ্য এবং প্রক্রিয়ার ফলস্বরূপ কেবলমাত্র একটি নির্দিষ্ট মানই বর্তমান। এই কারণেই $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots$ ইহাদের প্রত্যেকের একটি করিয়া নির্দিষ্ট মান আছে। কারণ ইহারা প্রত্যেকে সীমাবদ্ধ সংখ্যক পদের সমষ্টি।

কিন্তু $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ এই প্রতীক দ্বারা কোন নির্দিষ্ট যোগফল পাওয়া সম্ভব নয়, কারণ অসীম সংখ্যক পদের যোগ প্রক্রিয়া একটি **অসংজ্ঞাত** (undefined) ব্যাপার —প্রকৃতপক্ষে ইহা একটি অর্থহীন ব্যাপার যদি না অসীম শ্রেণীর ক্ষেত্রে **যোগফল** কথাটি সাধারণ যে যোগ প্রক্রিয়া বুঝায় তাহা ভিন্ন অন্য কোন বিশেষ অর্থে প্রয়োগ করা হয়। নিম্নের আলোচনার মাধ্যমে ইহাই প্রতিপন্ন হইবে যে বাস্তবিকপক্ষেই অসীম শ্রেণীর ক্ষেত্রে "যোগফল" শব্দটির একটি বিশেষ অর্থ আছে।

অসীম শ্রেণীর "যোগফল" সম্পর্কে একটি সুস্পষ্ট ধারণা হইবে, যদি নিম্নে প্রদত্ত উদাহরণটি সাবধানে অনুধাবন করা যায় :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \quad \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

এই অসীম গুণোত্তর শ্রেণীটির কি কিছু যোগফল আছে ? যদি থাকে, সেই যোগফলটি কত ?

এই অসীম শ্রেণীটির আংশিক যোগফলসমূহ হইল :

$$S_1 = 1, S_2 = 1 + \frac{1}{2}, S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}, \quad \cdots \quad \cdots$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \quad \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \cdots$$

গুণোত্তর প্রগতির n-সংখ্যক পদের যোগফলের সূত্র হইতে সহজেই লেখা যায়

$$S_n = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2\{1 - (\tfrac{1}{2})^n\}.$$

এক্ষণে লক্ষ্য করা যায় যে n এর মান যত বৃহত্তর হইবে, $(\frac{1}{2})^n$ এর মান তত ক্ষুদ্রতর হইবে এবং প্রকৃতপক্ষে n এর **সকল পর্যাপ্ত বৃহৎ মানের জন্য** (for

all sufficiently large values of n) ; $(\frac{1}{2})^n$ এবং 0 (শূন্য) এর সাংখ্যমানের পার্থক্য হইবে পূর্ব-নির্ধারিত ও ইচ্ছামত নির্বাচিত যে কোন ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা হইতেও ক্ষুদ্রতর।

[The numerical difference in value of $(\frac{1}{2})^n$ and the number zero can be made less than any pre-assigned and arbitrarily chosen positive number, for all sufficiently large values of n.]

এই ভাবটিকেই সংক্ষেপে নিম্ন প্রকারে লেখা হয় :

$$\lim_{n\to\infty} (\tfrac{1}{2})^n = 0$$

[ইহাকে এইভাবে **পড়িতে হইবে :** n এর মান অসীমের দিকে ঝুঁকিলে $(\frac{1}{2})^n$ এর মানের সীমা হইবে শূন্য বা limit of $(\frac{1}{2})^n$, as n tends to infinity, is zero.]

ফলত এখন S_n এর সীমাস্থ মান 2, **অর্থাৎ** $\lim_{n\to\infty} S_n = 2$.

ইহার অর্থ, n এর **সকল** পর্যাপ্ত বৃহৎ মানের ক্ষেত্রে S_n এবং 2 এর সাংখ্যমান-পার্থক্য পূর্ব-নির্ধারিত এবং ইচ্ছামত নির্বাচিত যে কোন ক্ষুদ্র ধনসংখ্যা হইতেও ক্ষুদ্রতর।

দেখা গেল, আংশিক যোগফল S_n এর সীমাস্থ মান 2; যখন অনুক্রম $\{S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots\}$ এর সীমাস্থ মানস্বরূপ এইরূপ একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা পাওয়া যায়, তখন বলা হয় যে $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ এই অসীম শ্রেণীর একটি **যোগফল** বর্তমান এবং ঐ যোগফল হইল 2 ; তখন লেখা হয় :

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \quad \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

যখন কোন অসীম শ্রেণীর উপরে বর্ণিত অর্থে একটি নির্দিষ্ট যোগফল থাকে, তখন ঐ শ্রেণীটিকে বলা হয় **অভিসারী** (Convergent) এবং শ্রেণীটি ঐ **যোগফলের** অভিমুখী হয় (the series converges to that SUM) ; তাহা না হইলে শ্রেণীটি **অপসারী** (Divergent) এবং উহার **কোন যোগফল নাই।**

দৃষ্টান্ত হিসাবে নিম্নলিখিত শ্রেণীটির বিবেচনা করা যাক :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n + \cdots ;$$

ইহার nতম আংশিক যোগফল $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; n এর মান যত বৃদ্ধি পাইতে থাকে, S_nও তত বৃদ্ধি পাইতে থাকে এবং প্রকৃতপক্ষে, n এর সকল পর্যাপ্ত বৃহৎ মানগুলির ক্ষেত্রে S_n এর মান, যে কোন বৃহৎ ধনাত্মক সংখ্যা উল্লেখ করা হোক না কেন, তাহা অপেক্ষা বৃহত্তর **হয়** এবং বৃহত্তর **থাকে।** অন্য কথায় বলা যায় যে n অসীমের দিকে ঝুঁকিলে S_n কোন নির্দিষ্ট মানের দিকে অগ্রসর হয় না, অর্থাৎ, অসীম শ্রেণীটি অভিসারী নহে এবং ফলস্বরূপ শ্রেণীটির কোন **যোগফল নাই।**

অসীম গুণোত্তর প্রগতি (Infinite Geometric Progression)

নিম্নলিখিত অসীম গুণোত্তর শ্রেণীটি বিবেচনা করা হইবে :

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}=1+r+r^2+r^3+\cdots \quad \cdots+r^{n-1}+\cdots \quad \cdots \quad (r\neq 1)$$

দেখা যায়, ইহার nতম আংশিক যোগফল

$$S_n=1+r+r^2+\cdots \quad \cdots+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r};$$

এখন যদি $-1<r<1$ হয়, তবে প্রমাণ করা যায় যে n এর মান যত বৃহৎ হইতে বৃহত্তর হয়, r^n এর মান ততই ক্ষুদ্র হইতে ক্ষুদ্রতর হয় এবং, প্রকৃতপক্ষে n এর সকল পর্যাপ্ত বৃহৎ মানের জন্য r^n এর সাংখ্যমান এবং 0'র পার্থক্য পূর্ব-নির্ধারিত যে কোন ক্ষুদ্র ধনসংখ্যা হইতেও ছোট। অন্য কথায়,

$$\lim_{n\to\infty} r^n=0, \text{ যদি } -1<r<1$$

ফলস্বরূপ $\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{1-r}$ (যদি $-1<r<1$) এবং ইহা একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা।

এইভাবে দেখা গেল অসীম শ্রেণী $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ **অভিসারী** এবং উহার একটি যোগফল আছে, উহা $\frac{1}{1-r}$, অর্থাৎ $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}=\frac{1}{1-r}$, যদি $-1<r<1$

$\frac{1}{1-r}$ কে অসীম শ্রেণী $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ এর 'অসীম পর্যন্ত যোগফল' বা sum to infinityও বলা হয়।

কিন্তু যদি $r>1$ বা $r<-1$ হয়, তবে n এর সকল পর্যাপ্ত বৃহৎ মানের জন্য r^n এর সাংখ্যমান যে কোন ধনসংখ্যা অপেক্ষা বৃহত্তর হয় এবং ঐ ধনসংখ্যা অপেক্ষা বৃহত্তর থাকে, অর্থাৎ n অসীমের অভিমুখে ঝুঁকিলে r^n কোন নির্দিষ্ট সংখ্যার অভিমুখে অগ্রসর হয় না। ফলত n অসীমের অভিমুখে চলিলে S_n কোন নির্দিষ্ট সংখ্যার অভিমুখে অগ্রসর হয় না, এবং এইজন্য অসীম শ্রেণী $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ অভিসারী নহে এবং ইহার **কোন যোগফল নাই**, (যদি $r>1$ বা যদি $r<-1$ হয়)।

স্মরণ রাখা বিধেয় : $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}=\frac{1}{1-r}$, যদি $-1<r<1$,

এবং $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}$, যদি $-1<r<1$

এই সূত্রগুলি প্রয়োগ করিয়া ইহা প্রতিষ্ঠিত করা যায় যে পৌনঃপুনিক দশমিক ভগ্নাংশকে এক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সাধারণ অনুপাতবিশিষ্ট অসীম গুণোত্তর শ্রেণীরূপে লেখা যায় এবং তখন তাহারা মূলদ ভগ্নাংশের আকারে (বা rational number এ) প্রকাশযোগ্য।

উদাঃ (i) $\cdot\dot{4} = \cdot 44444 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$$= \cdot 4 + \cdot 04 + \cdot 004 + \cdot 0004 + \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$= \frac{4}{10}\left[1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\right]$$

$$= \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \left(\because \text{ অসীম গুণোত্তর প্রগতির অসীম পর্যন্ত যোগফল} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \right)$$

$= \frac{4}{9}$, যাহা একটি মূলদ সংখ্যা।

(ii) $6{\cdot}\dot{3}0\dot{5} = 6{\cdot}305\ 305\ 305\ 305 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$$= 6 + \cdot 305 + \cdot 000305 + \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$= 6 + \frac{305}{10^3} + \frac{305}{10^6} + \frac{305}{10^9} + \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$= 6 + \frac{305}{10^3}\left[1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\right]$$

$$= 6 + \frac{305}{1000} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10^3}} \left(\text{অসীম গুণোত্তর প্রগতির যোগফল লইয়া} \right)$$

$$= 6 + \frac{305}{1000} \times \frac{1000}{999}$$

$= 6\frac{305}{999}$; ইহা একটি মূলদ সংখ্যা।

প্রশ্নমালা III(F)

1. নিম্নলিখিত অসীম গুণোত্তর শ্রেণীগুলির যোগফল নির্ণয় কর :

(i) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

(ii) $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{27} - \frac{8}{81} + \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

(iii) $48 - 36 + 27 - 20\frac{1}{4} + \quad \cdots \quad \cdots$

(iv) $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

(v) $1 + \frac{1}{1{\cdot}04} + \frac{1}{(1{\cdot}04)^2} + \quad \cdots \quad \cdots$

[উঃ (i) 2 ; (ii) $\frac{1}{5}$; (iii) $27\frac{3}{7}$; (iv) 4 ; (v) 26

2. নিম্নপ্রদত্ত পৌনঃপুনিক দশমিকগুলিকে মূলদ সংখ্যারূপে প্রকাশ কর :

(i) $0{\cdot}\dot{3}$. (ii) $0{\cdot}4\dot{2}\dot{7}$. (iii) $0{\cdot}\dot{1}\dot{8}$. (iv) $0{\cdot}1\dot{6}$.

(v) $1{\cdot}\dot{4}\dot{2}$. (vi) $6{\cdot}\dot{0}\dot{9}$. (vii) $0{\cdot}\dot{7}83\dot{6}$.

[উঃ (i) $\frac{1}{3}$; (ii) $\frac{47}{110}$; (iii) $\frac{2}{11}$; (iv) $\frac{1}{6}$; (v) $1\frac{14}{33}$; (vi) $6\frac{1}{11}$; (vii) $\frac{2612}{3333}$.]

3. (i) যদি $|x| < 1$ (অর্থাৎ যদি $-1 < x < 1$) হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$1+2x+4x^2+6x^3+8x^4+ \cdots \quad \cdots \quad = \frac{1+x^2}{(1-x)^2}$$

(ii) প্রমাণ কর যে

$$(2+\sqrt{3})+1+(2-\sqrt{3})+ \quad \cdots \quad \cdots \quad = \tfrac{1}{2}(5+3\sqrt{3})$$

(iii) অসীম পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর :

$$1+3x+7x^2+15x^3+ \quad \cdots \quad \cdots$$ যেখানে $|x| < \frac{1}{2}$.

[উঃ $\dfrac{1}{(1-x)(1-2x)}$.]

4. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+ \cdots \cdots \cdots$ এই অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর কমপক্ষে কতগুলি পদ লইলে তাহাদের যোগফল শ্রেণীটির অসীম পর্যন্ত যোগফল অপেক্ষা 10^{-3} কম হইবে ? [উঃ 10]

5. একটি দোলকের পিণ্ড (pendulum bob) পর পর দোলনের সময় যে দূরত্বগুলি অতিক্রম করে তাহারা যথাক্রমে { 16, 12, 9, ⋯ ⋯ } সে. মি. এই গুণোত্তর প্রগতিতে আছে। পিণ্ডটি থামিবার পূর্বে মোট কত দূরত্ব অতিক্রম করে তাহা নির্ণয় কর। [উঃ 64 সে. মি.]

6. (i) কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম দুইটি পদের যোগফল $\frac{5}{4}$ এবং শ্রেণীটির অসীম পর্যন্ত যোগফল $\frac{9}{4}$; যদি এইরূপ ঘটে যে শ্রেণীটি যতই বিস্তৃত হয় উহার পদগুলির মান ততই হ্রাস পায়, তাহা হইলে শ্রেণীটির প্রথম তিনটি পদ নির্ণয় কর।

[উঃ 3/4, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ বা $\frac{15}{4}$, $-\frac{5}{2}$. 5/3]

(ii) কোন অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত r এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ; প্রমাণ কর যে শ্রেণীটির যে কোন পদ এবং এই পদের **পরবর্তী** সমুদয় পদের যোগফলের অনুপাত হইল $(1-r):r$.

(iii) কোন অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর প্রত্যেক পদ, এই পদের **পরবর্তী** সমুদয় পদের যোগফলের দ্বিগুণ। শ্রেণীটির প্রথম পদ 2 হইলে শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

[উঃ 2, 2/3, 2/9, ⋯

7. (i) একটি কণা প্রথম মিনিটে 20 মিটার, দ্বিতীয় মিনিটে 19 মিটার, তৃতীয় মিনিটে $18\frac{1}{20}$ মিটার, এইভাবে চলিতেছে এবং দূরত্বগুলি গুণোত্তর শ্রেণীতে আছে। যাহা অতিক্রম করিতে পারিবে না, অধিকপক্ষে এমন কি দূরত্ব কণাটি চলিতে পারে ? [উঃ 400 মিটার]

(ii) কতিপয় অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদগুলি যথাক্রমে $1, 2, 3, \cdots, p$ এবং উহাদের সাধারন অনুপাতগুলি যথাক্রমে $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \dfrac{1}{p+1}$; যদি শ্রেণীগুলির অসীম পর্যন্ত যোগফলসমূহ যথাক্রমে, $S_1, S_2, \cdots \cdots Sp$ হয় তবে প্রমাণ কর যে

$$\sum_{r=1}^{p} Sr = \tfrac{1}{2}p(p+3).$$

8. (i) কোন অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর অসীম পর্যন্ত যোগফল 2 এবং শ্রেণীটির পদগুলির বর্গের যোগফল $\frac{4}{3}$; প্রথম পদটি নির্ণয় কর। [উঃ 8/3]

(ii) দুইটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ দুইটি একই সংখ্যা। যদি উহাদের সাধারণ অনুপাত দুইটি যথাক্রমে 0·85 এবং 0·55 হয় তবে দেখাও যে প্রথম শ্রেণীটির শ্রেণীফল দ্বিতীয়টির শ্রেণীফলের তিনগুণ।

9. নিম্নের প্রতি ক্ষেত্রে যদি অসীম পর্যন্ত যোগফল থাকে তবে উহাদের নির্ণয় কর :

(i) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+ \cdots \cdots \cdots$

(ii) $1+1+1+1+ \cdots \cdots \cdots$

(iii) $\frac{2}{3}+1+\frac{3}{2}+ \cdots \cdots \cdots \cdots$

(iv) $0{\cdot}9+0{\cdot}81+0{\cdot}729+ \cdots \cdots \cdots$

(v) $\frac{4}{7}-\frac{5}{7^2}+\frac{4}{7^3}-\frac{5}{7^4}+\frac{4}{7^5}-\frac{5}{7^6}+ \cdots \cdots$

[উঃ (i) $\frac{13}{24}$; (ii) যোগফল নাই ; (iii) যোগফল নাই ; (iv) 10 ; (v) $\frac{23}{48}$.]

3·10. বিপরীত প্রগতি (Harmonic Progressions)

সংজ্ঞা : সংখ্যার কোন অনুক্রম যথা $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$ এর $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ প্রভৃতি পদসমূহের অন্যোন্যকগুলি (reciprocals) যদি **সমান্তর প্রগতিতে** থাকে, তবে বলা হইবে ঐ অনুক্রমটি **বিপরীত প্রগতিতে** আছে। বিপরীতক্রমে, কোন অনুক্রমের পদগুলি A. P.তে থাকিলে উহাদের অন্যোন্যক দ্বারা গঠিত অনুক্রমটি বিপরীত প্রগতি (H. P.)তে থাকিবে।

উদা. 1. $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \cdots \cdots\}$ বিপরীত প্রগতিতে আছে, কারণ উহাদের অন্যোন্যকের অনুক্রম $\{2, 4, 6, 8, 10 \ldots \cdots\}$ সমান্তর প্রগতিতে।

উদা. 2. যদি $\{a, b, c\}$ H. P.তে হয় তবে, $\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\}$ A. P. তে এবং বিপরীতক্রমে, $\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\}$ A. P.তে হইলে $\{a, b, c\}$ H. P.তে থাকিবে।

উদা. 3. তিনটি রাশি যথা a, b, c H. P.তে অবস্থিত হইবে, **যদি এবং কেবল যদি** $a : c=(a-b) : (b-c)$ হয়।

সমাধান : প্রথম ধাপ : মনে করা হইল a, b, c H. P.তে আছে। তাহা হইলে সংজ্ঞা অনুসারে $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ A. P. তে আছে।

সুতরাং $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$

$\therefore \frac{a-b}{ab}=\frac{b-c}{bc}$, বা $\frac{a-b}{b-c}=\frac{ab}{bc}=\frac{a}{c}$.

দ্বিতীয় ধাপ : মনে করা যাক a, b, c এই তিনটি রাশির মধ্যে $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$ এই সম্পর্ক বিদ্যমান।

তাহা হইলে, $\frac{a-b}{a}=\frac{b-c}{c}$; বা, $1-\frac{b}{a}=\frac{b}{c}-1$;

বা $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$; বা $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$.

অর্থাৎ $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ A. P.তে আছে

$\therefore$ ***a*, *b*, *c* H. P.তে অবস্থিত।**

মন্তব্য (Observations)। H. P. সংক্রান্ত প্রশ্নগুলি সমাধানের সাধারণ রীতি হইল, উহার পদগুলি উল্টাইয়া সংশ্লিষ্ট A. P.টি গঠন করা এবং A. P.টির ধর্মগুলি প্রয়োগ করা ;

যেমন মনে করি, $\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+2b}, \cdots \quad \ldots\right\}$ H. P.তে আছে। তাহা হইলে সংজ্ঞা অনুসারে,

$\{a, \; a+b, \; a+2b, \cdots \cdot \}$ A. P.তে থাকিবে এবং এই A. P.র nতম পদ $=a+(n-1)b$;

সুতরাং সংশ্লিষ্ট H. P.টির nতম পদ হইল $\frac{1}{a+(n-1)b}$.

H. P.তে অবস্থিত যে কোন সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়ের কোন সাধারণ সূত্র নাই।

বিপরীত মধ্যক (Harmonic Mean)

1. দুইটি প্রদত্ত রাশি a এবং b এর মধ্যে বিপরীত মধ্যকটি নির্ণয় করিতে হইবে :

ধরা যাক্ a এবং b এর বিপরীত মধ্যক (H. M.) H ; তাহা হইলে a, H, b বিপরীত প্রগতিতে আছে ; সুতরাং $\frac{1}{a},\frac{1}{H},\frac{1}{b}$ সমান্তর প্রগতিতে আছে।

$$\therefore \quad \frac{1}{H}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{H}$$

$$\text{বা} \quad \frac{2}{H}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{a+b}{ab}\,; \quad \therefore \; \underline{H=\frac{2ab}{a+b}}$$

আরও সাধারণভাবে H. M. নির্ণয় :

উদা. 4. 7 এবং $\frac{1}{6}$ এর মধ্যে 40টি বিপরীত মধ্যক বসাও।

এখানে সংশ্লিষ্ট A.P.টির প্রথম পদ $\frac{1}{7}$ এবং 42তম পদ হইল 6. ধরা যাক্ সাধারণ অন্তর d ; তাহা হইলে

$$6=\tfrac{1}{7}+41d, \text{ বা } d=\tfrac{1}{7}$$

$\therefore$ $\frac{1}{7}$ এবং 6 এর মধ্যে 40টি সমান্তর মধ্যক হইল

$$\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \cdots, \frac{41}{7}$$

স্নতরাং নির্ণেয় বিপরীত মধ্যকগুলি হইল

$$\underline{\frac{7}{2}, \frac{7}{3}, \frac{7}{4}, \cdots, \frac{7}{41}}$$

উদা. 5. দুইটি ধনাত্মক ও পরস্পর ভিন্ন (distinct) রাশি x এবং y দেওয়া আছে। উহাদের সমান্তর মধ্যক, গুণোত্তর মধ্যক এবং বিপরীত মধ্যক যথাক্রমে A, G, H হইলে প্রমাণ কর যে

(i) $\underline{AH=G^2}$ এবং (ii) $\underline{A>G>H}$

এখানে $A=\frac{x+y}{2}$, $G=\sqrt{xy}$, $H=\frac{2xy}{x+y}$

স্পষ্টতঃ, $AH=\frac{x+y}{2}\cdot\frac{2xy}{x+y}=xy=G^2$

আবার, $A-G=\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}=\frac{1}{2}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=$ ধনাত্মক

($\because$ x ও y ধনাত্মকও ভিন্ন)

$\therefore A>G$

এবং $G-H=\sqrt{xy}-\frac{2xy}{x+y}=\frac{\sqrt{xy}}{x+y}(x+y-2\sqrt{xy})$

$=\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\{\sqrt{x}-\sqrt{y}\}^2=$ ধনাত্মক রাশি ($\because x$ ও y ধনাত্মক এবং $x\neq y$)

$\therefore G>H$

স্নতরাং $\underline{A>G>H}$

$x=y$ হইলে A, G, H এর মানগুলি হইতে সহজেই দেখা যায় যে $A=G=H$

$\therefore$ যে কোন দুইটি ধনাত্মক রাশির ক্ষেত্রে $\underline{A\geq G\geq H}$.

প্রশ্নমালা III(G)

1. নিম্নে প্রদত্ত অনুক্রমগুলি (sequences) কি বিপরীত প্রগতিতে আছে? উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও :

(i) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \cdots \cdots \cdots$; (ii) $2, 4, 6, \cdots \cdots \cdots$;
(iii) $\frac{1}{12}, \frac{2}{15}, \frac{1}{3}, \cdots \cdots \cdots$; (iv) $\{-1, -4, 2\}$

[উঃ (i) হাঁ; (ii) না; (iii) হাঁ; (iv) হাঁ]

2. নিম্নের বিপরীত প্রগতিটির 15তম পদ নির্ণয় কর :

$\{\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \cdots \cdots \cdots\}$. [উঃ 1/46]

3. (i) $\frac{3}{8}$ এবং 4 এর এবং (ii) $a+b$ ও $a-b$ এর বিপরীত মধ্যক কি কি?

[উঃ (i) $\frac{24}{35}$; (ii) $\frac{a^2-b^2}{a}$.]

4. (i) $\frac{1}{4}$ এবং $\frac{1}{64}$ এর মধ্যে চারিটি বিপরীত মধ্যক বসাও।

(ii) 10 এবং 20 এর মধ্যে তিনটি বিপরীত মধ্যক বসাও।

[উঃ (i) 1/16, 1/28, 1/40, 1/52 ; (ii) 80/7, 40/3, 16]

5. কোন বস্তু u সমবেগে X বিন্দু হইতে Y বিন্দুতে যাইয়া v সমবেগে আবার X বিন্দুতে ফিরিয়া আসিল। দেখাও যে যাতায়াতের গড় বেগটি u এবং v এর বিপরীত মধ্যক।

6. (i) a এবং c এর বিপরীত মধ্যক b হইলে প্রমাণ কর যে

$$\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$$

(ii) যদি কোন বিপরীত প্রগতির pতম, qতম এবং rতম পদ যথাক্রমে a, b এবং c হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$(q-r)bc+(r-p)ca+(p-q)ab=0$$

(iii) কোন বিপরীত প্রগতির mতম পদ n এবং nতম পদ m হইলে প্রমাণ কর যে ঐ প্রগতির $(m+n)$তম পদ $=(mn)/(m+n)$.

7. (i) x এবং y এর গুণোত্তর এবং বিপরীত মধ্যক যথাক্রমে 12 এবং $9\frac{3}{5}$ হইলে x এবং y নির্ণয় কর। [উঃ $x=24$, $y=6$]

(ii) a এবং b এর H.M. : a এবং b এর G.M. = 12 : 13 ; প্রমাণ কর যে a এবং b যথাক্রমে 4 এবং 9 এর অনুপাতে আছে।

8. দুইটি রাশির মধ্যবর্তী দুইটি সমান্তর মধ্যক A_1, A_2 ; দুইটি গুণোত্তর মধ্যক G_1, G_2 ; এবং দুইটি বিপরীত মধ্যক H_1, H_2 ; তাহা হইলে প্রমাণ কর যে

$$\frac{G_1G_2}{H_1H_2}=\frac{A_1+A_2}{H_1+H_2}.$$

পরীক্ষামূলক প্রশ্নাবলী (TEST PAPERS)

(সময় : এক ঘণ্টা)

1. দুইটি সমান্তর প্রগতির (A.P.) প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফলদ্বয়ের অনুপাত যদি $7n+1 : 4n+27$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে ঐ দুইটি প্রগতির একাদশ পদদ্বয়ের অনুপাত হইবে 4 : 3.

2. দুইটি সংখ্যার মধ্যে যুগ্ম সংখ্যক সমান্তর মধ্যক সংস্থাপন করা হইল। সংখ্যা দুইটির যোগফল $2\frac{1}{6}$. মধ্যকসমূহের যোগফল তাহাদের সংখ্যা অপেক্ষা মাত্র এক অধিক। মোট কতটি মধ্যক সংস্থাপন করা হইয়াছিল ?

3. একটি সমান্তর প্রগতির (A.P.) m-সংখ্যক পদের যোগফলের সহিত ঐ প্রগতির n-সংখ্যক পদের যোগফলের অনুপাত $m^2 : n^2$ হইলে, প্রমাণ কর যে

$$\frac{\text{ঐ সমান্তর প্রগতির } m\text{তম পদ}}{\text{উহার } n\text{তম পদ}}=\frac{2m-1}{2n-1}.$$

4. গুণোত্তর প্রগতিতে রহিয়াছে এমন তিনটি সংখ্যার যোগফল 38 এবং গুণফল 1728 হইলে সংখ্যাত্রয় নির্ণয় কর।

5. অসীম শ্রেণী $\sum_{n=1}^{\infty} (r^p)^{n-1}$ এর 'অসীম পর্যন্ত যোগফল' (sum to infinity কে যদি S_p দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং যদি $s_p = 1 - r^p + r^{2p} - r^{3p} + \cdots \quad \cdots$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে

$$S_p + s_p = 2S_{2p}.$$

6. কোন গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r; যদি ঐ প্রগতির $2n$-সংখ্যক পদের সমষ্টি অপর আর একটি গুণোত্তর প্রগতির (যাহার প্রথম পদ b এবং সাধারণ অনুপাত r^2) n-সংখ্যক পদের সমষ্টির সমান হয়, তাহা হইলে দেখাও যে

b = প্রথম প্রগতির প্রথম দুইটি পদের যোগফল।

7. a এবং b এর সমান্তর মধ্যক উহাদের গুণোত্তর মধ্যকের দ্বিগুণ হইলে প্রমাণ কর যে

$$a : b = 2 + \sqrt{3} : 2 - \sqrt{3}.$$

8. নিম্নলিখিত অসীম শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় কর :—

$$1 + (1+b)r + (1+b+b^2)r^2 + (1+b+b^2+b^3)r^3 + \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

যেখানে r এবং b উভয়ই ধনাত্মক প্রকৃত বা proper ভগ্নাংশ।

9. যদি কোন সমান্তর প্রগতির pতম, qতম, rতম ও sতম পদসমূহ গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে $p-q, q-r, r-s$ এই সংখ্যা তিনটিও গুণোত্তর প্রগতিতে রহিয়াছে।

10. যেই শ্রেণীর nতম পদ $2^{n-1} + 8n^3 - 6n^2$ সেই শ্রেণীর n-সংখ্যক পদের যোগফল কত হইবে তাহা নির্ণয় কর।

[উঃ 2. 12. 4. 8, 12, 18. 8. $1/(1-r)(1-br)$. 10. $2^n - 1 + n(n+1)(2n^2-1)$.]

4
জটিল সংখ্যা
(COMPLEX NUMBERS)

4·1. সূচনা

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে অখণ্ড সংখ্যামণ্ডল (system of integers) গঠন এবং উহার বিস্তৃতি মূলদ সংখ্যামণ্ডলের মাধ্যমে বাস্তব সংখ্যামণ্ডল পর্যন্ত সংখ্যার ক্রমবিকাশ বর্ণনা করা হইয়াছে। সেখানে এই কথা উল্লেখ করা হইয়াছে যে এমন কোন বাস্তব সংখ্যা নাই যাহার বর্গ ঋণাত্মক হইতে পারে ; সুতরাং x এর এমন কোন বাস্তব মান নাই যাহা $x^2+1=0$ সমীকরণকে সিদ্ধ করিতে পারে। সম্ভবতঃ Euler (1707-1783)ই হইলেন প্রথম গণিতবিদ্ যিনি $i^2=-1$ এই অর্থে $\sqrt{-1}$ এর পরিবর্তে i প্রতীকের প্রবর্তন করেন এবং a এবং b কে বাস্তব সংখ্যা ধরিয়া $a+ib$ আকারের প্রতীককে জটিল সংখ্যা (complex numbers) বলা হইল। জটিল সংখ্যার এইরূপ প্রবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে নানা কৌতূহলজনক সিদ্ধান্তের উৎপত্তি হইল। কিন্তু $\sqrt{-1}$ এর পরিবর্তে i এর নির্বিচার ব্যবহারের ফলে অনেক অসম্ভব সিদ্ধান্তেও উপনীত হইতে হইল। দৃষ্টান্তস্বরূপ, $i^2=\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\sqrt{-1\times -1}$ $=\sqrt{1}=1$, কিন্তু ইতিপূর্বে ধরা হইয়াছে $i^2=-1$; তবে কি ইহা সত্য যে $1=-1$? Gauss (1777 – 1855) এবং Hamilton (1805 – 1865)ই নিখুঁত যুক্তিসম্মত ভিত্তির উপর জটিল সংখ্যার ধারণাকে প্রতিষ্ঠিত করেন। বর্তমান অধ্যায়ে প্রচলিত দৃষ্টিকোণ হইতে সুরু করিয়া জটিল সংখ্যার বীজগণিত (algebra of complex numbers) বলিতে যাহা বুঝায় সে সম্পর্কে সংক্ষিপ্ত বিবরণ দেওয়া হইবে। যথাযথ যুক্তিপূর্ণ আলোচনার দৃষ্টিভঙ্গী হইতে জটিল সংখ্যার সংজ্ঞা হিসাবে বলিতে হয়, জটিল সংখ্যা হইল ক্রম অনুসারে সজ্জিত বাস্তব সংখ্যাযুগল (ordered pair of real numbers)। কিন্তু এইরূপ আলোচনা বর্তমান গ্রন্থের বিষয়বস্তুর বহির্ভূত। আগ্রহী ছাত্রছাত্রীদের পরবর্তী উচ্চতর পাঠক্রমে এই প্রকার আলোচনার সহিত পরিচয় ঘটিবে।

4·2. জটিল সংখ্যা (Complex numbers): প্রচলিত দৃষ্টিকোণ (A traditional approach)

সংজ্ঞা। $a+ib$, যেখানে a এবং b বাস্তব সংখ্যা, এই আকারের প্রতীক (symbol) জটিল সংখ্যা বলিয়া পরিচিত ; ইহাকে **সাধারণতঃ একটি অক্ষর z দ্বারা নির্দেশ করা হয়।** $z=a+ib$ এর অন্তর্গত বাস্তব সংখ্যা a কে ইহার **বাস্তব অংশ** (real part) এবং বাস্তব সংখ্যা b কে ইহার **কাল্পনিক অংশ** (imaginary part) বলা হয়। এইরূপও লেখা যায় যে $a=Rl\ z$ এবং $b=Im$

z ; আপাততঃ প্রতীক 'i' কে অংশ দুইটির পৃথকীকরণের প্রতীক মাত্র হিসাবে গণ্য করিতে হইবে।

দুইটি জটিল সংখ্যার সমতা : দুইটি জটিল সংখ্যা $a+ib$ এবং $c+id$ (যেখানে a, b, c, d সকলে বাস্তব) কে **সমান বলা হইবে,** যদি এবং কেবলমাত্র যদি একটির বাস্তব এবং কাল্পনিক অংশদ্বয় অপরটির বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ দুইটির সহিত যথাক্রমে সমান হয়, অর্থাৎ যদি এবং কেবলমাত্র যদি $a=c$ এবং $b=d$ হয়।

জটিল সংখ্যাসমূহের মৌলিক ক্রিয়া (Fundamental operation with complex numbers) :

(*i*) **যোগ ক্রিয়া (Addition) :** দুইটি জটিল সংখ্যা, যথা $a+ib$ এবং $c+id$ (a, b, c, d বাস্তব) এর **যোগফল** বলিতে নিম্নলিখিত নিয়ম বুঝাইবে :

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d).$$

(*ii*) **গুণক্রিয়া (Multiplication) :** নিম্নে প্রদত্ত নিয়ম অনুসারে প্রাপ্ত ফলকে জটিল সংখ্যাদ্বয়, যথা $a+ib$ এবং $c+id$ (a, b, c, d প্রত্যেকে বাস্তব) এর গুণফল বলা হইবে :

$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad).$$

টীকা 1. সংজ্ঞা দুইটির তাৎপর্য এই দাঁড়ায় যে যোগ ও গুণক্রিয়ার ক্ষেত্র পর্যন্ত জটিল সংখ্যাদ্বয় $a+ib, c+id$ বীজগণিতের পরিচিত নিয়মগুলির অধীন—একমাত্র যে বিষয়টি এস্থলে স্মরণ রাখিতে হইবে তাহা হইল :

"যখনই i^2 পাওয়া যাইবে, তখনই তাহার পরিবর্তে -1 লিখিতে হইবে।"

যথা $(1+i).(2-3i)=2-3i+2i-3i^2=2-i+3=5-i$

2. **দুইটি জটিল সংখ্যার যোগফল অথবা গুণফলও একটি জটিল সংখ্যা।**

(*iii*) **জটিল সংখ্যার ঘাত (Powers of complex numbers) :**

(*a*) জটিল সংখ্যার ঘাত ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে উহার অর্থ নিম্নরূপ :

z যদি $x+iy$ (x, y বাস্তব) আকারের কোন জটিল সংখ্যা হয় তবে

$z^2=z.z$; $z^3=z.z.z$; $z^n=z.z.\cdots\cdots n$ **তম উৎপাদক পর্যন্ত।**

যেমন $(1+2i)^2=(1+2i).(1+2i)=1+4i+4i^2=1+4i-4=4i-3.$

বিশেষত, $i^3=i.i.i.=i^2.i=-i$; $i^4=i.i.i.i=i^2.i^2=(-1).(-1)=1$;

$i^5=i^4.i=1.i=i$; $i^6=i^5.i=i.i=i^2=-1$ ইত্যাদি।

স্মরণ রাখিতে হইবে : i এর যে কোন ধনাত্মক অখণ্ড ঘাতের মান হয় i, অথবা $-i$, অথবা 1, অথবা -1.

যথা, $i^{101}=i^{100}.i=(i^2)^{50}.i=(-1)^{50}.i=i.$

(*b*) $x+iy$ (x, y বাস্তব) আকারের কোন জটিল সংখ্যা z এর ঘাত $-n$ (n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা) হইলে উহার অর্থ হইল—

$$z^{-n}=\frac{1}{z^n}.$$

যেমন, $i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=\frac{i}{-1}=-i$; $i^{-2}=\frac{1}{i^2}=-1$;

$$i^{-3}=\frac{1}{i^3}=\frac{1}{-i}=\frac{i}{-i^2}=\frac{i}{+1}=i\,;\quad i^{-4}=\frac{1}{i^4}=\frac{1}{1}=1\,;$$ ইত্যাদি।

সুতরাং i এর ঘাত যে কোন ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে উহার মান হয় i, অথবা $-i$, অথবা 1, অথবা -1.

মন্তব্য ঃ পূর্ববর্তী সংজ্ঞাগুলি হইতে নিম্নলিখিত বিষয়গুলি লক্ষ্য করা যায় ঃ

$$(a+0i)+(c+0i)=(a+c)+0i$$
$$(a+0i).\ (c+0i)=ac+0i$$

সুতরাং যোগ ও গুণক্রিয়া সম্পর্কে $a+0i$ ধরনের জটিল সংখ্যা, সংশ্লিষ্ট বাস্তব সংখ্যা aর ঠিক অনুরূপ ফল দর্শায় (অর্থাৎ কেবল a দ্বারা ঐ ক্রিয়া দুইটি সম্পন্ন করিলে যে ফল পাওয়া যায়, $a+0i$ দ্বারাও ঐ একই ফল পাওয়া যায়)। প্রকৃতপক্ষে, a যে কোন বাস্তব সংখ্যা হইলে ইহা সর্বদাই ধরিয়া লওয়া হইবে যে

$$a+0i=a.$$

বিশেষতঃ, $0+0i=0$ জটিল সংখ্যাপদ্ধতির শূন্য ;

$1+0i=1$ জটিল সংখ্যাপদ্ধতির এক।

দুইটি জটিল সংখ্যার সমতার সংজ্ঞা হইতে এখন বলা যায় যে

কোন জটিল সংখ্যার মান শূন্য হইবে, যদি এবং কেবলমাত্র যদি উহার বাস্তব এবং কাল্পনিক উভয় অংশই শূন্য হয়, অর্থাৎ $a+ib=0+i0$ হইবে যদি $a=0$ এবং $b=0$ হয়।

ইহাও পাওয়া যায় যে

$$0+ib=ib\ (\ b\text{ বাস্তব })।$$

এই আকারের জটিল সংখ্যাকে **বিশুদ্ধ কাল্পনিক সংখ্যা (Pure imaginary number)** বলা হয়।

(iv) **জটিল সংখ্যার 'নেগেটিভ' বা ঋণাত্মক অবস্থা (Negative of a complex number)**

যদি $z=x+iy$ (x, y বাস্তব) একটি জটিল সংখ্যা হয়, তবে $-x+i(-y)$ সংখ্যাকে জটিল সংখ্যা z এর **'নেগেটিভ' বা ঋণাত্মক অবস্থা** বলা হইবে এবং উহাকে $-z$ প্রতীক দ্বারা উল্লেখ করা হইবে।

যথা $-1+3i$ হইল $1-3i$ এর ঋণাত্মক অবস্থা বা নেগেটিভ।

(v) **দুইটি জটিল সংখ্যার অন্তরফল (Difference of two complex numbers)**

z_1 এবং z_2 দুইটি জটিল সংখ্যা হইলে উহাদের অন্তরফল বলিতে বুঝাইবে

$z_1-z_2=z_1+(-z_2)$ [অর্থাৎ z_1 এর সহিত z_2 এর 'নেগেটিভ' এর যোগ]

যথা, $(a+ib)-(c+id)=(a+ib)+(-c-id)=(a-c)+i(b-d)$

$$(a+ib)-(a+ib)=(a+ib)+(-a-ib)=(a-a)+i(b-b)$$
$$=0+i0=0$$

(vi) **দুইটি জটিল সংখ্যার মধ্যে ভাগক্রিয়া (Division of two complex number)**

যদি z_1 এবং z_2 $(z_2 \neq 0)$ দুইটি জটিল সংখ্যা হয়, তবে ভাগফল z_1/z_2 হইল এমন একটি অনন্য (unique) জটিল সংখ্যা z (অবশ্য যদি এই রকম z বিদ্যমান থাকে), যেন $z\,z_2 = z_1$ হয়।

উদা : ধরা যাক $\dfrac{2+3i}{3+4i} = x+iy$, যেখানে x এবং y বাস্তব। তাহা হইলে সংজ্ঞা অনুসারে

$$2+3i = (x+iy)(3+4i) = (3x-4y) + i(3y+4x)$$

দুইটি জটিল রাশির সমতার সংজ্ঞা অনুসারে, অর্থাৎ বাস্তব অংশ দুইটিকে সমান এবং কাল্পনিক অংশ দুইটিকে সমান লিখিয়া পাওয়া যায়

$$2 = 3x - 4y \quad \text{এবং} \quad 3 = 4x + 3y$$

সমাধান পূর্বক পাওয়া যায় $x = 18/25$; $y = 1/25$

$$\therefore \ \frac{2+3i}{3+4i} = \frac{18}{25} + i\frac{1}{25}$$

এখন কোন **জটিল সংখ্যার বিপরীত জটিল সংখ্যা** বলিতে কি বুঝায় তাহার ধারণা দেওয়া হইবে, এবং তাহার পরই উপরের অনুরূপ ভাগফল নির্ণয়ের কার্যকরী নিয়মের কথা বলা হইবে।

বিপরীত জটিল সংখ্যা (Conjugate complex numbers)

সংজ্ঞা। যদি $z = x+iy$ হয়, যেখানে x ও y বাস্তব, তবে জটিল সংখ্যা $x-iy$ (অর্থাৎ প্রদত্ত জটিল সংখ্যার কাল্পনিক অংশের চিহ্নটিকে কেবল পরিবর্তন করিয়া প্রাপ্ত) সংখ্যাকে জটিল সংখ্যা z এর বিপরীত জটিল সংখ্যা বলা হয় এবং উহাকে $\bar{z}$ এইরূপ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

যথা যদি, $z = -3+2i$ হয় তবে $\bar{z} = -3-2i$

উক্ত **সংজ্ঞা** হইতে এখন নিম্নবর্ণিত তথ্যগুলি পাওয়া যায় :

1. $\overline{(\bar{z})} = z$, কারণ $z = x+iy$ হইলে $\bar{z} = x-iy$

এবং $x-iy$ এর বিপরীত জটিল রাশিটি আবার $x+iy$ হয় ; সুতরাং বলা যায় :

কোন জটিল সংখ্যার বিপরীত জটিল সংখ্যার বিপরীত হইল মূল সংখ্যাটি নিজে।

2. যদি z_1 এবং z_2 দুইটি জটিল সংখ্যা হয় তবে

$$\overline{(z_1+z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \ ; \ \overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2 \ ; \ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

কারণ, $z_1 = x_1 + iy_1$ এবং $z_2 = x_2 + iy_2$ হইলে (x_1, x_2, y_1, y_2 সকলে বাস্তব)

$z_1 + z_2 = (x_1+x_2) + i(y_1+y_2)$ এবং ইহার বিপরীত জটিল সংখ্যা $= (x_1+x_2) - i(y_1+y_2)$

$$\therefore \ \overline{(z_1+z_2)} = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

আবার $z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$

এবং $\overline{(z_1z_2)}=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1)$

পুনরায় $\bar{z}_1=x_1-iy_1$ এবং $\bar{z}_2=x_2-iy_2$ বলিয়া

$$\bar{z}_1.\bar{z}_2=(x_1-iy_1)(x_2-iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1)$$

সুতরাং $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1.\bar{z}_2$.

তৃতীয় অংশটিও অনুরূপভাবে প্রতিষ্ঠিত করা যায় ; **নতুবা** উহাকে নিম্নপ্রকারেও প্রমাণ করা যায় :

ধরা যাক্ $z=\dfrac{z_1}{z_2}$; তাহা হইলে $zz_2=z_1$

বা $\overline{(zz_2)}=\overline{z_1}$; $\therefore\ \bar{z}.\bar{z}_2=\overline{z_1}$; $\therefore\ \bar{z}=\dfrac{\overline{z_1}}{\bar{z}_2}$

বা $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\bar{z}_2}$.

3. যদি কোন জটিল সংখ্যা $z=x+iy$ (x, y বাস্তব) হয়, তবে স্পষ্টত $z+\bar{z}=2x$ এবং $z-\bar{z}=2iy$.

4. যেহেতু $z+\bar{z}=2x$, সুতরাং $(z+\bar{z})^2$ বাস্তব। প্রকৃতপক্ষে,

$$(z+\bar{z})^2\geqslant0$$

যেহেতু $z-\bar{z}=2iy$, সুতরাং $(z-\bar{z})^2$ বাস্তব এবং

$$(z-\bar{z})^2\leqslant0,$$

কারণ $(z+\bar{z})^2=(2x)^2=4x^2$, এবং $4x^2$ ধনাত্মক, যখন $x\neq0$

$\therefore\ (z+\bar{z})^2\geqslant0$

এবং $(z-\bar{z})^2=(2iy)^2=-4y^2$, এবং $-4y^2$ ঋণাত্মক, যখন $y\neq0$

$\therefore\ (z-\bar{z})^2\leqslant0$.

5. জটিল সংখ্যা $x+iy$ এবং ইহার বিপরীত জটিল সংখ্যা $x-iy$ এর গুণফল হইল x^2+y^2 (x, y বাস্তব)

দুইটি জটিল সংখ্যার মধ্যে ভাগক্রিয়ার কার্যকরী নিয়ম :

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}$$ [লব ও হর উভয়কে হরের বিপরীত জটিল সংখ্যা দ্বারা গুণ করিয়া]

$$=\frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i.\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

যথা : $\dfrac{2+3i}{3+4i}=\dfrac{(2+3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\dfrac{6+12+9i-8i}{3^2+4^2}=\dfrac{18+i}{25}=\dfrac{18}{25}+i.\dfrac{1}{25}$

টীকা। কোন একটি রাশি $x+iy$ কে বাস্তব রাশিতে পরিণত করিবার জন্য ইহাকে ইহার বিপরীত জটিল রাশির দ্বারা গুণ করিতে হইবে এবং ইহার জন্য অংকটির মধ্যে প্রয়োজনীয় যে কার্য করা দরকার তাহা করিতে হইবে।

উপরে প্রদর্শিত পদ্ধতিতে হরটিকে বাস্তব রাশিতে পরিণত করা ছিল উদ্দেশ্য এবং সেইজন্য হরটির বিপরীত জটিল রাশির দ্বারা লব ও হরকে গুণ করা হইয়াছে।

4·3. জটিল সংখ্যার 'মডিউলাস' (Modulus) বা পরম মান (Absolute Value).

সংজ্ঞা। ধরা যাক্ $z=x+iy$, যেখানে x ও y বাস্তব সংখ্যা। তাহা হইলে z এর 'মডিউলাস' বা পরম মান বলিতে বুঝায় $+\sqrt{x^2+y^2}$ এবং ইহাকে সংক্ষেপে মড্ z বা $|z|$ এইভাবে উল্লেখ করা হয়।

দ্বিতীয় প্রকার সংজ্ঞা। জটিল সংখ্যা z এর মডিউলাস হইল এমন একটি **অ-ঋণাত্মক** সংখ্যা যাহার বর্গ$=z.\bar{z}$, অর্থাৎ $|z|^2=z\bar{z}$ এবং $|z|=+\sqrt{z\bar{z}}$ $=+\sqrt{(x+iy)(x-iy)}=+\sqrt{x^2+y^2}$.

প্রসঙ্গতঃ লক্ষণীয়, জটিল সংখ্যা পদ্ধতির অন্তর্ভুক্ত হিসাবে শূন্য (zero) সংখ্যার মডিউলাস$=|0+i0|=0$.

নিম্নলিখিত প্রাসঙ্গিক সিদ্ধান্তসমূহ সযত্নে প্রণিধানযোগ্য :

1. দুইটি জটিল সংখ্যার গুণফলের মডিউলাস সংখ্যা দুইটির মডিউলাসদ্বয়ের গুণফলের সমান।

ধরা যাক্ $z_1=x_1+iy_1$ এবং $z_2=x_2+iy_2$ (x_1, x_2, y_1, y_2 বাস্তব)।

তাহা হইলে $z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)$

$$=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)\text{।}$$

$$\therefore\quad |z_1z_2|=+\sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2}$$
$$=+\sqrt{x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2}$$
$$=+\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$$
$$=+\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}=|z_1|\,|z_2|.$$

অন্য প্রকারে : $|z_1z_2|^2=(z_1z_2)\cdot(\overline{z_1z_2})=(z_1z_2)\cdot(\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2)$
$$=(z_1\cdot\bar{z}_1)(z_2\cdot\bar{z}_2)=|z_1|^2\cdot|z_2|^2.$$

উভয় পক্ষের ধনাত্মক বর্গমূল লইলে $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

2. দুইটি জটিল সংখ্যার ভাগফলের মডিউলাস, যথা, z_1/z_2 $(z_2\neq 0)$, সংখ্যা দুইটির মডিউলাসদ্বয়ের ভাগফলের সমান।

ধরা যাক্ $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ (x_1, x_2, y_1, y_2 বাস্তব)।

মনে করা হইল $z_2\neq 0$ অর্থাৎ $|z_2|\neq 0$.

তাহা হইলে $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\dfrac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i.\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

$$\therefore\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=+\sqrt{\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)^2+\left(\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)^2}$$

$$= +\sqrt{\frac{(x_1x_2+y_1y_2)^2+(x_2y_1-x_1y_2)^2}{(x_2^2+y_2^2)^2}}$$

$$= +\sqrt{\frac{x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2+x_1^2y_2^2}{(x_2^2+y_2^2)^2}}$$

$$= +\sqrt{\frac{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}{(x_2^2+y_2^2)^2}}$$

$$= +\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}. \quad (\because \ |z_2| \neq 0)$$

প্রশ্নমালা IV(A)

1. $3\sqrt{-25}=3\sqrt{25(-1)}=3\sqrt{25}.i=15i$, এই দৃষ্টান্ত অনুসরণে নিম্নের প্রতিটি রাশিকে i সহযোগে প্রকাশ কর :

$\sqrt{-36}$; $2\sqrt{-49}$; $\dfrac{-4+\sqrt{-4}}{2}$; $3\sqrt{12}-3\sqrt{-12}$;

$4\sqrt{-81}-3\sqrt{-36}+4\sqrt{25}$; $\quad 2\sqrt{-72}+3\sqrt{-32}$.

[উঃ $6i$; $14i$; $-2+i$; $6\sqrt{3}-6\sqrt{3}i$; $18i+20$; $24\sqrt{2}i$.]

2. নির্দেশিত ক্রিয়া অনুসরণপূর্বক সরল কর :

(i) $(3+4i)+(-1-6i)$; (ii) $(-2+5i)-(3-2i)$;

(iii) $(3+\sqrt{-8})-(2-\sqrt{-32})$; (iv) $\sqrt{-3}.\sqrt{-12}$;

(v) $(2i)^4+(-i\sqrt{2})(i\sqrt{2})$; (vi) $(-3+4i)(-3-4i)$;

(vii) $5i(2-i)$; (viii) $(3-4i)^2$;

(ix) $(1+i)(2+2i)(3-i)$; (x) $(i-1)^3$;

(xi) $(1-i)^4$; (xii) $(i+2)^5$;

(xiii) $\dfrac{2-5i}{4+3i}$; (xiv) $\dfrac{-1}{2-2i}$;

(xv) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}i}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}i}$; (xvi) $\dfrac{3-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}i}$;

(xvii) $\dfrac{1}{1-2i}+\dfrac{3}{1+4i}$; (xviii) $\dfrac{5}{3-4i}+\dfrac{10}{4+3i}$;

(xix) $\dfrac{i+i^2+i^3+i^4}{1+i}$; (xv) $\dfrac{(4i^{11}-i)^2}{1+2i}$.

[উঃ (i) $2-2i$; (ii) $-5+7i$; (iii) $1+6\sqrt{2}i$; (iv) -6 ; (v) 18 ; (vi) 25 ; (vii) $5+10i$; (viii) $-7-24i$; (ix) $4+12i$; (x) $2+2i$; (xi) -4 ; (xii) $-38+41i$; (xiii) $-\frac{1}{25}(7+26i)$; (xiv) $-\frac{1}{4}(1+i)$; (xv) $\frac{1}{5}(1+2\sqrt{6}i)$; (xvi) $-(1+\frac{3}{2}\sqrt{2}i)$; (xvii) $\frac{1}{85}(32-26i)$; (xviii) $\frac{1}{5}(11-2i)$; (xix) 0 ; (xx) $3+4i$.]

3. z এর বিপরীত করণী $\bar{z}$ (conjugate surd) নির্ণয় কর :

(i) $2+i\sqrt{3}$; (ii) $2\sqrt{-5}-5\sqrt{2}$; (iii) $-\sqrt{5}-i\sqrt{5}$;
(iv) $3+i\sqrt{7}-2\sqrt{2}$; (v) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+i\sqrt{5}$.

[উঃ (i) $2-i\sqrt{3}$; (ii) $-5\sqrt{2}-2\sqrt{-5}$; (iii) $-\sqrt{5}+i\sqrt{5}$;
(iv) $3-2\sqrt{2}-i\sqrt{7}$; (v) $\sqrt{2}+\sqrt{3}-i\sqrt{5}$.]

4. নিম্নের প্রতিটি রাশিকে $A+iB$ এর আকারে প্রকাশ কর (প্রতি ক্ষেত্রে হরকে মূলদ রাশিতে পরিণত করিতে হইবে) :

(i) $\dfrac{(8+3i)(4+5i)}{(2+7i)(9-5i)}$; (ii) $\dfrac{a+ib}{a-ib}-\dfrac{a-ib}{a+ib}$;

(iii) $\dfrac{a+bi+ci^2+di^3}{a-bi-ci^2-di^3}$; (iv) $\dfrac{1}{(i-1)^3}$;

(v) $\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+i\sqrt{6}}$; (vi) $\dfrac{9+19i}{5+3i}-\dfrac{13(12i-1)}{4+7i}$;

(vii) $\dfrac{(\sqrt{3}+i\sqrt{5})(i\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+i\sqrt{5}}$; (viii) $\dfrac{12}{3+i\sqrt{7}-2\sqrt{2}}$;

(ix) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{-7}}{\sqrt{5}+i\sqrt{5}}$; (x) $\dfrac{1}{2\sqrt{-5}-5\sqrt{2}}$.

[সমাধান (iii) প্রদত্ত রাশি

$$=\frac{(a-c)+i(b-d)}{(a+c)-i(b+d)}=\frac{\{(a-c)+i(b-d)\}\{(a+c)+i(b+d)\}}{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

$$=\frac{a^2-c^2-b^2+d^2+i\{(a+c)(b-d)+(a-c)(b+d)\}}{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

$$=\frac{(a^2-c^2-b^2+d^2)+2i(ab-cd)}{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

(v) প্রদত্ত রাশি

$$=\frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-i\sqrt{6})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{6})^2}$$

$$=\frac{(2+3\sqrt{2}+\sqrt{6})+i(3-2\sqrt{3}+\sqrt{6})}{11+2\sqrt{6}}$$

(এখন হরের করণী নিরসন করিতে হইবে)

$$=\frac{\{(2+3\sqrt{2}+\sqrt{6})+i(3-2\sqrt{3}+\sqrt{6})\}(11-2\sqrt{6})}{(11+2\sqrt{6})(11-2\sqrt{6})}$$

$$=\frac{10+33\sqrt{2}-12\sqrt{3}+7\sqrt{6}}{97}+i\frac{21+12\sqrt{2}-22\sqrt{3}+5\sqrt{6}}{97}\Big]$$

[উঃ (i) $\frac{69+35i}{106}$; (ii) $0+i\frac{4ab}{a^2+b^2}$; (iv) $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$; (vi) $1-i$;
(vii) $\frac{(8\sqrt{3}+18\sqrt{2})+i(88\sqrt{5}-10\sqrt{30})}{76}$; (viii) $\frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{7}(2+\sqrt{2})}{2}$;
(ix) $-\frac{i\sqrt{35}}{5}$; (x) $-\frac{5\sqrt{2}+2i\sqrt{5}}{70}$.]

5. মডিউলাস (Modulus) বা পরম মান নির্ণয় কর :

(i) $2+2i$; (ii) $1+\sqrt{3}i$; (iii) $-3+3i$;

(iv) $-1-\sqrt{3}i$; (v) $\sqrt{3}-i$; (vi) $-19+i10\sqrt{6}$;

(vii) $\dfrac{8+i}{12+5i}\left[\,|z| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{\sqrt{8^2+1^2}}{\sqrt{12^2+5^2}} = \dfrac{\sqrt{65}}{\sqrt{169}} = \dfrac{1}{13}\sqrt{65}\right]$;

(viii) $\dfrac{21+7i}{4+3i}$; (ix) $(2+i)(5+i)(8+i)$; (x) $\dfrac{(3+i)(1+2i)}{(2-i)(2+3i)}$;

(xi) $\dfrac{a+ib}{a-ib}-\dfrac{a-ib}{a+ib}$; (xii) $\dfrac{2+3i}{3-5i}+\dfrac{2-3i}{3+5i}$;

(xiii) $\dfrac{(1+3i)(1+4i)(1+5i)}{(2+3i)(6+7i)}$; (xiv) $\dfrac{(2+3i)^2}{(8-i)^3}(9+2i\sqrt{11})$.

[ইঙ্গিত : $\dfrac{|2+3i|\;|2+3i|\;|9+2i\sqrt{11}|}{|8-i|\;|8-i|\;|8-i|}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$.]

[উঃ (i) $2\sqrt{2}$; (ii) 2 ; (iii) $3\sqrt{2}$; (iv) 2 ; (v) 2 ; (vi) 31 ; (viii) 5 ; (ix) $65\sqrt{2}$; (x) $3\sqrt{3}-2i$; (xi) $\dfrac{4ab}{a^2+b^2}$; (xii) $\frac{9}{17}$; (xiii) 2 ; (xv) $\frac{1}{2}$.]

6. (i) z যদি বাস্তব সংখ্যা হয় তবে $\bar{z}=z$, কিন্তু z যদি বিশুদ্ধ কাল্পনিক সংখ্যা হয় তবে $\bar{z}=-z$, এই উক্তিটির সত্যতা বিচার কর।

(ii) যদি z এবং ω দুইটি যে কোন জটিল সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\text{Rl}(z\bar{\omega})=\frac{1}{2}(z\bar{\omega}+\bar{z}\omega)$.

[ইঙ্গিত : $\text{Rl}\, z=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$ এই সূত্র প্রয়োগ কর।]

(iii) যে কোন জটিল রাশি z এর ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে $|\bar{z}| = |z|$ এবং $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\bar{z}}$.

(iv) প্রমাণ কর যে

$$\text{Rl}\, z \leqslant |\text{Rl}\, z| \leqslant |z|;$$
$$\text{Im}\, z \leqslant |\text{Im}\, z| \leqslant |z|.$$

7. (i) x বাস্তব সংখ্যা হইলে ইহার কোন্ কোন্ মানে $(x+i)(1-xi)$ যথাক্রমে বাস্তব হইবে এবং কাল্পনিক হইবে ?

(ii) ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n এর কোন্ ক্ষুদ্রতম মান এর জন্য $(\sqrt{3}+i)^n$ বিশুদ্ধ কাল্পনিক রাশি হইবে ? বাস্তব হইবে ?

(iii) n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে $(-\sqrt{-1})^{4n+3}$ কে i সহযোগে প্রকাশ কর।

8. (i) যদি $x=3+2i$ হয় তবে নিম্নে প্রদত্ত রাশির মান নির্ণয় কর :

$$x^4-4x^3+4x^2+8x+39$$

[**সমাধান ঃ** এখানে $x-3=2i$, বা, $(x-3)^2=(2i)^2$;

বা, $x^2-6x+9=-4$, বা, $x^2-6x+13=0$.

এখন, $x^4-4x^3+4x^2+8x+39$
$$=x^2(x^2-6x+13)+2x(x^2-6x+13)+3(x^2-6x+13)$$
$$=(x^2-6x+13)(x^2+2x+3)$$
$$=0.$$]

(ii) $x=2+i$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$x^4-3x^3+2x^2+x+5=0 \text{ এবং } x^3-3x^2+x+5=0.$$

(iii) যদি $x=1+i$ এবং $y=1-i$ হয় তবে প্রমাণ কর যে,
$$x^2+xy+y^2=2.$$

9. $a^2+b^2=1$ হইলে প্রমাণ কর যে, **x এর একটি বাস্তব মান** নিম্নলিখিত সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে ঃ
$$\frac{1-ix}{1+ix}=a-ib.$$

[**ইঙ্গিত ঃ** মনে করা যাক $x=\alpha+i\beta$ (α, β বাস্তব) প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

তাহা হইলে $$\frac{1-ix}{1+ix}=\frac{1-i(\alpha+i\beta)}{1+i(\alpha+i\beta)}=\frac{(1+\beta)-i\alpha}{(1-\beta)+i\alpha}=\frac{1-\alpha^2-\beta^2-2i\alpha}{(1-\beta)^2+\alpha^2},$$

সুতরাং বাস্তব অংশ দুইটি পরস্পর সমান এবং কাল্পনিক অংশ দুইটি সমান লিখিয়া
$$a=\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{(1-\beta)^2+\alpha^2},\quad b=\frac{-2\alpha}{(1-\beta)^2+\alpha^2}.$$

এখন $$a^2+b^2=\frac{(1-\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2}{\{(1-\beta)^2+\alpha^2\}^2}$$

দেখা যায়, $\beta=0$ হইলে $a^2+b^2=1$; সুতরাং প্রদত্ত সম্পর্ককে সিদ্ধ করে, xএর এমন একটি বাস্তব মান পাওয়া যায়, যদি $a+b^2=1$ হয়।]

10. (i) $(a-ib)(c-id)=x-iy$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$$(a+ib)(c+id)=x+iy$$

(ii) যদি $(a-ib)/(c-id)=X-iY$ হয় তবে প্রমাণ কর যে,
$$(a+ib)/(c+id)=X+iY.$$

(iii) যদি $x=\dfrac{2b}{b^2+1}$ $(b>1)$ হয় তবে প্রমাণ কর যে,
$$\frac{\sqrt{1+x}-i\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+i\sqrt{1-x}}=\frac{2b-(a^2-1)i}{a^2+1}$$

যদি $b<1$ হয় তবে কি হইবে ?

11. z_1 এবং z_2 যদি দুইটি জটিল সংখ্যা হয় তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

(i) $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$

প্রমাণ ঃ $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2(\overline{z_1+z_2})$ (সংজ্ঞা অনুসারে)
$$=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) \quad (\text{পৃঃ 94 দ্রষ্টব্য})$$
$$=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2+(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1).$$

লক্ষ্য কর $z_1\bar{z}_2$ এবং $z_2\bar{z}_1$ এই দুইটি পরস্পর বিপরীত জটিল সংখ্যা।

অতএব $(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)^2 \geqslant 0$ এবং $(z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1)^2 \leqslant 0$ (পৃ: 95 দ্রষ্টব্য)।

আবার $(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)^2=(z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1)^2+4|z_1|^2|z_2|^2$

$$\therefore\ z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1 \leqslant 2|z_1||z_2|$$

$\therefore\ |z_1+z_2|^2 \leqslant |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|,$

অর্থাৎ $\leqslant (|z_1|+|z_2|)^2$

$$\therefore\ |z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|.$$

(*ii*) (*i*) এর সত্যতা ধরিয়া লইয়া দেখাও যে

$$|z_1+z_2| \geqslant \big||z_1|-|z_2|\big|$$

অর্থাৎ $\big||z_1|-|z_2|\big| \leqslant |z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$

4·4. ভগ্নাংশ ঘাতবিশিষ্ট জটিল সংখ্যা (Fractional powers of a complex number)

z কোন জটিল সংখ্যা এবং n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে পূর্বে z^n এবং z^{-n} এর নিম্নরূপ অর্থ করা হইয়াছে, যথা :

$z^n = z.\ z.\ z.\ \cdots\ \cdots$ n সংখ্যক উৎপাদক ; $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$.

প্রতি ক্ষেত্রে প্রাপ্ত ফলও জটিল সংখ্যা। এখন p এবং q অখণ্ড সংখ্যা হইলে $z^{p/q}$ এর অর্থ ব্যাখ্যা করা হইবে। সূত্রটির সাধারণ আকারের কোনরূপ হানি না করিয়া এইরূপ ধরিয়া লওয়া যাইতে পারে যে q ধন অখণ্ড সংখ্যা এবং p হয় ধন অথবা ঋণ অখণ্ড সংখ্যা।

সংজ্ঞা। মনে করা যাক α একটি জটিল সংখ্যা এবং p ও q ধন অখণ্ড সংখ্যা। তাহা হইলে $\alpha^{p/q}$ (ইহাকে $\sqrt[q]{\alpha^p}$ এই আকারেও লেখা হয়) বলিতে z এর সেইসব মান বুঝায় যাহারা $z^q=\alpha^p$ এই সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে। z এর এইরূপ প্রতিটি মানকে α^p এর qতম মূল বলা হয়। এস্থলে মনে রাখিতে হইবে যে α^p এর এই qতম মূলগুলির প্রত্যেকটি একটি জটিল সংখ্যা।

এখন $\alpha^{-p/q}$ এর অর্থ হইল : $\alpha^{-p/q}=\dfrac{1}{\alpha^{p/q}}$.

উদা. 1. $(2+3i)^{4/3}$ বা $\sqrt[3]{(2+3i)^4}$ বলিতে z এর যে মানগুলি $z^3=(2+3i)^4$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে, তাহাদের বুঝায়। এখানে z এর এইরূপ তিনটি মান আছে ; অর্থাৎ $(2+3i)^4$ এর তিনটি ঘনমূল পাওয়া যাইবে।

উদা. 2. $(3+4i)^{\frac{1}{2}}$ বা $\sqrt{3+4i}$ বলিতে z এর এমন মান বুঝায় যাহারা $z^2=3+4i$ কে সিদ্ধ করে। প্রতিটি মানকে $3+4i$ এর বর্গমূল বলে : $3+4i$ এর দুইটি বর্গমূল আছে।

কোন জটিল সংখ্যা $a+ib$ (যেখানে a ও b বাস্তব) এর বর্গমূল নির্ণয়ঃ

ধরা যাক্ $\sqrt{a+ib}=x+iy$ (x, y বাস্তব)

সুতরাং সংজ্ঞা হইতে লেখা যায়,

$$(x+iy)^2=a+ib$$

$$\text{বা,}\quad x^2-y^2+i.2xy=a+ib$$

এখন বাস্তব অংশ দুইটি পরস্পর সমান এবং কাল্পনিক অংশ দুইটিও পরস্পর সমান বলিয়া

$$a=x^2-y^2,\quad 2xy=b$$

যেহেতু $(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=a^2+b^2$,

$\therefore\quad x^2+y^2=+\sqrt{a^2+b^2}$,

($\because$ x এবং y বাস্তব বলিয়া x^2+y^2 ঋণাত্মক নহে)

ইহা হইতে সহজেই পাওয়া যায় যে,

$$x^2=\tfrac{1}{2}[a+\sqrt{a^2+b^2}],\quad y^2=\tfrac{1}{2}[+\sqrt{a^2+b^2}-a]$$

সুতরাং $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(a+\sqrt{a^2+b^2})^{\frac{1}{2}},\ y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a^2+b^2}-a)^{\frac{1}{2}}$.

এখন বিবেচনা করিতে হইবে, x এবং y এর উপযুক্ত চিহ্ন কি হইবে। লক্ষ্য করা যায়, x এবং y এর এইরূপ চিহ্ন নির্বাচন করিতে হইবে যেন $2xy=b$ হয়, অর্থাৎ **যদি b ধনাত্মক হয়**, তবে x এবং y এর একই চিহ্ন হইতে হইবে (অর্থাৎ উভয়েই হয় ধনাত্মক নতুবা ঋণাত্মক); কিন্তু **b যদি ঋণাত্মক হয়**, তবে x এবং y এর চিহ্ন পরস্পর বিপরীত হইবে (অর্থাৎ একটির ধনাত্মক ও অপরটির ঋণাত্মক চিহ্ন হইবে)। উভয় ক্ষেত্রেই x এবং y এর পূর্বে দুই প্রকার চিহ্ন থাকায় এইরূপ সিদ্ধান্ত করিতে হয় যে $a+ib$ এর দুইটি বর্গমূল আছে ; ইহাদের মধ্যে পার্থক্য কেবল চিহ্নের।

সুতরাং b ধনাত্মক হইলে, $\sqrt{a+ib}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\left[(a+\sqrt{a^2+b^2})^{\frac{1}{2}}+(-a+\sqrt{a^2+b^2})^{\frac{1}{2}}\right]$$

এবং b ঋণাত্মক হইলে, $\sqrt{a+ib}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\left[(a+\sqrt{a^2+b^2})^{\frac{1}{2}}-(-a+\sqrt{a^2+b^2})^{\frac{1}{2}}\right].$$

উদা.। $4+3i$ এর বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইবে।

ধরা যাক্ $\sqrt{4+3i}=x+iy$, যেখানে x এবং y বাস্তব।

$$\therefore\ 4+3i=x^2-y^2+i.2xy$$

বাস্তব অংশ দুইটি সমান এবং কাল্পনিক অংশ দুইটি সমান লিখিয়া,

$$x^2-y^2=4,\quad 2xy=3.$$

$\therefore\ (x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=4^2+3^2=25$

$\therefore\ x^2+y^2=5$ ($\because$ x ও y বাস্তব বলিয়া $x^2+y^2=-5$ হইতে পারে না)

এখন $x^2+y^2=5$ এবং $x^2-y^2=4$ এই দুই সমীকরণ সমাধান করিলে,

$$x^2=9/2,\ y^2=1/2\ ;\ \text{সুতরাং } x=\pm\frac{3}{\sqrt{2}},\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

যেহেতু $2xy=3$ (ধনাত্মক), সুতরাং x ও y এর চিহ্ন অবশ্যই একই হইবে (অর্থাৎ হয় উভয়েই ধনাত্মক নতুবা উভয়েই ঋণাত্মক)।

$$\therefore\ \sqrt{4+3i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(3+i)$$

অনেক সময় পর্যবেক্ষণ (inspection) দ্বারা এইরূপ ক্ষেত্রে বর্গমূল নির্ণয় সহজতর হয়, যথা :

$$4+3i=\tfrac{1}{2}(8+6i)=\tfrac{1}{2}[8+2.3i]=\tfrac{1}{2}[3^2+i^2+2.3.i]$$

$$=\tfrac{1}{2}(3+i)^2\ ;\ \text{সুতরাং}\ \sqrt{4+3i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(3+i).$$

দুইটি বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ ক্ষেত্র :

$$\sqrt{i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\ ;\quad \sqrt{-i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i).$$

টীকা। (বিশেষ কয়েকটি ক্ষেত্র ব্যতীত) অনুরূপ পদ্ধতিতে ঘনমূল, চতুর্থমূল প্রভৃতি নির্ণয় সর্বদা এইরূপ সহজ হয় না। একটি বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ ক্ষেত্র, যথা একের ঘনমূল নির্ণয় সম্পর্কে নিম্নে আলোচনা করা হইল।

একের ঘনমূল (The Cube roots of unity) :

ধরা যাক্ $z=\sqrt[3]{1}$; তাহা হইলে সংজ্ঞা অনুসারে $z^3=1$, বা, $z^3-1=0$.

সুতরাং $(z-1)(z^2+z+1)=0$; $\therefore$ হয় $z=1$, অথবা $z^2+z+1=0$.

এখন $z^2+z+1=0$ হইতে পাওয়া যায় $(z+\frac{1}{2})^2=-\frac{3}{4}$

$$\therefore\ z+\tfrac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{-3}}{2}=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3}i.$$

$$\text{বা, } z=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

সুতরাং **একের ঘনমূল তিনটি**, যথা : $1,\ \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$;

ইহার মধ্যে প্রথমটি বাস্তব এবং অপর দুইটি পরস্পরের বিপরীত (conjugate) জটিল সংখ্যা (ইহারা **একের কাল্পনিক ঘনমূল** বলিয়া পরিচিত)।

এখানে একটি কৌতূহলজনক বিষয় লক্ষ্য করিবার মত, যথা :

একের কাল্পনিক ঘনমূল দুইটির যে কোন একটির বর্গ অপরটির সমান, অর্থাৎ,

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \text{ এবং } \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

ইহার সত্যতা ছাত্রছাত্রীরা সহজেই পরীক্ষা করিয়া দেখিতে পারে।

এই পরিপ্রেক্ষিতে বলা যায় যে

একের ঘনমূল তিনটি, যথা : $1, \omega, \omega^2$, **যেখানে** $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, **বা,** $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ **; ইহাদের মধ্যে কেবলমাত্র একটি বাস্তব এবং অপর দুইটি কাল্পনিক।**

ω এবং ω^2 সম্পর্কীয় গুণাবলী (Properties connecting ω and ω^2)

1. একের ঘনমূল তিনটির সমষ্টি শূন্য, অর্থাৎ, $1+\omega+\omega^2=0$

কারণ, যদি $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ হয়, তবে $\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$;

সুতরাং $\omega+\omega^2=-1$, বা, $1+\omega+\omega^2=0$.

2. $\omega^3=1$, অর্থাৎ একের ঘনমূল তিনটির গুণফল হইল 1 (অর্থাৎ $1.\omega.\omega^2=1$)

সহজেই যাচাই করিয়া দেখা যায় যে $1.\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=1$.

উপরন্তু, $z^3=1$ এর একটি মান ω বলিয়া ইহা হইতে সহজেই পাওয়া যায়, $\omega^3=1$.

3. ωর ঘাত (Powers of ω) : ωর ঘাত অখণ্ড যে কোন সংখ্যা হইলে উহার মান হয় 1 অথবা ω অথবা ω^2 হইবে।

উদা. 1. $\omega^4=\omega^3.\omega=1.\omega=\omega$; $\omega^9=(\omega^3)^3=(1)^3=1$;
$(\omega)^8=\omega^6.\omega^2=\omega^2$.

উদা. 2. ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n কে $3k$, বা $3k+1$, বা $3k+2$ (যেখানে k ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা) আকারে লেখা যায়।

$\omega^{3k}=(\omega^3)^k=1$; $\omega^{3k+1}=\omega^{3k}.\omega=\omega$; $\omega^{3k+2}=\omega^{3k}.\omega^2=\omega^2$

উদা. 3. $\omega^{-8}=\frac{1}{\omega^8}=\frac{1}{\omega^6.\omega^2}=\frac{1}{\omega^2}=\frac{\omega}{\omega^3}=\omega$;

$$\omega^{-3k}=\frac{1}{\omega^{3k}}=1 ; \ \omega^{-(3k+1)}=\frac{1}{\omega^{3k+1}}=\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2}{\omega^3}=\omega^2 ;$$

$$\omega^{-(3k+2)}=\frac{1}{\omega^{3k+2}}=\frac{1}{\omega^2}=\frac{\omega}{\omega^3}=\omega.$$

কতিপয় দৃষ্টান্ত ও অনুশীলনী :

1. $(1+\omega-\omega^2)^2=(-\omega^2-\omega^2)^2$ $\quad [\because 1+\omega=-\omega^2]$
$=(-2\omega^2)^2=4\omega^4=4\omega$ $\quad (\because \omega^4=\omega^3.\omega=\omega)$

এখন প্রমাণ করিতে পার কি যে : $(1+\omega-\omega^2)^2+(1+\omega^2-\omega)^2=-4$?

2. যুক্তির সাহায্যে দেখাও যে: $\dfrac{a+\omega b+\omega^2 c}{b+\omega c+\omega^2 a}=\omega$

ইহা সত্য, কারণ $\omega(b+\omega c+\omega^2 a)=\omega b+\omega^2 c+\omega^3 a$

$$=\omega b+\omega^2 c+a. \quad [\because \ \omega^3=1]$$

3. দেখাও যে $\left(\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^{19}+\left(\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^{19}+1=0.$

4. $(a+\omega b)(a+\omega^2 b)=a^2+(\omega+\omega^2)ab+\omega^3 b^2$

$$=a^2-ab+b^2 \quad (\because \ \omega+\omega^2=-1 \text{ এবং } \omega^3=1)$$

$\therefore \quad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)(a+\omega b)(a+\omega^2 b)$

এইভাবে a^3+b^3 কে তিনটি একঘাত উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়।

ইহার জন্য এইভাবে অগ্রসর হইতে হইবে:

$$\begin{aligned} a^2-ab+b^2 &= a^2+(\omega+\omega^2)ab+\omega^3 b^2 \\ &= a^2+\omega ab+\omega^2 ab+\omega^3 b^2 \\ &= a(a+\omega b)+\omega^2 b(a+\omega b) \\ &= (a+\omega b)(a+\omega^2 b). \end{aligned}$$

5. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)(a-\omega b)(a-\omega^2 b).$

6. $(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$

$=a^2+(\omega+\omega^2)ab+(\omega+\omega^2)ac+(\omega^4+\omega^2)bc+\omega^3 c^2+\omega^3 b^2$

$=a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$

$$[\because \ \omega+\omega^2=-1, \ \omega^4+\omega^2=\omega+\omega^2=-1 \text{ এবং } \omega^3=1]$$

সুতরাং $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

$=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c).$

7. যদি $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে

$$2\omega(1+2\omega)^3(1+2\omega+3\omega^2)^4=27(-3+\sqrt{-3}).$$

এখানে বামপক্ষে সরাসরি ωর মান বসাইলে হিসাব জটিল হইয়া যাইবে। ইহার পরিবর্তে নিম্নের ধাপগুলি সতর্কতার সহিত লক্ষণীয়:

যেহেতু $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \ \omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2},$

$\omega+\omega^2=-1, \ \omega^3=\omega^6=1, \ \omega^8=\omega^6.\omega^2=\omega^2,$

$\therefore \quad$ বামপক্ষ $=2\omega(1+2\omega)^3(1+2\omega+3\omega^2)^4$

$$=2\omega(1+\omega+\omega)^3(1+\omega+\omega^2+\omega+2\omega^2)^4$$

$$=2\omega(-\omega^2+\omega)^3(\omega+2\omega^2)^4=2\omega^8(1-\omega)^3(1+2\omega)^4$$

$$=2\omega^2(1-\omega)^3(-\omega-\omega^2+2\omega)^4=2\omega^2(1-\omega)^3(\omega-\omega^2)^4$$
$$=2\omega^6(1-\omega)^7=2\{(1-\omega)^2\}^3(1-\omega)$$
$$=2\{1+\omega^2-2\omega\}^3(1-\omega)=2(-3\omega)^3(1-\omega)$$
$$=-54(1-\omega)=54(\omega-1)$$
$$=54\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}-1\right)$$
$$=54\left(\frac{-3+\sqrt{-3}}{2}\right)$$
$$=27(-3+\sqrt{-3}).$$

8. $x=\alpha+\beta,\ y=\alpha+\omega\beta,\ z=\alpha+\omega^2\beta$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$x^3+y^3+z^3=3(\alpha^3+\beta^3).$$
$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$$
[উদা. 6 দ্রষ্টব্য]

এক্ষেত্রে $x+\omega y+\omega^2 z=\alpha+\beta+\omega\alpha+\omega^2\beta+\omega^2\alpha+\omega^4\beta$
$$=(1+\omega+\omega^2)\alpha+(1+\omega^2+\omega^4)\beta=0$$
[$\because$ $1+\omega+\omega^2=0$ এবং $\omega^4=\omega$]

$$\therefore\ x^3+y^3+z^3=3xyz$$
$$=3(\alpha+\beta)(\alpha+\omega\beta)(\alpha+\omega^2\beta)$$
$$=3(\alpha^3+\beta^3).$$

9. যদি $x=\alpha^2+2\beta\gamma,\ y=\beta^2+2\gamma\alpha,\ z=\gamma^2+2\alpha\beta$ হয় তবে প্রমাণ কর যে
$$(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)^2=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$
অনুশীলনীরূপে দেওয়া হইল।

10. যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে
$$(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3$$
$$=(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)=27abc.$$
অনুশীলনীরূপে দেওয়া হইল।

প্রশ্নমালা IV(B)

1. প্রমাণ কর যে
$$\sqrt{i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\ ; \qquad \sqrt{-i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\ ;$$
$$i^{-\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\ ; \qquad (-i)^{-\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).$$

2. বর্গমূল নির্ণয় কর :

$4+3i, 4-3i$; $4+3\sqrt{20}i, 4-3\sqrt{20}i$; $1+i, 1-i$;
$-8+8\sqrt{-8}$; $23-12\sqrt{3}i$; $\sqrt{28}+i\sqrt{147}$.

[উঃ $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(3+i)$, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(3-i)$: $\pm(3+\sqrt{5}i)$, $\pm(3-\sqrt{5}i)$, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{\sqrt{2}+1}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}]$, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{\sqrt{2}+1}-i\sqrt{\sqrt{2}-1}]$; $\pm 2\sqrt{2}\{1+i\sqrt{2}\}$: $\pm(3\sqrt{3}-2i)$; $\sqrt[4]{7}(\sqrt{\frac{7}{2}}+i\sqrt{\frac{3}{2}})$.]

3. মূল চিহ্নাধীন রাশিগুলিকে পূর্ণ বর্গে পরিণত করিয়া প্রতি ক্ষেত্রে মান নির্ণয় কর :

$\sqrt{x^2-1+2ix}$; $\sqrt{a+i\sqrt{a^4+a^2+1}}$; $\sqrt{b+i\sqrt{a^2-b^2}}\,(a^2>b^2)$;
$\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+i\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)-\frac{9}{4}}$; $\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\ (x^2<1)$.

[ইঙ্গিত : $x^2+\sqrt{x^2-1}=x+\sqrt{-1}.\sqrt{1-x^2}=x+i\sqrt{1-x^2}$ $(\because x^2<1)$
$=\frac{1}{2}(2x+2i\sqrt{1+x}\sqrt{1-x})=\frac{1}{2}[(\sqrt{1+x})^2+(i\sqrt{1-x})^2+2\sqrt{1-x^2}.i\,)]$
$=\frac{1}{2}(\sqrt{1+x}+i\sqrt{1-x})^2$; $\therefore\ \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+x}+i\sqrt{1-x})$]

[উঃ $\pm(x+i)$; $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a^2+a+1}+i\sqrt{a^2-a+1})$; $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{a+b}+i\sqrt{a-b}\}$;
$\pm\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}+\frac{i}{2}\right)$]

4. (i) দেখাও যে $x^2+\frac{1}{x^2}-\frac{4}{i}\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4i\left(x+\frac{1}{x}\right)-4$
এবং ইহার সাহায্যে বামপক্ষের রাশিটির বর্গমূল নির্ণয় কর। [উঃ $\pm(x+\frac{1}{x}+2i)$]

(ii) $\frac{2-36i}{2+3i}$ কে $A+iB$ এর আকারে প্রকাশ কর এবং ইহার সাহায্যে রাশিটির বর্গমূল নির্ণয় কর। [উঃ $\pm(3i-1)$]

5. চতুর্থ মূল নির্ণয় কর :

(i) $-7+24i$; (ii) $7+24i$; (iii) $120i-119$; (iv) i.

[(iv) এর ইঙ্গিত : $i=\frac{1}{2}.2i=\frac{1}{2}(0+2i)=\frac{1}{2}(1+i^2+2i)=\frac{1}{2}(1+i)^2$,

$\therefore\ \sqrt{i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

i এর চতুর্থ মূল নির্ণয় করিবার জন্য এখন পৃথকভাবে $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ এবং $-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ এর বর্গমূল নির্ণয় করা হইবে।

$1+i=\frac{1}{2}(2+2i)=\frac{1}{2}\{(\sqrt{\sqrt{2}+1})^2+(i\sqrt{\sqrt{2}+1})^2+2i\sqrt{(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}-1)}\}$
$=\frac{1}{2}\{\sqrt{\sqrt{2}+1}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}\}^2$

$\therefore\ \sqrt{1+i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{\sqrt{2}+1}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}\}$

অনুরূপভাবে, $\sqrt{-1-i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{\sqrt{2}-1}-i\sqrt{\sqrt{2}+1}\}$

$$\therefore \sqrt[4]{i}=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{\sqrt{2}+1}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right\}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}+i\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right\}$$

এবং $\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{\sqrt{2}-1}-i\sqrt{\sqrt{2}+1}\right\}$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}-i\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right\}$$

[উঃ (i) $\pm(2+i)$ এবং $\pm(2i-1)$; (ii) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(3+i)$ এবং $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(3i-1)$

(iii) $\pm(3+2i)$ এবং $\pm(3i-2)$.]

6. একের কাল্পনিক ঘনমূল দুইটির অন্যতম ω হইলে প্রমাণ কর যে

(i) $(1+\omega-\omega^2)^{18}=2^{18}$; (ii) $(1+\omega-\omega^2)(1-\omega+\omega^2)=4$;

(iii) $(a+b)^2+(a\omega+b\omega^2)^2+(a\omega^2+b\omega)^2=6ab.$

7. প্রমাণ কর যে $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^n$

$=2$, যদি n ধন অখণ্ড সংখ্যা এবং 3র গুণিতক হয়,

$=-1$, যদি n অন্য কোন ধন অখণ্ড সংখ্যা হয়।

8. নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর :

(i) $(1+x^2)(1+y^2)$; (ii) $(x^2+y^2)(a^2+b^2)(c^2+d^2)$;

(iii) $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$.

[উঃ (i) $\left(\frac{x^2+y^2+2}{2}\right)^2+\left(\frac{x^2-y^2}{2}\cdot i\right)^2$;

(ii) $(acx-bdx-bcy-ady)^2+(adx+bcx+acy-bdy)^2$;

(iii) $(1-xy-yz-zx)^2+(x+y+z-xyz)^2$]

9. একের ঘনমূল তিনটি 1, ω, ω^2 হইলে প্রমাণ কর যে

(i) $(1+\omega^2)^4=\omega$; (ii) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)=9$;

(iii) $(2+5\omega+2\omega^2)^6=(2+2\omega+5\omega^2)^6=729$;

(iv) $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)\cdots 2m$তম উৎপাদক পর্যন্ত $=2^{2m}$.

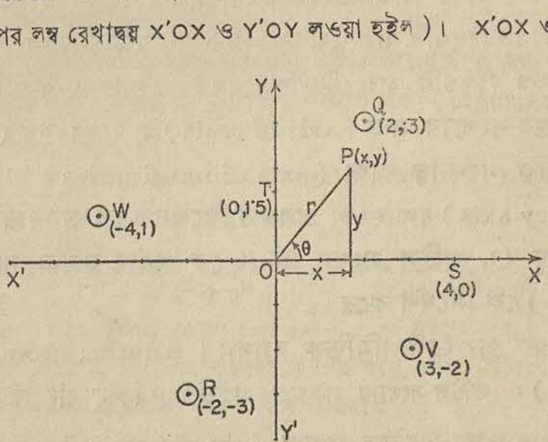
10. $X=ax+cy+bz$, $Y=cx+by+az$, $Z=bx+ay+cz$ হইলে প্রমাণ কর যে $(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$$=X^2+Y^2+Z^2-YZ-ZX-XY.$$

4·5. জটিল সংখ্যার জ্যামিতিক ব্যাখ্যা (The Geometrical Interpretation of complex numbers)*

গত শতাব্দীর গোড়ার দিকে প্রায় একই সঙ্গে কতিপয় গণিতবিদের মনে জটিল সংখ্যাতত্ত্বের ক্ষেত্রে একটি সুনিশ্চিত পদক্ষেপস্বরূপ কোন সমতলস্থ বিন্দুর সহায়তায় জটিল সংখ্যাকে প্রকাশ করিবার ধারণার উদ্ভব হয়। তাঁহারা হইলেন Wessel, Argand, Gauss এবং আরও অনেকে। ইহাদের মধ্যে কিন্তু Gauss এর ধারণাই একটি রীতিবদ্ধ বিকাশের পথে পরিচালিত হয়।

বিষয়টি বিবেচনার জন্য কোন একটি সমতল লওয়া হইল। ইহাকে বলা হইবে **জটিল সংখ্যার সমতল** (the complex plane অথবা the Gaussian plane)। ইহার উপর মনোমত একটি বিন্দু O লওয়া হইল এবং সমতলটিতে আয়ত স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয় X'OX ও Y'OY স্থাপিত করা হইল (অর্থাৎ মনোনীত বিন্দু O এর মধ্য দিয়া পরস্পর লম্ব রেখাদ্বয় X'OX ও Y'OY লওয়া হইল)। X'OX ও Y'OY কে



চিত্র 4.1. Argand চিত্র (Argand diagram)

যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ বলা হয়। x-অক্ষের উপর কোন একটি বিন্দু E লওয়া হইল; তাহা হইলে OE দৈর্ঘ্য অক্ষদ্বয়স্থ বিন্দুগুলির প্রকাশসূচক মানক (a scale of representation) হিসাবে কাজ করিবে। কিভাবে X'OX ও Y'OY অক্ষ দুইটি সম্পর্কে সমতলস্থ কোন বিন্দুর অবস্থানকে (x, y) এই স্থানাঙ্কদ্বয়ের সাহায্যে নির্দেশ করা যায়, তাহা স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে ইতিপূর্বে জানা গিয়াছে।

এখন ধরা যাক্ $z=x+iy$ একটি জটিল সংখ্যা। তাহা হইলে যদি জটিল সংখ্যার সমতলে অবস্থিত কোন বিন্দু P এর X'OX ও Y'OY অক্ষদ্বয় সম্পর্কে স্থানাঙ্ক (x, y) হয়, তবে বলা হইবে যে P বিন্দু জটিল সংখ্যা z কে নির্দেশ করিতেছে। বাস্তবিক

* স্থানাঙ্ক জ্যামিতি সম্পর্কে প্রাথমিক জ্ঞানলাভের পরই ছাত্রছাত্রীদের এই অনুচ্ছেদ পাঠ করা উচিত।

পক্ষে, জটিল সংখ্যার সমতলে অবস্থিত যে বিন্দু Z কে নির্দেশ করিবে, তাহাকে "Z-বিন্দু" বলিয়া উল্লেখ করা যাইতে পারে। এইভাবে জটিল সংখ্যার সমতলে প্রত্যেক জটিল সংখ্যার জন্য উহার নির্দেশক একটি এবং একটিমাত্র বিন্দুই পাওয়া যাইবে, এবং বিপরীতক্রমে, ঐ সমতলস্থ প্রত্যেক বিন্দু একটি এবং কেবলমাত্র একটি জটিল সংখ্যাকেই নির্দেশ করিবে।

4.1 চিত্রে $2+3i$, $-2-3i$, $4+0.i$, $0+1{\cdot}5i$, $-4+i$, $3-2i$ এই জটিল সংখ্যাগুলির নির্দেশক যথাক্রমে $Q(2, 3)$, $R(-2, -3)$, $S(4, 0)$, $T(0, 1{\cdot}5)$ $W(-4, 1)$ এবং $V(3, -2)$ বিন্দুগুলির অবস্থান প্রদর্শিত হইয়াছে। যে চিত্রে জটিল সংখ্যার নির্দেশক বিন্দুর অবস্থান প্রদর্শিত হয় তাহাকে **Argand চিত্র** (Argand diagram) বলা হয়। জটিল সংখ্যার সমতলটিকে প্রায়ই z-সমতল অথবা xy-সমতল বলিয়া অভিহিত করা হয়। $a(=a+i.0)$ সূচিত সকল বাস্তব সংখ্যা x-অক্ষস্থিত বিন্দুগুলি দ্বারা এবং $ib(=0+ib)$ সূচিত সকল বিশুদ্ধ কাল্পনিক সংখ্যা y-অক্ষস্থ বিন্দুগুলি দ্বারা নির্দেশিত হয়। এইজন্য x-অক্ষ এবং y-অক্ষকে যথাক্রমে **বাস্তব সংখ্যার অক্ষ (axis of reals)** বা বাস্তব অক্ষ **(real axis)** এবং **কাল্পনিক সংখ্যার অক্ষ (axis of imaginaries)** বা কাল্পনিক অক্ষ (Imaginary axis) বলা হয়। **প্রসঙ্গত বিশেষভাবে স্মরণ রাখিতে হইবে যে মূলবিন্দু O, জটিল সংখ্যা $0+i0$ কে অর্থাৎ জটিল সংখ্যামণ্ডলের শূন্য (zero) কে নির্দেশ করে।**

অপর এক প্রকার জ্যামিতিক ব্যাখ্যা (Another geometric interpretation): জটিল সংখ্যার সমতলে অবস্থিত P বিন্দু যদি জটিল সংখ্যা z কে নির্দেশ করে, তবে দিক-নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ (the directed line-segment) $\overline{OP}$ (অর্থাৎ যে রেখাংশের প্রারম্ভিক বিন্দু O এবং অন্তিম বিন্দু P) দ্বারা z কে নির্দেশ করা যাইতে পারে এবং ইহাই হইল z এর দ্বিতীয় প্রকার জ্যামিতিক ব্যাখ্যা। এই দিক-নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{OP}$ কে $\overline{OP}$-ভেক্টর (Vector $\overline{OP}$) বলিয়া উল্লেখ করা হয়।

সুতরাং জটিল সংখ্যা $z=x+iy$ এর জ্যামিতিক রূপায়ণ দুইটি, যথা (চিত্র 4.1),

1. xy-সমতলে অবস্থিত বিন্দু P (x, y), অথবা
2. মূলবিন্দু (0, 0) হইতে P (x, y) বিন্দু পর্যন্ত বিস্তৃত $\overline{OP}$-ভেক্টর।

মডিউলাস (MODULUS) এবং বিস্তার বা অ্যাম্প্লিটিউড্ (AMPLITUDE)

ধরা যাক্, জটিল সংখ্যার সমতলে অবস্থিত P(x, y) বিন্দু জটিল সংখ্যা $z=x+iy$ কে নির্দেশ করে (চিত্র 4.1 দ্রষ্টব্য)। ধরা হইল, রেখাংশ $\overline{OP}=|\overline{OP}|=r$ একক।

মনে করা হইল, θ (রেডিয়ান এককে প্রকাশিত) $=\angle XOP$; এখানে "ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত অভিমুখী কোণকে ধনাত্মক ও গতির অভিমুখী কোণকে ঋণাত্মক"—কোণ পরিমাপের এই স্বাভাবিক রীতি অনুসারে OX **হইতে** OP **পর্যন্ত** $\angle XOP$ এর পরিমাপ লওয়া হইয়াছে।

তাহা হইলে $x=$ বাস্তব $z(\text{Rl } z)=r\cos\theta$, $y=$ কাল্পনিক $z(\text{Im } z)=r\sin\theta$

$$\text{এবং } r=+\sqrt{x^2+y^2} \qquad \cdots \text{(I)}$$

স্থানাঙ্ক জ্যামিতির পরিভাষায় (r, θ) হইল P বিন্দুর 'পোলার' স্থানাঙ্ক (polar co-ordinates), (মূলবিন্দু) O কে **পোল** (pole) এবং OX কে **প্রারম্ভিক রেখা** (initial line) বলা হয়। পোলার কোণ (polar angle) θ কে বলা হয় z এর **বিস্তার** (amplitude) বা **আর্গুমেন্ট** (argument), আর ধনাত্মক রাশি $r=+\sqrt{x^2+y^2}$ কে বলা হয় z এর মডিউলাস (modulus)। এইস্থলে এইরূপ লেখা হইয়া থাকে :

$r=$ মড্ $z=|z|$ এবং $\theta=$ অ্যাম্প (Amp) $z=$ আর্গ (Arg). z,

দুইটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয় এখানে বিশেষ দৃঢ়তার সহিত উল্লেখযোগ্য, যথা :

1. $z=0$ বিন্দুর (**অর্থাৎ** মূলবিন্দুর) আর্গুমেন্ট' (argument) এর স্বরূপ অনির্ণীত (not defined)!

2. যে কোন জটিল সংখ্যা $z(\neq 0)$ এর 'আর্গুমেন্ট' বলিতে এমন কোণ θ কে বুঝায় যাহা একই সঙ্গে নিম্নে প্রদত্ত উভয় সর্তকে সিদ্ধ করে। যথা :

$$\cos\theta=\frac{x}{+\sqrt{x^2+y^2}} \text{ এবং } \sin\theta=\frac{y}{+\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \cdots \text{(II)}$$

[অর্থাৎ, কেবল $\tan\theta=y/x$ এই সর্তকে নহে]

স্পষ্টত, যদি θর মান (II) সমীকরণদ্বয়কে সিদ্ধ করে, তবে নিম্নলিখিত কোণগুলির প্রত্যেকটি এই সমীকরণ দুইটিকে সিদ্ধ করিবে। যথা :

$$\theta+2\pi,\ \theta+4\pi,\ \theta+6\pi,\ \ldots\ \ldots\ \ldots,\ \theta+2n\pi,\ \cdots;$$
$$\theta-2\pi,\ \theta-4\pi,\ \cdots\ \cdots\ \cdots,\ \theta-2n\pi,\ \cdots;$$

(যেখানে n ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে কোন অখণ্ড সংখ্যা)

Arg z বা Amp z এই অঙ্কপাতন (notation) উপরের **কোণগুলির যে কোনটিকে** বুঝাইবার জন্য ব্যবহার করা যায়। কিন্তু θর মান যদি π হইতে $-\pi$ এর **মধ্যে** সীমাবদ্ধ রাখা হয়, **অর্থাৎ** যদি $-\pi<\theta\leqslant\pi$ হয় (অর্থাৎ π এই মানের সীমার অন্তর্ভুক্ত কিন্তু $-\pi$ নহে), তবে θর **একটিমাত্র মানই** (II) সমীকরণদ্বয়কে সিদ্ধ করিবে। Arg z এর এই অনন্য (unique) মানটিকে **প্রধান মান (principal value)** বলা হয় এবং ইহাকে **arg** z বা **amp** z এই অঙ্কপাতন দ্বারা উল্লেখ করা হয়।

উদা. 1. যদি $z=i$ হয়, তবে $r=1$ এবং $\arg\ i=\pi/2$

যদি $z=-i$ হয়, তবে $r=1$ এবং $\arg(-i)=-\pi/2$.

উদা. 2. যদি $z=1-i$ হয়, তবে $\arg z=\theta$ যেখানে

$$\cos\theta=\frac{1}{+\sqrt{2}},\ \sin\theta=\frac{-1}{+\sqrt{2}}.$$

$\therefore$ $\arg z$ এর প্রধান মান $=\arg z=-\frac{\pi}{4}$ ($\because$ cos অনুপাত ধনাত্মক, sine অনুপাত ঋণাত্মক, সুতরাং কোণটি চতুর্থপাদতে)

উদা. 3. ধরা যাক্ $z=-3+3i$; যদি $\theta=\arg z$ হয়, তবে θর মান নিম্নের শর্তগুলি সিদ্ধ করে, যথা :

$$\cos\theta=\frac{-3}{+\sqrt{18}},\ \sin\theta=\frac{3}{+\sqrt{18}} \text{ এবং } -\pi<\theta\leqslant\pi.$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{-1}{+\sqrt{2}},\ \sin\theta=\frac{1}{+\sqrt{2}};\ \text{সুতরাং } \arg z=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}.$$

টীকা : মড্ $z=\sqrt{(-3)^2+(3)^2}=\sqrt{18}=+3\sqrt{2}.$

জটিল সংখ্যার মডিউলাস-অ্যামপ্লিটিউড্ আকার (Modulus-amplitude form of a complex number)

কোন জটিল সংখ্যা $z=x+iy$ এর Arg $z=\theta$ এবং mod $z=r$ ধরিলে z কে নিম্নপ্রকারে লেখা যায়, যথা :

$$z=x+iy=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

z এর এইরূপ আকারকে z এর মডিউলাস-অ্যামপ্লিটিউড্ আকার বলা হয়। ($z=x+iy$ এই আকারে $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ লিখিলেই উহা পাওয়া যায়।)

গুণফল (Products)

ধরা যাক্ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, $\omega=s(\cos\phi+i\sin\phi)$

$$z\omega=rs\{(\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi)+i(\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi)\}$$
$$=rs\{\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)\}.$$

সুতরাং দুইটি জটিল সংখ্যা, যেমন z এবং ω, মডিউলাস-অ্যামপ্লিটিউড আকারে দেওয়া থাকিলে উহাদের গুণফলকে নিম্ন প্রকারে সরাসরি মডিউলাস-অ্যামপ্লিটিউড আকারে প্রকাশ করা যায় :

A. z এবং ω জটিল সংখ্যা দুইটির মডিউলাস দুইটি গুণ করিতে হইবে।

B. z এবং ω জটিল সংখ্যা দুইটির আর্গুমেন্ট দুইটি যোগ করিতে হইবে।

প্রাপ্ত তথ্য হইতে বলা যায় যে

$|z.\omega|=|z|.|\omega|$ এবং $\text{Arg}(z\omega)=\text{Arg } z+\text{Arg } \omega$ ··· (III)

(III) এর প্রথম অংশটি হইতে জানা গেল যে দুইটি জটিল সংখ্যার গুণফলের 'মডিউলাস', জটিল সংখ্যা দুইটির 'মডিউলাস'দ্বয়ের গুণফলের সমান।

[অনুচ্ছেদ 4·3 দ্রষ্টব্য]

কিন্তু প্রতিক্ষেত্রে প্রধান মান লইলে (III) এর দ্বিতীয় অংশটি সর্বদা সত্য হইবে না। এই অংশটির প্রকৃত তাৎপর্য হইল এই যে :

যদি Arg z এবং Arg ω এর যে কোন মান (iii) এর দ্বিতীয় অংশের ডানপক্ষে বসান যায় তবে উহাদের সমষ্টি Arg $(z\omega)$ এর মানগুলির অন্যতম হইবে। [নিম্নের উদা. 1 এবং 2 দ্রষ্টব্য]

উদা. 1. ধরা যাক্ $z=-1,\ \omega=-1$

ইহাদের আর্গুমেন্টের প্রধান মানদুইটি নিম্নপ্রকার, যথা :

$$\arg z=\pi, \quad \arg \omega=\pi$$

ইহাদের সমষ্টি $=2\pi$

কিন্তু এখানে $z\omega=1$ এবং $z\omega$ এর আর্গুমেন্টের **প্রধান মান** শূন্য (এবং 2π নহে)।

সুতরাং এখানে কেবল প্রধান মানের কথা বিবেচনা করিলে বলা যায় না যে

$$\arg (z\omega)=\arg z+\arg \omega$$

উদা. 2. ধরা যাক্ $z=1+i\sqrt{3},\ \ \omega=\sqrt{3}-i$

এখানে $|z|=+\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=2$

এবং Arg $z=\theta$ হইলে $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ Arg $z=2r\pi+\pi/3$, এবং $\arg z=\pi/3$

অনুরূপভাবে $|\omega|=2$, Arg $\omega=2k\pi-\pi/6$ এবং $\arg \omega=-\pi/6$

$\therefore\ \arg z+\arg \omega=\pi/3-\pi/6=\pi/6$

এখন $z\omega=(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)=2\sqrt{3}+2i$

$\therefore\ |z\omega|=4$, Arg $(z\omega)=2m\pi+\pi/6$, $\arg(z\omega)=\pi/6$

সুতরাং এই ক্ষেত্রে $\arg(z\omega)=\arg z+\arg \omega$.

সহজেই ইহা পরখ করিয়া দেখা যায় যে **প্রধান মানের ক্ষেত্রে**

$$\arg (z\omega)=\arg z+\arg \omega+c,$$

যেখানে $c=0$, অথবা 2π, অথবা -2π

ভাগফল (Quotients)

ধরা যাক্ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta),\ \omega=s(\cos\phi+i\sin\phi)$

তাহা হইলে $\dfrac{z}{\omega}=\dfrac{r}{s}\cdot\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\phi+i\sin\phi}=\dfrac{r}{s}\cdot\dfrac{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\phi-i\sin\phi)}{(\cos\phi+i\sin\phi)(\cos\phi-i\sin\phi)}$

$$=\frac{r}{s}[(\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi)+i(\sin\theta\cos\phi-\cos\theta\sin\phi)]$$

$$=\frac{r}{s}[\cos(\theta-\phi)+\sin(\theta-\phi)]$$

ইহাকে নিম্নপ্রকারে প্রকাশ করা যায়, যথা :

$$\left.\begin{array}{l} |z\div\omega| = |z| \div |\omega|; \\ \text{এবং } \operatorname{Arg}\dfrac{z}{\omega}=\operatorname{Arg} z-\operatorname{Arg}\omega \end{array}\right\} \quad \cdots \quad \text{(IV)}$$

(IV) এর প্রথম অংশ হইতে জানা গেল যে দুইটি জটিল সংখ্যার ভাগফলের 'মডিউলাস', সংখ্যা দুইটির 'মডিউলাস'দ্বয়ের ভাগফলের সমান।

(4·3 অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য)

দ্বিতীয় অংশটি **প্রধান মানের ক্ষেত্রে** সর্বদা সত্য নাও হইতে পারে।

প্রশ্নমালা IV(C)

1. নিম্নলিখিত জটিল সংখ্যাগুলিকে Argand চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ কর :
0; 1; -1; i; $-i$; $3+4i$; $-2+3i$; $-1+4i$; $2-4i$; $2i$; $-2i$; $1-i$; $1+i$; $i-1$; $-1+i$.

2. প্রশ্ন 1 এর প্রতিটি সংখ্যার 'মডিউলাস' এবং 'অ্যাম্প্লিটিউডে'র প্রধান মান নির্ণয় কর।

3. নিম্নের প্রতিটি জটিল সংখ্যাকে 'মডিউলাস'-'অ্যামপ্লিটিউডে'র আকারে প্রকাশ কর ('অ্যামপ্লিটিউডে'র প্রধান মান লইতে হইবে) :
$-3+4i$; $\sqrt{2}+1-i$; $2+2i$; $1+\sqrt{3}i$; $-3+3i$; $-1-\sqrt{3}i$; $\sqrt{3}-i$; 5; $2i$; -4; $-4i$; $(1+i)/\sqrt{2}$.

4.* যদি $-\pi<\operatorname{amp}(x+iy)\leqslant\pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

(i) $x>0$ হইলে $\operatorname{amp}(x+iy)=\tan^{-1} y/x$

(ii) $x<0, y>0$ হইলে $\operatorname{amp}(x+iy)=\pi+\tan^{-1} y/x$

(iii) $x<0, y<0$ হইলে $\operatorname{amp}(x+iy)=-\pi+\tan^{-1} y/x$

'বিপরীত ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকে'র সহিত পরিচয়ের পরই কেবল এই প্রশ্নের সমাধান করা উচিত।]

5. নিম্নে প্রদত্ত সংখ্যাগুলির 'মডিউলাস' এবং 'আর্গুমেন্টের' প্রধান মান নির্ণয় কর :

$$(1-i)(\sqrt{3}+i)\ ;\ (-1+\sqrt{3}i)(2\sqrt{3}-2i)\ ;\ \frac{4-4i}{\sqrt{3}-i}.$$

পূর্বে প্রদত্ত 4·5 অনুচ্ছেদে (III) এবং (IV) এ প্রদর্শিত শর্তগুলি কি ইহারা সিদ্ধ করে ?

4·6. Argand চিত্র মাধ্যমে জটিল সংখ্যার বীজগণিতীয় ক্রিয়াসমূহ (Representation of Algebraic operations on the Argand diagram)

বর্তমান অনুচ্ছেদে জটিল সংখ্যার সমতলে জ্যামিতিক অঙ্কন কার্যের মধ্য দিয়া $\bar{z}$, $-z$, z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1 \cdot z_2$ এবং $z_1 \div z_2$ (এখানে z, z_1, z_2 জটিল সংখ্যা) এর তাৎপর্য ব্যাখ্যা করা হইবে।

1. $\bar{z}$ এবং $-z$ এর জ্যামিতিক রূপায়ণ (বা তাৎপর্য)

যদি P বিন্দু জটিল সংখ্যা z কে নির্দেশ করে, তবে বাস্তব অক্ষ দ্বারা প্রতিফলনে উৎপন্ন P এর প্রতিবিম্ব Q বিন্দু বিপরীত জটিল সংখ্যা (conjugate complex number) $\bar{z}$ কে নির্দেশ করিবে, আর $-z$ কে নির্দেশ করিবে এমন বিন্দু R, যেখানে PR মূলবিন্দু O তে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে (চিত্র 4.2 দ্রষ্টব্য)। $z=x+iy$ হইলে সহজেই দেখা যায় যে P, Q, R এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x, y), $(x, -y)$, $(-x, -y)$।



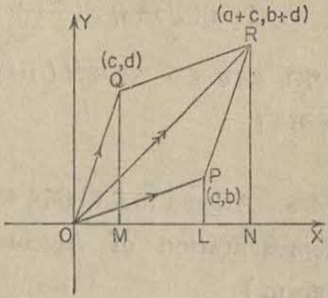
চিত্র 4.2.

2. z_1+z_2 এর জ্যামিতিক রূপায়ণ (বা তাৎপর্য)

ধরা যাক্ জটিল সংখ্যার সমতলে অবস্থিত P (a, b) এবং Q (c, d) বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে দুইটি জটিল সংখ্যা, যথা: $z_1=a+ib$ এবং $z_2=c+id$ কে নির্দেশ করিতেছে (চিত্র 4.3 দ্রষ্টব্য)। তাহা হইলে OP এবং OQ কে সন্নিহিত বাহু করিয়া অঙ্কিত সামান্তরিক QOPR এর চতুর্থ শীর্ষ R নির্দেশ করিবে z_1+z_2 যোগফলকে।

ভেক্টর অঙ্কপাতন (vector notation) অনুসারে $\overline{OR}=\overline{OP}+\overline{OQ}$.

[সহজেই দেখা যায় যে R এর স্থানাঙ্ক $(a+c, b+d)$ কারণ OX এর উপর $\overline{OP}$ এবং $\overline{PR}$ (অর্থাৎ $\overline{OP}$ এবং $\overline{OQ}$) এর অভিক্ষেপদ্বয়ের সমষ্টি OX এর উপর $\overline{OR}$ এর অভিক্ষেপের সমান (যেহেতু $\overline{OL}+\overline{LN}=\overline{ON}$)। OY এর উপর অভিক্ষেপের ক্ষেত্রেও অনুরূপ ফল পাওয়া যাইবে।]



চিত্র 4.3.

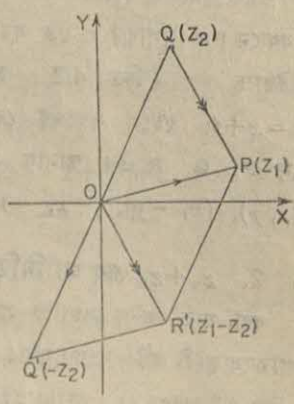
একটি গুরুত্বপূর্ণ সিদ্ধান্ত (Deduction): যেহেতু $\overline{OR}$ এর দৈর্ঘ্য (অর্থাৎ $|z_1+z_2|$), $\overline{OP}$ এর দৈর্ঘ্য (অর্থাৎ $|z_1|$) এবং $\overline{OQ}$ এর দৈর্ঘ্য (অর্থাৎ $|z_2|$) দ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর নয়, তাই নিম্নের অসমতাটি (ইহাকে **ত্রিভুজ অসমতা** বলা হয়) পাওয়া যায়, যথা:

$$|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

অনুশীলনী। উপরের অসমতায় সমতা চিহ্নটির জ্যামিতিক তাৎপর্য কি?

3. $z_1 - z_2$ এর জ্যামিতিক তাৎপর্য

ধরা যাক, Q এবং Q′ বিন্দু যথাক্রমে z_2 এবং $-z_2$ কে নির্দেশ করে; সুতরাং QQ′ মূলবিন্দু O তে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। যেহেতু P বিন্দু z_1 কে নির্দেশ করে, অতএব OP এবং OQ′ কে সন্নিহিত বাহু করিয়া অঙ্কিত সামান্তরিক POQ′R′ এর চতুর্থ শীর্ষ R′ বিন্দু $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ কে নির্দেশ করিবে। এখন $\overline{OQ}$ এবং $\overline{R'P}$ সমান ও সমান্তরাল বলিয়া OR^1PQ সামান্তরিক, সুতরাং $\overline{OR'}=\overline{QP}$; দেখা গেল, ভেক্টর $\overline{QP}$ ও জটিল সংখ্যা $z_1 - z_2$ কে নির্দেশ করিতেছে—এখানে $\overline{QP}$ ভেক্টরের প্রারম্ভিক বিন্দু z_2 এবং অন্তিম বিন্দু z_1।



চিত্র 4.4.

ভেক্টর অঙ্কপাতন অনুসারে, $\overline{QP}=\overline{OP}-\overline{OQ}$.

সুতরাং $z_1 - z_2$ এর 'মডিউলাস' $= |z_1 - z_2| = \overline{QP}$ এবং ঐ ত্রিভুজ হইতে ইহাও পাওয়া যায় যে

$$|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$$

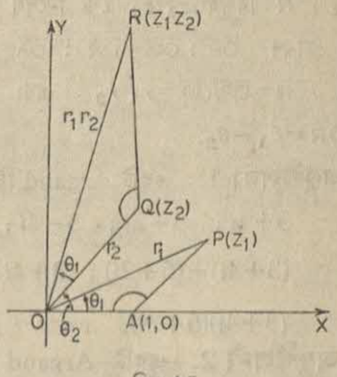
(ত্রিভুজের দুইটি বাহুর অন্তর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা কখনও বৃহত্তর হইতে পারে না।)

4. $z_1.z_2$ এর জ্যামিতিক তাৎপর্য

ধরা যাক্ 'মডিউলাস'-'অ্যামপ্লিটিউড' আকারে $z_1 = r_1(\cos\ \theta_1 + i\ \sin\ \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + r\sin\theta_2)$.

সুতরাং $z_1.z_2 = r_1r_2\ [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$; তাহা হইলে z_1z_2 এর 'মডিউলাস' r_1r_2 এবং 'আর্গুমেন্ট' $\theta_1 + \theta_2$। এই ধারণা হইতে z_1z_2 এর নির্দেশক বিন্দু R অঙ্কন করা যাইবে :

OP রেখাকে arg z_2 এর সমান কোণে ঘুরাইয়া ও উহাকে mod z_2 দ্বারা গুণ করিয়া OR রেখা পাওয়া যায়।



চিত্র 4.5.

অঙ্কন। বাস্তব অক্ষের উপর A(1, 0) একটি বিন্দু লওয়া হইল, সুতরাং $\overline{OA} = 1$; তাহা হইলে OAP ত্রিভুজের সদৃশ করিয়া অঙ্কিত ত্রিভুজ OQR এর তৃতীয় শীর্ষ R বিন্দু $z_1.z_2$ কে নির্দেশ করিবে।

($\angle QOR = \theta_1$ এবং $\angle OQR = \angle OAP$ অঙ্কন করিলেই R বিন্দু পাওয়া যায়।)

যেহেতু Δ'OAP, OQR সদৃশ, সুতরাং $\dfrac{\overline{OR}}{\overline{OQ}} = \dfrac{\overline{OP}}{\overline{OA}}$ অর্থাৎ $\overline{OR} = \overline{OP}.\overline{OQ}$ $= r_1r_2$ এবং $\angle XOR = \angle XOQ + \angle QOR = \theta_2 + \theta_1$.

5. $z_1 \div z_2$ এর জ্যামিতিক তাৎপর্য

ধরা যাক্ $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.

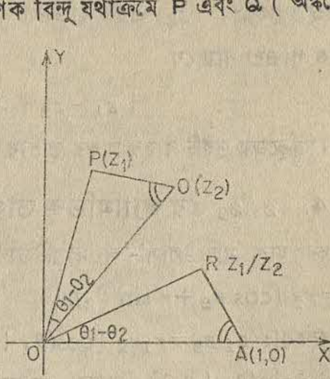
তাহা হইলে $z_1/z_2 = r_1/r_2\ [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$, সুতরাং z_1/z_2 এর 'মডিউলাস' r_1/r_2 এবং 'আর্গুমেন্ট' হইল $\theta_1 - \theta_2$.

ইহা হইতে z_1/z_2 এর নির্দেশক বিন্দু R এর নিম্নপ্রকার অঙ্কন পদ্ধতি পাওয়া যায় :

মনে করা হইল z_1 এবং z_2 এর নির্দেশক বিন্দু যথাক্রমে P এবং Q (অঙ্কনের সুবিধার জন্য ধরা হইল $\theta_1 > \theta_2$) ।

সুতরাং $\angle POQ = \theta_1 - \theta_2$; এখন বাস্তব অক্ষের উপর A(1, 0) একটি বিন্দু লওয়া হইল, ফলে $\overline{OA} = 1$

OQP ত্রিভুজের সহিত সরাসরি সদৃশ করিয়া OAR ত্রিভুজ অঙ্কন করা হইল। R বিন্দুই z_1/z_2 কে নির্দেশ করে, কারণ $\overline{OP} : \overline{OQ} = \overline{OR} : \overline{OA}$, অর্থাৎ $\overline{OR} = \overline{OP}/\overline{OQ} = r_1/r_2$ এবং $\angle AOR = \theta_1 - \theta_2$.



চিত্র 4.6.

অনুশীলনী 1. একটি Argand চিত্রে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি সংস্থাপিত কর :

$3+4i$; $5+2i$; $3-4i$; $5-2i$; $-3-4i$; $-5-2i$; $(3+4i)+(5+2i)$; $(3+4i)-(5+2i)$; i ; $1/i$; $\frac{1-i}{1+i}$; $\frac{2}{1-3i}$; $(3+4i)(5+3i)$.

অনুশীলনী 2. একটি Argand চিত্রে নিম্নের বিন্দু তিনটি সংস্থাপিত করিয়া দেখাও যে উহারা একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু :

$z_1 = 10+5i$, $z_2 = 6-i$ এবং $z_3 = -3+5i$.

অনুশীলনী 3. Argand চিত্রে নিম্নে প্রদত্ত বিন্দুগুলি সংস্থাপিত করিয়া দেখাও যে উহারা সমবৃত্ত (concyclic) :

(*i*) $3+4i$, $3-4i$, $-4+3i$ এবং $-4-3i$

(*ii*) $1+5i$, $2+4i$, $3+i$ এবং $-2+6i$

প্রতি ক্ষেত্রে বৃত্তটির কেন্দ্র নির্ণয় কর।

অনুশীলনী 4. প্রমাণ কর যে নিম্নের প্রতি ক্ষেত্রে বিন্দুত্রয় সমরেখ (collinear) :

(*i*) $1+4i, 3-2i, -3+16i$; (*ii*) $-1+3i, 2+9i, -3-i$.

অনুশীলনী 5. জটিল সংখ্যার সমতলে প্রদত্ত বিন্দু P যদি জটিল সংখ্যা z কে নির্দেশ করে, তবে নিম্নের সংখ্যাগুলিকে যে বিন্দুগুলি নির্দেশ করিবে তাহাদের ঐ সমতলে সংস্থাপিত কর :

(*i*) $2z$; (*ii*) $-3z$; (*iii*) $z+5$; (*iv*) $4z+9$; (*v*) $8-3z$.

অনুশীলনী 6. যদি P বিন্দু জটিল সংখ্যা z কে নির্দেশ করে, তবে নিম্নলিখিত ক্ষেত্রগুলিতে P এর অবস্থান সম্পর্কে কি কি বিষয় প্রকাশিত হয় ?

(*i*) $|z|=5$; (*ii*) $|z-1|=2$; (*iii*) $|z-2| \leqslant 3$.

5

দ্বিঘাত সমীকরণের তত্ত্ব
(THEORY OF QUADRATIC EQUATION)

5·1. সূচনা (Introduction)

অজ্ঞাত রাশি x এর দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ আকারটি হইল

$$ax^2+bx+c=0, \text{ (এখানে } a\neq 0 \text{)};$$

a, b, c কে ইহার সহগ (coefficients) বলা হয় এবং ইহারা x বর্জিত বলিয়া ধ্রুবক (ধ্রুবক সংখ্যাগুলি বাস্তব অথবা জটিল হইতে পারে)। সুতরাং

$$x^2-6x+5=0,\ 2ix^2+x-6+4i=0 \text{ এবং } 3x^2-5=0$$

হইল একটি অজ্ঞাত রাশি x এর দ্বিঘাত সমীকরণের তিনটি উদাহরণ। x এর সহগ শূন্য হইলে সমীকরণটিকে **বিশুদ্ধ দ্বিঘাত সমীকরণ** বলে (pure quadratic), যথা $4x^2-5=0$. কোন দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ কে সমাধান করার অর্থ x এর সকল সম্ভাব্য মান নির্ণয় করা যাহারা সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। x এর এই মানগুলিকে **সমাধানের সেট্** (a set of solutions) বলা হয়; সেট্‌টির প্রত্যেক সভ্যকে সমীকরণটির **বীজ** (root) বলে। উদাহরণস্বরূপ দেখা যায়, $x^2-5x+6=0$ সমীকরণটি $x=2$ এবং $x=3$ এই উভয় মান দ্বারা সিদ্ধ হয়। সুতরাং এখানে সমাধানের সেট্ হইল $\{2, 3\}$ এবং 2 অথবা 3 হইল সমীকরণটির বীজ। ছাত্রছাত্রীরা ইতিপূর্বে দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধানের প্রণালীগুলির সহিত, বিশেষত **উৎপাদকে বিশ্লেষণ প্রণালীর** সহিত, পরিচিত হইয়াছে। পরবর্তী অনুচ্ছেদে **পুনরালোচনার ছলে** ঐ প্রণালীগুলির সংক্ষিপ্ত বিবরণ দেওয়া হইল। পরে এই অধ্যায়ের অবশিষ্ট অংশে দ্বিঘাত সমীকরণের তত্ত্বের উপরই আলোচনাকে নিবদ্ধ রাখা হইবে।

5·2. দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান প্রণালী (Methods of solving quadratic Equations)

সরল দৃষ্টান্ত সহকারে দ্বিঘাত সমীকরণের বিভিন্ন সমাধান প্রণালী এখানে দেওয়া হইল। **ছাত্রছাত্রীদের উচিত হইবে, তত্ত্ব পড়িবার পূর্বে V(A) এবং V(B) প্রশ্নমালার সমীকরণগুলি সমাধান করা।**

A. বিশুদ্ধ দ্বিঘাত সমীকরণ

দৃষ্টান্ত :

$2x^2-21=0$; $\therefore$ $x^2=\frac{21}{2}$ এবং বীজগুলি $+\sqrt{21/2}$ এবং $-\sqrt{21/2}$.

$x^2+9=0$; $\therefore$ $x^2=-9=(3i)^2$ এবং বীজগুলি $+3i$ এবং $-3i$

এখানে লক্ষ্য কর, বীজগুলি সমান কিন্তু পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

B. উৎপাদকে বিশ্লেষণ পূর্বক সমাধান

দৃষ্টান্ত : $3x^2+2x-5=0$ কে $(3x+5)(x-1)=0$ এই আকারে লেখা যায়।

তাহা হইলে হয় $3x+5=0$, অথবা, $x-1=0$ অর্থাৎ বীজগুলি $-5/3$, 1.

C. পূর্ণ বর্গে পরিণত করিয়া সমাধান

দৃষ্টান্ত : $x^2-6x-2=0$ কে লেখা যায় $x^2-2.x.3+(3)^2-(3)^2-2=0$ এই আকারে

বা $(x-3)^2=11$ এই আকারে ; অর্থাৎ $x-3=\pm\sqrt{11}$.

সুতরাং বীজগুলি $3+\sqrt{11}$ এবং $3-\sqrt{11}$.

D. সাধারণ সূত্র সাহায্যে সমাধান

$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ এই দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধানের সূত্র নিম্নরূপ, যথা :

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

পূর্ণ বর্গে পরিণত করিয়া সমাধান প্রণালীর (C দ্রষ্টব্য) সাহায্যে সূত্রটি পাওয়া যাইতে পারে :

সমীকরণটির উভয়পক্ষকে $4a$ দ্বারা প্রথমে গুণ করিয়া ($\because a\neq 0$) পাওয়া যায়

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

বা $(2ax)^2+2.2ax.b+(b)^2-b^2+4ac=0$

বা $(2ax+b)^2=b^2-4ac$

$\therefore$ $2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$

বা $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (সূত্র হিসাবে ব্যবহার করা চলিবে)

E. দ্বিঘাত প্রকৃতির সমীকরণ (Equations of Quadratic Type)

ধরা যাক্ সমীকরণটি $az^{2n}+bz^n+c=0$ $(a\neq 0)$, যেখানে z, x এর উপর নির্ভরশীল একটি রাশি। এখন $z^n=u$ ধরিলে, সমীকরণটি রূপান্তরিত হইয়া $au^2+bu+c=0$ আকার প্রাপ্ত হয়। ইহাকে সমাধান করিয়া u পাওয়া যাইতে পারে। আবার u এর প্রাপ্ত মান হইতে z এবং z এর প্রাপ্ত মান হইতে x নির্ণয় করা সম্ভব হইতে পারে।

দৃষ্টান্ত 1. $2x^4+x^2-1=0$; ধরা যাক $x^2=u$, তাহা হইলে $2u^2+u-1=0$; ইহাকে সমাধান করিয়া $u=\frac{1}{2}, -1$ পাওয়া যায়। যদি $u=\frac{1}{2}$ হয়, তবে $x=\pm\frac{1}{\surd 2}$; কিন্তু যদি $u=-1$ হয়, তবে $x^2=-1=i^2$, সুতরাং $x=\pm i$.

অতএব সমাধান সেট্‌এ চারিটি উপাদান (element) বর্তমান, যথা:

$\left\{+\frac{1}{\surd 2}, -\frac{1}{\surd 2}, +i, -i\right\}$; এখানে প্রতিটি উপাদান প্রদত্ত সমীকরণটির একটি বীজ।

দৃষ্টান্ত 2. $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$; ধরা যাক $x+\frac{1}{x}=u$;

তাহা হইলে $2u^2-7u+5=0$ এবং $u=5/2, 1$.

$u=\frac{5}{2}$ হইলে $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$, বা $2x^2-5x+2=0$ এবং $x=2, \frac{1}{2}$.

$u=1$ হইলে $x+\frac{1}{x}=1$, বা $x^2-x+1=0$ এবং $x=\frac{1\pm\surd 3i}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট্‌ $\left\{2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\surd 3}{2}i, \frac{1}{2}-\frac{\surd 3}{2}i\right\}$

F. **মূলচিহ্নাধীন রাশিযুক্ত সমীকরণ** (Radical Equations)

দৃষ্টান্ত 1. $\sqrt{x+3}-\surd x=1$; পক্ষান্তরপূর্বক, $\sqrt{x+3}=\surd x+1$;

এখন বর্গ করিয়া $x+3=x+2\surd x+1$ বা $\surd x=1$;

$\therefore$ পুনরায় বর্গপূর্বক $x=1$ পাওয়া যায়

যাচাই করিয়া দেখ: $\sqrt{1+3}-\surd 1=2-1=1$

টীকা। প্রাপ্ত মান প্রদত্ত সমীকরণে বসাইয়া যাচাই করা প্রয়োজন, উভয় পক্ষ সমান হয় কি না, কারণ এই প্রণালীতে প্রায়ই **অতিরিক্ত বীজ** (extraneous roots) আসে, এবং এইগুলি সমাধান সেট্‌ হইতে বাতিল করিতে হইবে।

দৃষ্টান্ত 2. $x^2-6x-\sqrt{x^2-6x-3}=5$; ধরা যাক $u=x^2-6x$;

তাহা হইলে, $u-\sqrt{u-3}=5$, বা $\sqrt{u-3}=u-5 \cdots \cdots (i)$

বর্গ করিয়া, $u-3=u^2-10u+25$, বা $u^2-11u+28=0$ এবং $u=7, 4$

যেহেতু কেবল $u=7$, (i) কে সিদ্ধ করে [$u=4$ সিদ্ধ করে না], সুতরাং $x^2-6x=u$ সমীকরণে $u=7$ বসাইয়া $x^2-6x-7=0$ পাওয়া যায়, অর্থাৎ $x=7, -1$.

$x=7$ এবং $x=-1$ উভয়েই মূল সমীকরণকে সিদ্ধ করে, সুতরাং উহারাই নির্ণেয় বীজ।

টীকা। সমীকরণটিকে যদি $\sqrt{x^2-6x-3}=x^2-6x-5$ এই আকারে লেখা যায় এবং পরে উভয় পক্ষের বর্গ লওয়া যায়, তবে প্রাপ্ত সমীকরণটি চতুর্থ ঘাতের হইবে এবং উহার সমাধান কষ্টসাধ্য হইবে।

প্রশ্নমালা V(A)

সমাধান কর :

1. $\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{2x+1}=\frac{1}{4}$

2. $\dfrac{1-2x}{3-x}=\dfrac{x-2}{3x-1}$

3. $\dfrac{2x-1}{x+2}+\dfrac{x+2}{2x-1}=\frac{10}{3}$

4. $\dfrac{1}{4-x}-\dfrac{1}{2+x}=\frac{1}{4}$

5. $12x-9x^2=5$

6. $\dfrac{5x^2-2p^2}{x}=\dfrac{p}{3}$

7. $\dfrac{2x+3}{4x-1}=\dfrac{3x-2}{3x+2}$

8. $\sqrt{x^2-\sqrt{2x+1}}=2-x$

9. $\sqrt{2x+8}+\sqrt{2x+5}=\sqrt{8x+25}$

10. $\sqrt{2+x}-4+\sqrt{10-3x}=0$

11. $x^4-3x^2-10=0$

12. $\sqrt{x+2}-\sqrt[4]{x+2}=6$

13. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-\frac{7}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=2$

14. $x^{-4/3}-5x^{-2/3}+4=0$

15. $\dfrac{x^2+2}{x}+\dfrac{8x}{x^2+2}=6$

16. $4x^{-4}-17x^{-2}+4=0$

17. উল্লম্বভাবে উপরদিকে উৎক্ষিপ্ত একটি বল t সেকেণ্ড পরে উৎক্ষেপ বিন্দু হইতে h মিটার উচ্চতায় পৌঁছাইল ; $h=64t-16t^2$ হইলে

(a) কত সময় পরে বলটি মাটি হইতে 40 মি. উচ্চে উঠিবে ?

(b) বলটি কি কোন সময়ে মাটি হইতে 80 মি. উচ্চে উঠিবে ?

(c) ঐ বল কর্তৃক অতিক্রান্ত সর্বোচ্চ উচ্চতা কত ?

18. নিম্নলিখিত সমীকরণটির কোন সমাধান কি সম্ভব ?

$$\sqrt{2x-10}+\sqrt{x+9}=2$$

(এখানে $\sqrt{\ }$ এই চিহ্ন ধনাত্মক বর্গমূল নির্দেশ করিতেছে)

[উঃ 1. $\pm 3/2$. 2. ± 1. 3. $1, -7$. 4. $2, -8$. 5. $\frac{1}{3}(2\pm i)$.

6. $\frac{3}{8}p, -\frac{3}{8}p$. 7. $\frac{6 \pm \sqrt{42}}{3}$. 8. $3/2$. 9. -2. 10. ± 2.

11. $\pm\sqrt{5}, \pm i\sqrt{2}$. 12. 79. 13. $2 \pm \sqrt{3}, \frac{-1+i\sqrt{15}}{4}$. 14. $\pm 1, \pm \frac{1}{3}$.

15. $1 \pm i, 2 \pm \sqrt{2}$. 16. $\pm 2, \pm 1/2$. 17. (*a*) 0·78 এবং 3·22 সে. (উৎক্ষেপের পর), (*b*) না, (*c*) 64 মিটার।]

5·3. দ্বিঘাত সহ-সমীকরণ (Simultaneous Equations involving Quadratics)

A. একটি একঘাত এবং একটি দ্বিঘাত সমীকরণ

উদা. 1. সমাধান কর : $x+y=7,\ x^2+y^2=25$

সমাধান। একঘাত সমীকরণটি হইতে একটি অজ্ঞাত রাশির মান অপরটির সাহায্যে নির্ণয় করা হইল : ধরা যাক্ $y=7-x$.

এখন দ্বিঘাত সমীকরণটিতে y এর এই মান বসাইয়া পাওয়া যায়

$$x^2+(7-x)^2=25.$$

অর্থাৎ $x^2-7x+12=0$ অর্থাৎ $x=3$ বা $x=4$

যখন $x=3,\ y=7-x=4$; যখন $x=4,\ y=7-x=3$.

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান : $x=3, y=4$ এবং $x=4, y=3$.

B. দুইটি সমীকরণই $ax^2+by^2=c$ আকারের

উদা. 2. $2x^2-y^2=7,\ 3x^2+2y^2=14$

y অপনয়নের জন্য প্রথম সমীকরণটিকে 2 দ্বারা গুণ করিয়া উহাকে দ্বিতীয় সমীকরণটির সহিত যোগ করা হইল। তাহা হইলে $7x^2=28$, বা $x^2=4$, $\therefore\ x=\pm 2$.

যখন $x=\pm 2$, তখন প্রথম সমীকরণ হইতে $y^2=1$, বা $y=\pm 1$

সুতরাং নিম্নে প্রদত্ত চারিটি সমাধান পাওয়া গেল :

$$\left.\begin{matrix}x=2\\y=1\end{matrix}\right\};\ \left.\begin{matrix}x=-2\\y=\ \ 1\end{matrix}\right\};\ \left.\begin{matrix}x=\ \ 2\\y=-1\end{matrix}\right\};\ \left.\begin{matrix}x=-2\\y=-1\end{matrix}\right\}.$$

ইহারা সকলেই প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে সিদ্ধ করে।

C. দুইটি সমীকরণ $ax^2+bxy+cy^2=d$ আকারের

উদা. 3. (1) $x^2+xy=6$; (2) $x^2+5xy-4y^2=10$

উভয় সমীকরণে $y=mx$ বসান হইল। (1) হইতে $x^2=6/(1+m)$ এবং (2) হইতে $x^2=10/1+5m-4m^2$.

তাহা হইলে $\frac{6}{1+m}=\frac{10}{1+5m-4m^2}$ বা $m=\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$;

সুতরাং $y=\frac{x}{2}$, $y=\frac{x}{3}$; (1)-এ $y=\frac{x}{2}$ বসাইয়া $y^2=1$, $\therefore\ y=\pm 1$.

$\therefore$ যখন $y=1$, $x=2y=2$; যখন $y=-1$, $x=-2$

আবার $y=\frac{x}{3}$ লইয়া দেখান যায় যে,

যখন $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=\frac{3}{\sqrt{3}}$ এবং যখন $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=\frac{-3}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ সমাধান চারিটি : $\left.\begin{matrix}x=2\\ y=1\end{matrix}\right\}$; $\left.\begin{matrix}x=-2\\ y=-1\end{matrix}\right\}$;

$$\left.\begin{matrix}x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{matrix}\right\};\quad \left.\begin{matrix}x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{matrix}\right\}.$$

D. x এবং y এর পরস্পর স্থান বিনিময়ের ফলে যদি কোন সমীকরণের পরিবর্তন না হয় তবে সমীকরণটিকে প্রতিসম (symmetric) বলা হয়। যথা $x^2+y^2-3xy+4x+4y=8$ সমীকরণ x এবং y সম্পর্কে প্রতিসম।

এইরূপ প্রতিসম সহ-সমীকরণ সহজে সমাধান করা যায়, যদি $x=u+v$, $y=u-v$ এইরূপ ধরিয়া লওয়া হয়।

উদা. 4. (1) $x^2+y^2+2x+2y=32$; (2) $x+y+2xy=22$

(1) এবং (2)এ $x=u+v$, $y=u-v$ বসাইয়া পাওয়া যায় :

(3) $u^2+v^2+2u=16$; (4) $u^2-v^2+u=11$

(3) এবং (4) যোগ করিয়া, $2u^2+3u-27=0$ বা $u=3, -9/2$

যখন $u=3$, $v^2=1$ বা $v=\pm 1$; যখন $u=-9/2$, $v^2=19/4$

বা $v=\pm\sqrt{19}/2$

সুতরাং (3) এবং (4)এর সমাধান হইল :

$u=3$, $v=1$; $u=3$, $v=-1$; $u=-9/2$, $v=\sqrt{19}/2$; $u=-9/2$, $v=-\sqrt{19}/2$

এখন যেহেতু $x=u+v$, $y=u-v$; (1) এবং (2)এর চারিটি সমাধান হইল :
$x=4$, $y=2$; $x=2$, $y=4$; $x=-9/2+\sqrt{19}/2$, $y=-9/2-\sqrt{19}/2$,
$x=-9/2-\sqrt{19}/2$, $y=-9/2+\sqrt{19}/2$.

প্রশ্নমালা V(B)

সমাধান কর (অজ্ঞাত রাশির কেবল বাস্তব মান নির্ণেয়) :

1. $x^2+y^2=25, x+2y=10$. 2. $xy+x^2=24, y-3x+4=0$.
3. $4x+5y=6, xy=-2$. 4. $4y^2+3x^2=57, 2x^2-y^2=5$.
5. $9/x^2+16/y^2=5, 18/x^2-12/y^2=-1$.
6. $x^2+3xy=18, x^2-5y^2=4$.
7. $x^2+2xy=16, 3x^2-4xy+2y^2=6$.
8. $x^3-y^3=9, x-y=-3$.
9. $1/x^3+1/y^3=35, 1/x^2-1/xy+1/y^2=7$.
10. $x^2+y^2=180, 1/x+1/y=1/4$.

[উঃ **1.** $(0, 5)$; $(4, 3)$. **2.** $(3, 5)$; $(-2, -10)$. **3.** $(-1, 2)$; $(5/2, -4/5)$.
4. $(\surd 7, 3), (\surd 7, -3), (-\surd 7, 3), (-\surd 7, -3)$.
5. $(3, 2), (3, -2), (-3, 2), (-3, -2)$. **6.** $(3, 1), (-3, -1)$.
7. $(2, 3), (-2, -3)$. **8.** $(1, -2), (2, -1)$. **9.** $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.
10. $(12, 6), (6, 12), (-5+\surd 65, -5-\surd 65), (-5-\surd 65, -5+\surd 65)$.]

5.4. বহুপদবিশিষ্ট রাশি (Polynomials) : ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem) এবং গুণনীয়ক উপপাদ্য (Factor Theorem)

সংজ্ঞা। n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা এবং $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ ধ্রুবক (বাস্তব অথবা জটিল সংখ্যা) হইলে $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}\cdots\cdots a_{n-1}x+a_n$ $(a_0\neq 0)$ আকারের রাশিমালাকে x এর n ঘাতের **বহুপদবিশিষ্ট রাশি** (a polynomial in x of degree n) বলা হয়।

উদা. 1. $ax+b$ $(a\neq 0)$ রাশিটি হইল **এক** ঘাতের বহুপদ রাশি। [কেবল **এক ঘাত রাশি**ও (linear expression) বলা হয়।]

উদা. 2. xএর **দ্বিঘাত রাশিমালার** (quadratic expression) আকার হইল ax^2+bx+c $(a\neq 0)$—ইহাকে **দুই** ঘাতের বহুপদ রাশি বলা হয়।

উদা. 3. xএর **ত্রিঘাত রাশিমালার** (cubic expression) আকার হইল ax^3+bx^2+cx+d $(a\neq 0)$; ইহাকে **তিন** ঘাতের বহুপদ রাশি বলা হয়।

উদা. 4. xএর **চতুর্ঘাত রাশিমালা** (biquadratic expression) আকার হইল $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $(a\neq 0)$; ইহাকে **চার** ঘাতের বহুপদ রাশি বলা হয়।

উদা. 5. যে কোন ধ্রুবক রাশি, ধরা যাক c, কে **শূন্য** ঘাতের বহুপদ রাশি বলিয়া মনে করা যায়। [ইহা **একটি বিশেষ ক্ষেত্র** হিসাবে গণ্য করিতে হইবে, কারণ $c=c.x^{\circ}$]

স্মরণ রাখিতে হইবে যে x এর বহুপদ রাশিতে x এর ঘাত-সূচক সংখ্যাগুলি কেবল **ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা** হওয়া উচিত (ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা অথবা ভগ্নাংশ প্রভৃতি নহে)।

অপেক্ষক সম্পর্কিত অঙ্কপাতন (Functional Notation)

নিখুঁত আলোচনার মধ্যে না যাইয়া কেবল এই কথা বলিলেই বর্তমান উদ্দেশ্যের পক্ষে যথেষ্ট হইবে যে **চল** (a variable) হইল x, y বা z প্রভৃতির মত এমন একটি **প্রতীক** (symbol) যাহা বিভিন্ন মান ধারণে সক্ষম। অপরপক্ষে, **ধ্রুবক** (a constant) বলিতে সাধারণতঃ k, c প্রভৃতি অক্ষর দ্বারা নির্দেশিত এমন একটি রাশিকে বুঝায় যাহা কোন বিশেষ প্রশ্নে সর্বদা একটি স্থির মানের পরিবর্তে ব্যবহৃত হয়। এখন দুইটি চল, যথা x এবং y, পরস্পর এমন সম্পর্কযুক্ত হইতে পারে যে x কর্তৃক গৃহীত প্রতিটি মানের জন্য yএর একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায়। এইরূপ ক্ষেত্রে বলা হইয়া থাকে যে

y হইল xএর একটি অপেক্ষক (y is a function of x);

অথবা y, xএর উপর নির্ভরশীল (y depends on x).

উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক্, x এবং y এর মধ্যে এইরূপ সম্পর্ক বিদ্যমান যে

$$y=x^2-5x+2.$$

তাহা হইলে $x=0$ হইলে $y=2$; $x=1$ হইলে $y=-2$; $x=2$ হইলে $y=-4$ ইত্যাদি। এক্ষেত্রে 'y, xএর উপর নির্ভরশীল' অথবা 'y, xএর একটি অপেক্ষক'। xএর প্রদত্ত কোন মানের জন্য y যে মান গ্রহণ করে তাহাকে $f(x)$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয় ; ইহাকে "x"এর "f" ("f" of "x") এইভাবে পড়িতে হয়। সুতরাং পূর্ববর্তী উদাহরণে প্রদত্ত সম্পর্কটিকে এইভাবে লেখা যায়, যথা

$$y=f(x)=x^2-5x+2.$$

তাহা হইলে $f(0)=2$, $f(1)=-2$, $f(2)=-4$ ইত্যাদি। প্রকৃতপক্ষে f বলিতে xএর নির্দিষ্ট মানের সহিত সংশ্লিষ্ট yএর মান নির্ণয়ের নিয়মটিকে বুঝায়। স্বভাবতই বিভিন্ন নিয়মের জন্য বিভিন্ন প্রতীক যেমন ϕ, F, G প্রভৃতি ব্যবহার করা যাইতে পারে।

অপেক্ষকের ধারণা সংক্রান্ত ব্যাপকতর আলোচনা বর্তমান লেখকদের কলন (calculus) গ্রন্থে করা হইয়াছে। বর্তমান অধ্যায়ে xএর যে বহুপদ রাশির মান xএর

মানের উপর নির্ভরশীল তাহাকে $f(x)$ বা $\phi(x)$ প্রভৃতি প্রতীক দ্বারা উল্লেখ করা হইল। দৃষ্টান্তস্বরূপ, দ্বিঘাত রাশিমালা $ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$ কে $f(x)$ প্রতীক দ্বারা উল্লেখ করা যাইতে পারে। তাহা হইলে $f(\alpha)=a\alpha^2+b\alpha+c$, $f(0)=c$, $f(\beta)=a\beta^2+b\beta+c$ ইত্যাদি। প্রসঙ্গত উল্লেখ থাকে যে বহুপদ রাশি $f(x)$এর অনুরূপ সমীকরণটি হইল $f(x)=0$; যেমন দ্বিঘাত রাশিমালা ax^2+bx+c এর অনুরূপ দ্বিঘাত সমীকরণটি হইল $ax^2+bx+c=0$.

সংজ্ঞা। ধরা যাক্ $f(x)$ একটি বহুপদ রাশি এবং $x=\alpha$ হইলে $f(\alpha)=0$; তাহা হইলে α কে $f(x)=0$ সমীকরণের একটি **বীজ** বলা হইবে। ইহাও বলা যায় যে α হইল বহুপদ রাশি $f(x)$ এর একটি **শূন্য** (α is a zero of the polynomial $f(x)$)।

যথা : $x=1$ হইল $f(x)=x^2-4x+3=0$ এর একটি বীজ ($\because f(1)=0$)

বা $x=1$ হইল $f(x)=x^2-4x+3$ এর একটি শূন্য (*a* zero of x^2-4x+3))।

দুইটি বহুপদ রাশির মধ্যে ভাগক্রিয়া (Division of two Polynomials)

দেওয়া আছে, $f(x)$ এবং $\phi(x)$ দুইটি বহুপদ রাশি এবং $\phi(x)$ **এর ঘাত,** $f(x)$ **এর ঘাত অপেক্ষা কম অথবা অধিকপক্ষে উহার সমান ; তাহা** হইলে $f(x)$ কে $\phi(x)$ দ্বারা ভাগ করার অর্থ, **ভাগফল** (quotient) এবং **ভাগশেষ** (remainder) বলিয়া কথিত এমন দুইটি বহুপদ রাশি যথাক্রমে $Q(x)$ এবং $R(x)$ নির্ণয় কর যেন অভিন্নভাবে (identically)

$f(x) \equiv \phi(x)\,Q(x)+R(x)$ হয়, এবং $R(x)$ এর ঘাত, $\phi(x)$ এর ঘাত **অপেক্ষা কম** হয়। বিশেষ ক্ষেত্রে $R(x)=0$ অথবা কোন একটি ধ্রুবক রাশিও হইতে পারে।

উদা. ধরা যাক্ $f(x)=ax^2+bx+c(a \neq 0)$, $\phi(x)=x-\alpha$. $f(x)$ কে $\phi(x)$ দ্বারা সাধারণ প্রক্রিয়ায় ভাগ করা হইল, যথা :

$$
\begin{array}{r|l}
 & ax+(b+a\alpha) \\ \hline
\phi(x)=x-\alpha & f(x)=ax^2+bx+c \\
 & ax^2-a\alpha x \\
 & -\quad + \\ \cline{2-2}
 & (b+a\alpha)x+c \\
 & (b+a\alpha)x-(b+a\alpha)\alpha \\
 & -\qquad\qquad + \\ \cline{2-2}
 & a\alpha^2+b\alpha+c
\end{array}
$$

এক্ষেত্রে $Q(x)=ax+(b+a\alpha)$ এবং $R(x)=a\alpha^2+b\alpha+c$

সুতরাং $f(x)=\{ax+(b+a\alpha)\}(x-\alpha)+(a\alpha^2+b\alpha+c)$

মন্তব্য ঃ একঘাত রাশি দ্বারা ভাগের ক্ষেত্রে প্রাপ্ত ভাগশেষ ধ্রুবক রাশি হইয়া থাকে, যেমন এখানে ঐ ভাগশেষ$=a\alpha^2+b\alpha+c=f(\alpha)$। ইহা আরও সাধারণ ক্ষেত্রেও সত্য ঃ

ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem) : **কোন বহুপদ রাশি $f(x)$ কে এক ঘাতের বহুপদ রাশি $(x-\alpha)$ দ্বারা ভাগ করিলে প্রাপ্ত ভাগশেষ হইবে $f(\alpha)$.**

প্রমাণ। $f(x)$ কে $(x-\alpha)$ দ্বারা ভাগ করার অর্থ দুইটি বহুপদ রাশি $Q(x)$ এবং $R(x)$ নির্ণয়, যেখানে

$f(x)=Q(x)(x-\alpha)+R(x)$ হইবে, এবং $R(x)$ এর ঘাত, $x-\alpha$'র ঘাত অপেক্ষা কম হইবে, অর্থাৎ $R(x)$ **হয় শূন্য** অথবা **কোন ধ্রুবক** রাশি।

ঐ অভেদটিতে $x=\alpha$ বসাইলে $f(\alpha)=Q(\alpha)(\alpha-\alpha)+R(\alpha)=R(\alpha)$ অর্থাৎ ভাগশেষ$=f(\alpha)=$ধ্রুবক।

অনুসিদ্ধান্ত। $f(x)$ কে $px+q$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ $f(-q/p)$ হইবে।

সংজ্ঞা। উপরের ভাগক্রিয়ায় যদি দেখা যায় যে $R(x)=0$, তবে বলা হইবে যে $f(x)$, $\phi(x)$ দ্বারা সম্পূর্ণ **বিভাজ্য** (divisible) অর্থাৎ $\phi(x)$ হইল $f(x)$ এর একটি উৎপাদক। ঐ ক্ষেত্রে $f(x)$ এর দুইটি উৎপাদক হইবে—একটি $\phi(x)$ এবং অপরটি $Q(x)$।

উপরের উদাহরণে যদি $f(\alpha)=0$ হয়, **অর্থাৎ** α যদি $f(x)=0$ এর একটি বীজ হয়, তবে $f(x)=ax^2+bx+c$ র উৎপাদক দুইটি, যথা : (i) $x-\alpha$ এবং (ii) $ax+(b+a\alpha)$; তাহা হইলে নিম্নে প্রদত্ত উপপাদ্যটি পাওয়া গেল, যথা :

উৎপাদক বা গুণনীয়ক উপপাদ্য (Factor Theorem) : $x-\alpha$, বহুপদ রাশি $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হইবে, যদি এবং কেবলমাত্র যদি $f(\alpha)=0$ হয়, অর্থাৎ যদি এবং কেবলমাত্র যদি α, $f(x)=0$ এর একটি বীজ হয়।

পরবর্তী অনুচ্ছেদ শুরু করার পূর্বে নিম্নে বিবৃত বীজগণিতের মৌলিক উপপাদ্যটি প্রণিধানযোগ্য :

বীজগণিতের মৌলিক উপপাদ্য (Fundamental Theorem of Algebra) : প্রত্যেক বহুপদ রাশি, $f(x)$, এর অন্ততঃ একটি বাস্তব অথবা জটিল

শূন্য (zero) আছে, অর্থাৎ xএর অন্তত একটি এমন মান α আছে যাহার জন্য $f(\alpha)=0$ হইবে।

উপপাদ্যটির প্রমাণ বর্তমান গ্রন্থের আলোচ্য বিষয়ের বহির্ভূত, কিন্তু প্রয়োজনবোধে এই উপপাদ্যটি ব্যবহার করা হইবে।

5·5. দ্বিঘাত সমীকরণের তত্ত্ব (The Theory of Quadratic Equations)

1. $f(x)\equiv ax^2+bx+c \ (a\neq 0)$ একটি দ্বিঘাত রাশিমালা ;

ইহার অনুরূপ সমীকরণ, যথা $f(x)=0$, এর দুইটি বীজ বর্তমান ; বীজ দুইটি হইল

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ এবং } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad [\text{ অনুচ্ছেদ } 5·2 \text{ D দ্রষ্টব্য }]$$

এই বীজ দুইটিকে α এবং β দ্বারা নির্দেশ করা হইলে

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a}$$

অর্থাৎ **বীজ দুইটির সমষ্টি** $= -\dfrac{ax^2+bx+c \text{ এ } x \text{ এর সহগ}}{ax^2+bx+c \text{ এ } x^2 \text{ এর সহগ}}$

আবার $\alpha.\beta=\left(\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$

$$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

অর্থাৎ **বীজ দুইটির গুণফল** $=\dfrac{ax^2+bx+c \text{ এর ধ্রুবক পদ}}{ax^2+bx+c \text{ এ } x^2 \text{ এর সহগ}}$

উদাহরণ 1. যদি $px^2-qx+r=0$ এর বীজ দুইটি a এবং b হয়, তবে $a+b$, $a-b$ এবং a^2+b^2 এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান। এখানে $a+b=-\dfrac{(-q)}{p}=\dfrac{q}{p}$ এবং $a.b=\dfrac{r}{p}$

$$\therefore \quad (a-b)^2=(a+b)^2-4ab=\frac{q^2}{p^2}-\frac{4r}{p}=\frac{q^2-4rp}{p^2}$$

$$\therefore \quad a-b=\pm\sqrt{q^2-4rp}/p$$

এবং $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=\dfrac{q^2}{p^2}-\dfrac{2r}{p}=\dfrac{q^2-2pr}{p^2}$

2. **দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি এবং কেবলমাত্র দুইটি বীজ আছে** (A Quadratic equation has two and only two roots)

প্রমাণ। ধরা যাক্ $f(x)\equiv ax^2+bx+c(a\neq 0)$ একটি দ্বিঘাত রাশিমালা। সুতরাং ইহার অনুরূপ দ্বিঘাত সমীকরণটি $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$.

প্রমাণ করা হইবে, সমীকরণটির (*i*) দুইটি বীজ এবং (*ii*) কেবলমাত্র দুইটি বীজ আছে।

ভূমিকা (Preliminaries) : ধরা যাক্ $x-\alpha$ (α যে-কোন সংখ্যা) একটি একঘাত রাশি। $x-\alpha$ দ্বারা $f(x)\equiv ax^2+bx+c$ কে ভাগ করা হইল।

$$
\begin{array}{r|l}
 & ax+(a\alpha+b) \\
x-\alpha & ax^2+bx+c \\
 & ax^2-a\alpha x \\
 & -\quad + \\
\hline
 & (a\alpha+b)x+c \\
 & (a\alpha+b)x \quad -a\alpha-b\alpha \\
 & -\qquad\quad +\quad + \\
\hline
 & a\alpha^2+b\alpha+c
\end{array}
$$

দেখা গেল ভাগফল $ax+a\alpha+b$ এবং ভাগশেষ $a\alpha^2+b\alpha+c$; সুতরাং লেখা যায়,

$$f(x)=(x-\alpha)(ax+a\alpha+b)+(a\alpha^2+b\alpha+c)$$

এখন ধরা যাক্ $ax^2+bx+c=0$ এর α একটি বীজ; তাহা হইলে সংজ্ঞা অনুসারে $a\alpha^2+b\alpha+c=0$

$$\therefore\quad f(x)=(x-\alpha)(ax+a\alpha+b)$$

অর্থাৎ $(x-\alpha)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

বিপরীতক্রমে, মনে করা যাক্ $x-\alpha$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক; তাহা হইলে ভাগক্রিয়া হইতে দেখা যায় যে ভাগশেষ, যথা $a\alpha^2+b\alpha+c$, অবশ্যই শূন্য হইবে। সুতরাং α, অবশ্যই $ax^2+bx+c=0$ এর একটি বীজ।

সিদ্ধান্ত : α যদি $ax^2+bx+c=0$ এর একটি বীজ হয়, তবে $(x-\alpha)$ অবশ্যই $f(x)\equiv ax^2+bx+c$ এর একটি উৎপাদক এবং বিপরীতক্রমে, $x-\alpha$ যদি $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হয়, তবে α অবশ্যই $ax^2+bx+c=0$ এর একটি বীজ।

প্রথম ধাপ। বীজগণিতের মৌলিক উপপাদ্য অনুসারে $ax^2+bx+c=0$ এর অবশ্যই একটি বীজ আছে। ধরা হইল, উহা α ; তবে উপরে প্রমাণিত সিদ্ধান্ত অনুসারে $(x-\alpha)$ অবশ্যই $f(x)=ax^2+bx+c$ এর একটি উৎপাদক। এখন $f(x)$ কে $x-\alpha$ দ্বারা ভাগক্রিয়ার দ্বারা দেখা গিয়াছে যে $f(x)$ এর একই সঙ্গে আর একটি একঘাত উৎপাদক বিদ্যমান, যথা $(ax+a\alpha+b)$। সুতরাং $ax^2+bx+c=0$ এর ঐ উৎপাদকের অনুরূপ আর একটি বীজও আছে; উহা $x=-(a\alpha+b)/a$;

সুতরাং দেখা গেল যে $ax^2+bx+c=0$ এর একটি বীজের অস্তিত্ব যদি ধরিয়া লওয়া যায় তাহা হইলে সমীকরণটির দুইটি বীজ আছে বলিয়া সিদ্ধান্ত করিতে হয়। যেহেতু মৌলিক উপপাদ্য অনুসারে সমীকরণটির একটি বীজ নিশ্চয়ই বিদ্যমান, অতএব উহার দুইটি বীজ বিদ্যমান।

দ্বিতীয় ধাপ। এখন ইহা প্রমাণ করিতে হইবে যে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের কেবল দুইটি বীজই আছে। সম্ভব হইলে ধরা যাক, সমীকরণটির তিনটি বীজ আছে এবং উহারা α, β, γ (তিনটিই পরস্পর ভিন্ন নাও হইতে পারে)। তাহা হইলে পূর্ববর্তী যুক্তি অনুসারে $f(x)$ এর তিনটি উৎপাদক থাকা উচিত, যথা $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, $(x-\gamma)$। সুতরাং লিখিতে পারা যায় যে

$$ax^2+bx+c=k(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma),$$

যেখানে k, $f(x)$ এর অন্য কোন সম্ভাব্য উৎপাদক নির্দেশ করিতেছে।

এখন, ডানপক্ষ এমন একটি রাশি যাহার ঘাত তিন অপেক্ষা কম নহে, কিন্তু বামপক্ষ একটি দ্বিঘাত রাশি ; এইরূপ দুই রাশির মধ্যে সমতা সম্ভব নহে।

সুতরাং $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের তিনটি বীজ আছে, এইরূপ অনুমানের ফলে একটি অসম্ভব পরিস্থিতির উদ্ভব হইতেছে, অর্থাৎ অনুমানটি ভুল। সুতরাং কোন দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটির অধিক বীজ আছে এইরূপ অনুমান করা যায় না। সুতরাং উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

টীকা 1. প্রথম ধাপে প্রমাণিত হয় যে $ax^2+bx+c=0$ এর বীজ দুইটির সমষ্টি $-b/a$. ($\because$ একটি বীজ α এবং অপরটি $-(a\alpha+b)/a$; সুতরাং উহাদের সমষ্টি $-b/a$).

টীকা 2. $ax^2+bx+c=0$ এর যে দুইটি বীজ আছে, তাহা সমীকরণটি সমাধান করিয়া সরাসরি প্রমাণ করা যায় (অনুচ্ছেদ 5·2 এর D দ্রষ্টব্য)। কিন্তু উহা হইতে প্রমাণিত হয় না যে সমীকরণটির কেবলমাত্র দুইটি বীজ আছে। এইজন্য উপপাদ্যটির উভয় অংশ প্রমাণ করিতে পূর্ববর্তী যুক্তিধারা অনুসরণ করা হইয়াছে।

3. xএর তিনটি বিভিন্ন মান দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$কে সিদ্ধ করিতে পারে না। কিন্তু যদি xএর তিনটি বিভিন্ন মান দ্বারা $ax^2+bx+c=0$ শর্তটি সিদ্ধ হয় তবে $ax^2+bx+c=0$ একটি অভেদ (অর্থাৎ ইহা xএর সকল মান দ্বারাই সিদ্ধ হয়)।

প্রমাণ। প্রথম অংশ : সম্ভব হইলে ধরা যাক্ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$টি xএর তিনটি **বিভিন্ন** মান, যথা α, β, γ দ্বারা সিদ্ধ হয়।

তাহা হইলে $$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \quad \cdots \quad \text{(i)}$$
$$a\beta^2+b\beta+c=0 \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$
$$a\gamma^2+b\gamma+c=0 \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিলে, $a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0$,

বা $(\alpha-\beta)\{a\alpha+a\beta+b\}=0$

$$\therefore \quad a\alpha+a\beta+b=0 \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

$(\because \alpha, \beta$ ভিন্ন, $\therefore \alpha-\beta\neq0)$

অনুরূপে (ii) হইতে (iii) বিয়োগ করিলে, $a(\beta+\gamma)+b=0 \quad \cdots \quad$ (v)

এখন (iv) হইতে (v) বিয়োগ করিলে, $a(\alpha-\gamma)=0 \quad \cdots \quad$ (vi)

কিন্তু ইহা অসম্ভব, কারণ কল্পনা অনুসারে $a\neq0$ এবং $\alpha\neq\gamma$. সুতরাং এইরূপ অনুমান করা যুক্তিবিরুদ্ধ যে xএর তিনটি বিভিন্ন মান দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ কে সিদ্ধ করিতে পারে।

দ্বিতীয় অংশ : এখন $ax^2+bx+c=0$ এই শর্তটি বিবেচনা করা যাক্। যদি xএর তিনটি বিভিন্ন মান, যথা α, β, γ ইহাকে সিদ্ধ করে, তবে পূর্বের ন্যায় পর পর উপরের (i) হইতে (vi) পর্যন্ত ধাপগুলি পাওয়া যায়।

এখন কল্পনা অনুসারে α ও γ সমান নয় বলিয়া (vi)এর শর্তটি সিদ্ধ হইবে, যদি কেবল $a=0$ হয়। সেক্ষেত্রে (v) হইতে পাওয়া যায় $b=0$ এবং (i)এ $a=0$, $b=0$ বসাইয়া $c=0$ পাওয়া যায়। সুতরাং xএর তিনটি বিভিন্ন মান $ax^2+bx+c=0$ শর্তটিকে সিদ্ধ করিতে পারে, এই অনুমানটি সত্য হইবে, যদি $a=0$, $b=0$ এবং $c=0$ হয়।

তাহা হইলে প্রদত্ত শর্তটিকে নিম্নের আকারে লেখা যায়, যথা :

$$0.x^2+0\,x+0=0,$$

এবং দেখা যায়, ইহা **xএর সকল মানের ক্ষেত্রে** সত্য, অর্থাৎ প্রকারান্তরে বলা যায়, এইরূপ ক্ষেত্রে $ax^2+bx+c=0$ হইল একটি **অভেদ**।

টীকা। দুইটি বীজগণিতীয় রাশির মধ্যে সমতা চিহ্ন স্থাপন করিলে যে সম্পর্ক প্রকাশ পায় তাহা হয় **একটি সমীকরণ** অথবা **একটি অভেদ**। যদি অজ্ঞাত রাশিটির সকল মানে উভয় পক্ষ সমান হয় তবে উহাকে **অভেদ** বলা হয় ; কিন্তু যদি

অজ্ঞাত রাশিটির **নির্দিষ্ট সংখ্যক** মানের জন্যই উভয় পক্ষ সমান হয় তবে উহাকে **সমীকরণ** বলা হয়।

দৃষ্টান্তস্বরূপ বলা যায়, $(x+1)^2=x^2+2x+1$ হইল একটি অভেদ, কারণ xএর যে-কোন মানে ইহার উভয় পক্ষ সমান; কিন্তু $x^2-4x+3=0$ হইল একটি সমীকরণ, কারণ xএর নির্দিষ্ট সংখ্যক (এখানে 1 এবং 3 এই দুইটি) মানে ইহার দুই পক্ষ সমান হইতে দেখা যায়। বাস্তবিকপক্ষে, $f(x)$ যদি n ঘাতের একটি বহুপদ রাশি হয়, তবে $f(x)=0$ সমীকরণের n সংখ্যক এবং কেবলমাত্র n সংখ্যক বীজ থাকিবে (বীজগণিতের মৌলিক উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্ত হিসাবে ইহা পাওয়া যায়)।

উদা. 2. a, b, c তিনটি বিভিন্ন সংখ্যা হইলে প্রমাণ কর যে নিম্নলিখিত সম্পর্কটি একটি অভেদ :

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

সমাধান। স্পষ্টত সম্পর্কটি $Ax^2+Bx+C=0$ এই আকারের।

যদি $x=a$ বসান হয়, তবে বামপক্ষ $=a^2$ এবং ডানপক্ষ $=a^2$ অর্থাৎ $x=a$ প্রদত্ত শর্তটি সিদ্ধ করে। অনুরূপে দেখা যায়, $x=b$ এবং $x=c$ও প্রদত্ত শর্ত সিদ্ধ করে। কল্পনা অনুসারে a, b, c পরস্পর ভিন্ন সংখ্যা, অর্থাৎ দেখা গেল, তিনটি বিভিন্ন মান, যথা a, b, c, $Ax^2+Bx+C=0$ আকারের শর্তটি সিদ্ধ করিতেছে। সুতরাং প্রদত্ত সম্পর্কটি একটি অভেদ।

4. দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের প্রকৃতি বা ধর্ম (Nature of the roots of a quadratic equation)

ধরা যাক, দ্বিঘাত সমীকরণটি $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$। আরও ধরা যাক, ইহার সহগগুলি বাস্তব এবং যদি অন্যভাবে উল্লিখিত না হয়, তবে **মূলদ**।

জানা আছে, সমীকরণটির বীজ দুইটি :

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ এবং } \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

মূল চিহ্নের নিচের রাশি, যথা b^2-4ac কে নিরূপক (discriminant) বলা হয় (কারণ পরবর্তী আলোচনা হইতে দেখা যাইবে, ইহাই বীজ দুইটির প্রকৃতি নিরূপণে সাহায্য করে)। ইহাকে D অক্ষর দ্বারা নির্দেশ করা হইবে ; সুতরাং

$$D=b^2-4ac.$$

A. যদি D ঋণাত্মক হয় (অর্থাৎ যদি $D<0$), তবে α এবং β, $p\pm iq$ (p, q বাস্তব) আকারের জটিল সংখ্যা। সুতরাং

"$D<0$ হইলে দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজ দুইটি **কাল্পনিক** (Imaginary)"।

যথা : $2x^2-6x+7=0$; এখানে $D=(-6)^2-4.(2).(7)=-20$ এবং ইহা ঋণাত্মক।

$\therefore$ সমীকরণটির বীজ দুইটি কাল্পনিক।

B. যদি $D=0$ হয় তবে বীজ দুইটি $\alpha=-\frac{b}{2a}$, $\beta=-\frac{b}{2a}$;

অর্থাৎ বীজ দুইটি সমান। সুতরাং

"$D=0$ এবং সহগগুলি বাস্তব হইলে বীজ দুইটি **বাস্তব ও সমান** (real and equal)"

"$D=0$ এবং সহগগুলি মূলদ হইলে বীজ দুইটি **বাস্তব, মূলদ ও সমান** (real, rational and equal)"

যথা : $x^2-4x+4=0$এর বীজ দুইটি বাস্তব, মূলদ ও সমান, কারণ $D=0$ এবং সহগগুলি মূলদ সংখ্যা।

C. এখন মনে করা যাক্ D ধনাত্মক (অর্থাৎ $D>0$)। এক্ষেত্রে D হয় পূর্ণ বর্গ সংখ্যা অথবা পূর্ণ বর্গ সংখ্যা নয়।

"যদি $D>0$, D পূর্ণ বর্গ সংখ্যা এবং সহগগুলি মূলদ হয়, তবে বীজ দুইটি **বাস্তব, মূলদ ও অসমান** (real, rational and unequal)"।

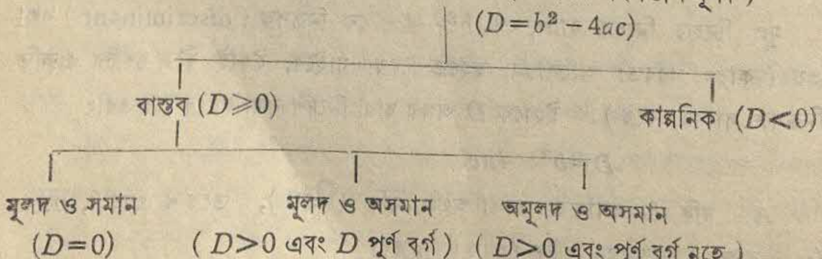
"যদি $D>0$ হয় এবং D পূর্ণ বর্গ সংখ্যা না হয়, তবে বীজ দুইটি **বাস্তব, অমূলদ ও অসমান** (real, irrational and unequal)"।

যথা : (*i*) $4x^2-8x+3=0$ সমীকরণের বীজ দুইটি বাস্তব, মূলদ ও অসমান, কারণ এখানে $D=(-8)^2-4.4.3=16$, অর্থাৎ পূর্ণ বর্গ সংখ্যা কিন্তু শূন্য নহে।

(*ii*) $4x^2+2x-1=0$ এর বীজ দুইটি সমান, অমূলদ ও অসমান, কারণ এখানে $D=2^2-4.4.(-1)=20$ অর্থাৎ ধনাত্মক, কিন্তু পূর্ণ বর্গ সংখ্যা নহে।

নিম্নলিখিত তালিকাটি স্মরণ রাখা যাইতে পারে :

দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$এর বীজদ্বয় (যেখানে সহগগুলি মূলদ)



উদা. 3. দ্বিঘাত সমীকরণ $x^2+2(m+2)x+9m=0$এর **বীজ দুইটি সমান হইলে** m**এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান। বীজ দুইটি সমান হওয়ার শর্ত : নিরূপক $=0$

এখানে $D=\{2(m+2)\}^2-4.1.9m$

$\therefore$ যদি বীজ দুইটি সমান হয়, তবে $D=0$.

অর্থাৎ $4(m+2)^2-36m=0$

অর্থাৎ $m^2+4m+4-9m=0$

অর্থাৎ $m^2-5m+4=0$

অর্থাৎ $(m-4)(m-1)=0$

অর্থাৎ $m=4$ অথবা 1.

উদা. 4. প্রমাণ কর যে $x^2-2kx+k^2-l^2+2lm-m^2=0$ (k, l, m **মূলদ**) **এর বীজদ্বয় মূলদ।**

সমাধান। বীজ দুইটি মূলদ হইবে, যদি নিরূপক

$D=(-2k)^2-4.1.(k^2-l^2+2lm-m^2)$, পূর্ণ বর্গ হয়।

$\because$ এখানে $D=4(l^2-2lm+m^2)=4(l-m)^2\geqslant 0$,

$\therefore$ বীজ দুইটি মূলদ। ($l=m$ হইলে বীজ দুইটি সমান এবং $l\neq m$ হইলে উহারা অসমান।)

5. জ্ঞাত বীজ দুইটির সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণটি নির্ণয় (Formation of a quadratic equation whose roots are known)

$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ এর দুইটি বীজ α এবং β হইলে দেখা গিয়াছে যে $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}\cdot$ সুতরাং সমীকরণটিকে নিম্ন প্রকারে লেখা যায়, যথা :

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ [$\because$ $a\neq 0$, সুতরাং a দ্বারা ভাগ করা হইল]

বা $x^2-(\alpha+\beta)x+\beta=0.$ $\left[\because \alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha.\beta=\frac{c}{a}\right]$

অর্থাৎ x^2-(**বীজদ্বয়ের সমষ্টি**)$x+$**বীজদ্বয়ের গুণফল**$=0.$

এইভাবে যে সমীকরণের দুইটি বীজ জানা আছে তাহাকে লেখা যায়। প্রদত্ত বীজ দুইটির সমষ্টি এবং গুণফল নির্ণয় করিয়া উপরের সমীকরণটিতে বসাইলেই ঈপ্সিত সমীকরণটি পাওয়া যাইবে।

বিকল্প পদ্ধতি : $f(x)=0$ সমীকরণের দুইটি বীজ α এবং β হইলে $f(x)$ এর অনুরূপ দুইটি উৎপাদক $(x-\alpha)$ এবং $(x-\beta)$ থাকিবে—ইহা জানা হইয়াছে। আবার দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি মাত্র বীজ (দুইয়ের অধিক নয়) থাকে। সুতরাং নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণটিকে

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$, এইভাবে লেখা যায়।

সুতরাং $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0.$

উদা. 5. কোন সমীকরণের বীজ দুইটি 3 এবং -2 হইলে সমীকরণটি নির্ণয় করিতে হইবে।

নির্ণেয় সমীকরণ : $x^2-[3+(-2)]x+3.(-2)=0$

বা $x^2-x-6=0.$

বিকল্প পদ্ধতি : 3 এবং -2 বীজ দুইটির অনুরূপ উৎপাদকদ্বয় হইল $x-3$ এবং $x+2$; সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ :

$$(x-3)(x+2)=0$$

$$\text{বা } x^2-x-6=0.$$

মন্তব্য : ইহা একটি সম্পূর্ণ সাধারণ পদ্ধতি। মনে করা যাক, 1, 2, -3, 4 যে সমীকরণের বীজ তাহাকে নির্ণয় করিতে হইবে। নির্ণেয় সমীকরণটি

$$(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)=0\ ;$$

ইহা একটি চারিঘাতের সমীকরণ (a biquadratic equation)।

এই প্রসঙ্গে দুইটি প্রয়োজনীয় উপপাদ্য প্রমাণ করা হইল :

উপপাদ্য 1. বাস্তব সহগ সম্পন্ন দ্বিঘাত সমীকরণের কাল্পনিক বীজদ্বয় যুগল আকারে থাকে, অর্থাৎ $ax^2+bx+c=0$ (যেখানে $a\neq0$ এবং a, b, c বাস্তব) সমীকরণের একটি বীজ $p+iq$(p, q বাস্তব) হইলে অপর বীজটি ইহার বিপরীত $p-iq$ হইবে।

[In a quadratic equation with real coefficients, the imaginary roots occur in pairs, *i.e.*, if one root of the equation $ax^2+bx+c=0$ (where $a\neq0$ and a, b, c are all real) be $p+iq$ (p, q real) then the other root will be its conjugate $p-iq$.]

প্রদত্ত : (i) একটি দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$; ইহার সহগগুলি বাস্তব। এবং (ii) সমীকরণটির একটি বীজ $p+iq$ (p, q বাস্তব)।

প্রমাণ করিতে হইবে : সমীকরণটির অপর বীজ $p-iq$.

প্রমাণ। যেহেতু $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ এর একটি বীজ $p+iq$

$\therefore$ $a(p+iq)^2+b(p+iq)+c=0$

বা $ap^2-aq^2+bp+c+i(2apq+bq)=0$ $\quad\cdots\quad$ (i)

জটিল সংখ্যা $\alpha+i\beta=0$ হইতে পারে, যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\alpha=0$, $\beta=0$ হয়,

$\therefore$ এই ক্ষেত্রে (i) এর সম্পর্কটি সত্য হইবে, যদি এবং কেবলমাত্র যদি

$ap^2-aq^2+bp+c=0$
এবং $2apq+bq=0$ হয় $\quad\cdots\quad$ (ii)

এখন ax^2+bx+c **রাশিতে** $x=p-iq$ বসাইয়া পাওয়া যায় :

$$ax^2+bx+c=a(p-iq)^2+b(p-iq)+c$$
$$=(ap^2-aq^2+bp+c)-i(2apq+bq)$$
$$=0-i.0 \quad \text{[(ii) হইতে মান বসাইয়া]}$$
$$=0.$$

সুতরাং (ii) সত্য হইলে $p-iq$, $ax^2+bx+c=0$ এর একটি বীজ, অর্থাৎ, যদি $p+iq$, $ax^2+bx+c=0$ এর একটি বীজ হয় তবে **অপর বীজটি** $p-iq$ (কারণ সমীকরণটির দুইটির অধিক বীজ হইতে পারে না)।

ঠিক একই প্রকারে প্রমাণ করা যায় যে, যদি $p-iq$, $ax^2+bx+c=0$এর একটি বীজ হয় তাহা হইলে $p+iq$ উহার অপর বীজ।

উদা. 6. কোন বাস্তব সহগ সম্পন্ন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ $3+5i$; সমীকরণটি নির্ণয় কর।

সমাধান। যেহেতু সমীকরণটির সহগসমূহ বাস্তব এবং যেহেতু একটি বীজ $3+5i$, সুতরাং অপর বীজটি অবশ্যই $3-5i$; বীজ দুইটির সমষ্টি$=6$ এবং গুণফল$=3^2-(5i)^2=3^2+5^2=34$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ : $x^2-6x+34=0$.

উপপাদ্য 2. দ্বিঘাত সমীকরণের সহগগুলি মূলদ হইলে ইহার অমূলদ বীজদ্বয় যুগ্মভাবে থাকে, অর্থাৎ, যদি $ax^2+bx+c=0$($a\neq 0$ এবং a, b, c মূলদ) এর একটি বীজ $p+\sqrt{q}$ (p মূলদ কিন্তু $\sqrt{q}$ অমূলদ) হয় তবে সমীকরণটির অপর বীজ $p-\sqrt{q}$ হইবে।

[In a quadratic equation with rational coefficients, the irrational roots occur in pairs, *i. e.*, if one root of $ax^2+bx+c=0$

($a\neq0$), where a, b, c are all rational, be $p+\sqrt{q}$ (where p is rational but $\sqrt{q}$ is irrational), then the other root of the equation will be $p-\sqrt{q}$.]

[প্রমাণ উপপাদ্য 2এর প্রমাণের অনুরূপ]

প্রদত্ত : (i) $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ ; a, b, c মূলদ এবং (ii) $ax^2+bx+c=0$ এর একটি বীজ $p+\sqrt{q}$, যেখানে p মূলদ কিন্তু $\sqrt{q}$ একটি করণী (অর্থাৎ অমূলদ)

প্রমাণ করিতে হইবে : $ax^2+bx+c=0$ এর অপর বীজটি $p-\sqrt{q}$.

প্রমাণ : যেহেতু $p+\sqrt{q}$, $ax^2+bx+c=0$ এর একটি বীজ

$\therefore\ a(p+\sqrt{q})^2+b(p+\sqrt{q})+c=0$

বা $(ap^2+aq+bp+c)+\sqrt{q}(2ap+b)=0$, ··· (i)

$\alpha+\sqrt{\beta}$ আকারের অমূলদ রাশির মান শূন্য হইতে পারে না, যদি না $\alpha=0$ এবং $\sqrt{\beta}=0$ হয়।

সুতরাং (i) এর সম্পর্কটি সত্য যদি এবং কেবলমাত্র যদি

$$\left.\begin{aligned} ap^2+aq+bp+c&=0 \\ \text{এবং}\ \sqrt{q}(2ap+b)&=0\ \text{হয়} \end{aligned}\right\}\quad \cdots \text{(ii)}$$

এখন ax^2+bx+c রাশিতে $x=p-\sqrt{q}$ বসাইলে পাওয়া যায়

$$\begin{aligned} &a(p-\sqrt{q})^2+b(p-\sqrt{q})+c \\ &=(ap^2+aq+bp+c)-\sqrt{q}(2ap+b) \\ &=0-0\quad \text{[(ii) এর মান বসাইয়া]} \\ &=0 \end{aligned}$$

অর্থাৎ, (ii) সত্য হইলে অর্থাৎ $p+\sqrt{q}$, $ax^2+bx+c=0$ এর বীজ হইলে, $p-\sqrt{q}$ ও $ax^2+bx+c=0$ এর বীজ।

সুতরাং $ax^2+bx+c=0$ এর একটি বীজ $p+\sqrt{q}$ হইলে ইহার **অপর বীজটি** $p-\sqrt{q}$ (কারণ দুইটির অধিক বীজ এখানে থাকিতে পারে না)। ঠিক একইভাবে প্রমাণ করা যায় যে, যদি $ax^2+bx+c=0$ এর একটি বীজ $p-\sqrt{q}$ হয়, তবে উহার অপর বীজটি অবশ্যই $p+\sqrt{q}$ হইবে।

উদা. 7. কোন মূলদ সহগবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ $2+\sqrt{3}$; সমীকরণটি নির্ণয় কর।

যেহেতু দ্বিঘাত সমীকরণটির সহগগুলি মূলদ এবং যেহেতু একটি বীজ $2+\sqrt{3}$ (প্রদত্ত), সুতরাং অপর বীজটি অবশ্যই $2-\sqrt{3}$ (সমীকরণটি দ্বিঘাত হওয়ায় অপর বীজটি অবশ্যই বিদ্যমান)। বীজ দুইটির সমষ্টি এবং গুণফল যথাক্রমে 4 এবং 1.

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ : $x^2-4x+1=0$.

প্রশ্নমালা V(C)

[A]

1. দেখাও যে x এর সকল মানের জন্য নিম্নলিখিত সম্পর্কগুলি সত্য :

(i) $(x-a)^2-(a-b)(b-x)=(b-x)^2-(b-a)(a-x)$.

(ii) $(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b)$
$=(a-b)(a-c)(b-c)$.

2. মনে কর $f(x)\equiv ax^2+bx+c=(x-r)Q+R$, যেখানে $f(x)$ হইল দ্বিঘাত রাশিমালা $ax^2+bx+c(a\neq 0)$, Q এবং R হইল যথাক্রমে ভাগফল ও ভাগশেষ, যখন $f(x)$ কে $x-r$ দ্বারা ভাগ করা হয় এবং r যে-কোন সংখ্যা।

(a) প্রমাণ কর যে $Q=a(x+r)+b$ এবং $\mathrm{R}=f(r)$

(b) যদি r, $f(x)=0$ সমীকরণের একটি বীজ হয় তবে প্রমাণ কর যে

(i) $f(x)$, $(x-r)$ দ্বারা সম্পূর্ণ বিভাজ্য

(ii) $f(x)=0$ এর যে দুইটি বীজ আছে তাহাদের সমষ্টি $-b/a$ এবং গুণফল c/a.

3. $ax^2+bx+c=0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ, যাহার কোন সহগের মান শূন্য নয়। ধর ইহার বীজ দুইটি α এবং β; সহগগুলির সাহায্যে $\alpha+\beta$ এবং $\alpha\beta$ এর মানকে প্রকাশ কর।

এখন নিম্নের বিবৃতিগুলি যে সত্য তাহা যুক্তির সাহায্যে দেখাও :

(i) যদি a এবং c একই চিহ্নযুক্ত হয়, কিন্তু b এর চিহ্ন উহাদের বিপরীত হয়, তবে উভয় বীজ ধনাত্মক হইবে।

(ii) যদি a, b এবং c এর চিহ্ন একই হয় তবে উভয় বীজ ঋণাত্মক হইবে।

(iii) যদি a এবং c পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয়, তবে একটি বীজ ধনাত্মক এবং অপর বীজটি ঋণাত্মক হইবে।

4. $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c বাস্তব) সমীকরণের বীজগুলি সম্পর্কে নিম্নলিখিত ক্ষেত্রগুলিতে কি বলিতে পার ?

(i) $b=0$; $ac<0$ অথবা $ac>0$;

(ii) $c=0$; $ab\neq 0$;

(iii) $b=c=0$; $a\neq 0$;

(iv) $a=0$; $bc\neq 0$.

5. প্রমাণ কর যে $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ এর সহগগুলি, যথা a, b, c যদি বাস্তব হয় তবে সমীকরণটির উভয় বীজই হয় বাস্তব অথবা উভয় বীজই কাল্পনিক।

[B]

1. (a) যদি $x^2-15-m(2x-8)=0$ সমীকরণের বীজ দুইটি সমান হয় তবে m এর মান নির্ণয় কর।

(b) k এর মান কত হইলে $x^2-2x(1+3k)+7(3+2k)=0$ সমীকরণের বীজ দুইটি সমান হইবে ?

[উঃ (a) 3, 5 ; (b) 2, $-10/9$]

2. নিম্নলিখিত বীজগুলি যে যে সমীকরণের তাহাদের নির্ণয় কর :

(i) $-4/5, 3/7$; (ii) $\dfrac{p-q}{p+q}, -\dfrac{(p+q)}{p-q}$;

(iii) $7\pm 2\sqrt{5}$; (iv) $-p\pm 2\sqrt{2q}$;

(v) $-3\pm 5i$; (vi) $\pm i(a-b)$;

(vii) $-3, 2/3, 1\frac{1}{2}$; (viii) $2\pm\sqrt{3}, 4$.

[উঃ (i) $35x^2+13x-12=0$; (ii) $(p^2-q^2)x^2+4pqx-p^2+q^2=0$
(iii) $x^2-14x+29=0$; (iv) $x^2+2px+p^2-8q=0$;
(v) $x^2+6x+34=0$; (vi) $x^2+a^2-2ab+b^2=0$;
(vii) $6x^3+11x^2-19x+6=0$; (viii) $x^3-8x^2+17x-4=0$.]

3. (i) প্রমাণ কর যে $4x^2+25x+20=0$ এর বীজগুলি কাল্পনিক হইতে পারে না।

(ii) প্রমাণ কর যে a, b, h বাস্তব সংখ্যা হইলে $(x-a)(x-b)=h^2$ এর বীজগুলি সর্বদা বাস্তব।

(iii) a, b, c বাস্তব হইলে প্রমাণ কর যে $x^2-2ax+a^2-b^2-c^2=0$ এবং $(a-b+c\,x^2+4(a-b)x+(a-b-c)=0$ এই উভয় সমীকরণের বীজগুলি বাস্তব।

4. প্রমাণ কর যে নিম্নে প্রদত্ত সমীকরণ দুইটির প্রত্যেকটির বীজগুলি মূলদ :

$$(a+c-b)x^2+2cx+(b+c-a)=0$$

এবং $abc^2x^2+3a^2cx+b^2cx-6a^2-ab+2b^2=0$

5. (i) $px^2-2qx+p=0$ এবং $qx^2-2px+q=0$ এই সমীকরণ দুইটির একটির বীজ দুইটি যদি বাস্তব ও অসমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে অপরটির বীজ দুইটি কাল্পনিক।

(ii) $x^2+2px+qr=0$ এবং $x^2+2(q+r)x+2p^2+q^2+r^2=0$ এর একটির বীজ দুইটি বাস্তব ও অসমান হইলে অপরটির বীজ দুইটি কাল্পনিক হইবে ; ইহা প্রমাণ কর।

[C]

1. মূলদ সহগবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণটি নির্ণয় কর, যদি উহার একটি বীজ নিম্নলিখিত সংখ্যা হয় :

(i) $\dfrac{1}{7-3\sqrt{2}}$; (ii) $\dfrac{1}{4+\sqrt{3}i}$; (iii) $\dfrac{p-\sqrt{p^2-4q}}{p+\sqrt{p^2+4q}}$ (p, q মূলদ)

[উঃ (i) $31x^2-14x+1=0$; (ii) $19x^2-8x+1=0$; (iii) $qx^2-(p^2-2q)x+q=0$]

2. (i) m এর মান কত হইলে নিম্নলিখিত সমীকরণটির বীজ দুইটি সমান কিন্তু পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে ?

$$\frac{x^2-bx}{ax-c}=\frac{m-1}{m+1}$$

[উঃ $m=\dfrac{a-b}{a+b}$]

[ইঙ্গিত : $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজ দুইটি সমান কিন্তু পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে যদি বীজ দুইটির সমষ্টি শূন্য হয়, অর্থাৎ যদি $-b/a=0$, অর্থাৎ যদি $b=0$ হয়, অর্থাৎ যদি x এর সহগ শূন্য হয়।]

(ii) যদি $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-a}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b-a}$ এর বীজ দুইটি মানে সমান কিন্তু পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয় তবে প্রমাণ কর যে $a^2=2b^2$.

3. (i) প্রমাণ কর যে দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ এর বীজ দুইটি পরস্পরের অন্যোন্যক হইবে, যদি $a=c$ হয়।

[**স্মরণ কর :** দুইটি সংখ্যার গুণফল এক হইলে উহারা পরস্পরের অন্যোন্যক।]

(ii) $x^2-2(5+2m)x+3(7+10m)=0$ সমীকরণের বীজ দুইটি পরস্পরের অন্যোন্যক হইলে m এর মান কত হইবে? [উঃ $m=-2/3$]

4. দেখাও যে $(ab-c)x^2+2(bc-a^2)x+(ac-b^2)=0$ এর বীজ দুইটি সমান হইবে যদি $a=0$ হয় অথবা $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ হয়।

[টীকা। দ্বিতীয় শর্ত, যথা $a^3+b^3+c^3-3abc=0$, কে নিম্নপ্রকারেও বিবৃত করা যায়ঃ

"হয় $a+b+c=0$ অথবা $a=b=c$"]

5. (i) দেখাও যে $(a^4+b^4)x^2+4abcdx+(c^4+d^4)=0$ সমীকরণের বীজ দুইটি বাস্তব হইলে উহারা ভিন্ন হইতে পারে না।

(ii) প্রমাণ কর যে $x^2+2(a+b+c)x+3(ab+bc+ca)=0$ এর বীজ দুইটি সর্বদা বাস্তব, এবং উহারা সমান হইবে যখন $a=b=c$ হইবে।

প্রশ্নমালা V(D)

(বীজ ও সহগ সম্পর্কীয় বিবিধ প্রশ্ন)

1. (i) যে শর্তে $ax^2+bx+c=0$ এর একটি বীজ অপরটির n গুণ হইবে তাহা নির্ণয় কর।

[ইঙ্গিতঃ "শর্ত" বলিতে বুঝায় "সহগগুলির মধ্যে সম্পর্ক"—যে শর্ত অবশ্যই বিদ্যমান, যদি বীজ দুইটিকে প্রশ্নটির দ্বারা আরোপিত সীমাবন্ধনের অধীন থাকিতে হয়। বর্তমান প্রশ্নে নিম্নপ্রকারে অগ্রসর হওয়া যায়ঃ

ধরা যাক্, একটি বীজ α; প্রশ্নানুসারে অপর বীজটি $n\alpha$.

বীজ দুইটির সমষ্টি $=\alpha+n\alpha=-b/a$, এবং

বীজ দুইটির গুণফল $=\alpha.n\alpha=c/a$

নির্ণেয় শর্তটি α অপনয়ন দ্বারা পাওয়া যায়।

প্রথমটি হইতে $\alpha^2(1+n^2)=b^2/a^2$ এবং দ্বিতীয়টি $n\alpha^2=c/a$

ভাগ দ্বারা, $\frac{\alpha^2(1+n)^2}{\alpha^2 n}=\frac{b^2/a^2}{c/a}=\frac{b^2}{a^2}\times\frac{a}{c}=\frac{b^2}{ac}$

সুতরাং নির্ণেয় শর্তটি হইলঃ $\frac{(n+1)^2}{n}=\frac{b^2}{ac}$.]

(ii) $x^2-px+q=0$ সমীকরণের একটি বীজ যদি অপরটির দ্বিগুণ হয় তবে প্রমাণ কর যে $2p^2=9q$.

(iii) $px^2+qx+r=0$ এর একটি বীজ যদি অপরটির বর্গ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $q^3+p^2r+pr^2=3pqr$.

(iv) $ax^2+bx+c=0$ এর একটি বীজ অপর বীজটির পাঁচ গুণ হইলে a, b, c এর মধ্যে বিদ্যমান সম্পর্কটি নির্ণয় কর। [উঃ $5b^2=36ac$

(v) যদি $ax^2+bx+b=0$ এর বীজ দুইটি $p:q$ অনুপাতে হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=0.$$

[ইঙ্গিত : এখানে একটি বীজ $p\alpha$ এবং অপর বীজটি $q\alpha$.

তাহা হইলে $\alpha(p+q)=-b/a$ এবং $\alpha^2pq=b/a$, বা $\alpha\sqrt{pq}=\sqrt{\frac{b}{a}}$

এখন ভাগ দ্বারা $\frac{\alpha(p+q)}{\alpha\sqrt{pq}}=\frac{-b/a}{\sqrt{b/a}}=-\sqrt{b/a}$

$$\therefore \frac{p}{\sqrt{pq}}+\frac{q}{\sqrt{pq}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=0$$

বা $\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=0.$]

(vi) $ax^2+bx+c=0$ এর বীজ দুইটি $3:4$ অনুপাতে থাকিলে প্রমাণ কর যে

$$12b^2=49ac.$$

(vii) যদি $x^2+bx+c=0$ এর বীজ দুইটির অনুপাত $x^2+px+q=0$ এর বীজদ্বয়ের অনুপাতের সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে $b^2q=p^2c$.

(viii) $ax^2+bx+c=0$ এর বীজ দুইটির অনুপাত r হইলে প্রমাণ কর যে r এর মান নিম্নলিখিত দ্বিঘাত সমীকরণ হইতে নির্ণয় করা যায় :

$$(ac-b^2)r^2+2acr+ac=0.$$

2. প্রমাণ কর যে $x^2-2ax+b^2=0$ এবং $x^2-2bx+a=0$ এই সমীকরণ দুইটির মধ্যে একটির বীজদ্বয়ের সমান্তর মধ্যক অপরটির বীজদ্বয়ের গুণোত্তর মধ্যকের সমান (অর্থাৎ প্রথমটির বীজদ্বয়ের A.M. এবং G.M., দ্বিতীয়টির বীজদ্বয়ের G.M. এবং A.M. এর সহিত যথাক্রমে সমান)।

সাধারণ বীজ (Common Root)

3. $ax^2+bx+c=0$ এবং $a'x^2+b'x+c'=0$ এই সমীকরণ দুইটির একটি বীজ সাধারণ হইবার শর্ত নির্ণয় কর। সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ বীজ বিদ্যমান, ইহা ধরিয়া লইয়া এই সাধারণ বীজটি নির্ণয় কর ; এই ক্ষেত্রে সমীকরণদ্বয়ের প্রত্যেকের অপর বীজটি নির্ণয় কর। সমীকরণ দুইটির উভয় বীজই সাধারণ হইবার শর্তটিও নির্ণয় কর।

[উঃ (i) ধরা যাক, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ বীজটি α ; তাহা হইলে

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0$$
$$a'\alpha^2+b'\alpha+c'=0$$

বজ্রগুণন প্রণালীতে পাওয়া যায় :

$$\frac{\alpha^2}{bc'-b'c}=\frac{\alpha}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b}$$

প্রথম অনুপাত দুইটি হইতে $\frac{\alpha^2}{\alpha}=\frac{bc'-b'c}{ca'-c'a}$, অর্থাৎ $\alpha=\frac{bc'-b'c}{ca'-c'a}$

এবং শেষ দুইটি অনুপাত হইতে $\frac{\alpha}{1}=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}$, অর্থাৎ $\alpha=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}$.

∴ একটি বীজ সাধারণ হইবার নির্ণেয় শর্ত হইল :

$\frac{bc'-b'c}{ca'-c'a}=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}$, বা $(bc'-b'c)(ab'-a'b)=(ca'-c'a)^2$.

(*ii*) স্পষ্টত সাধারণ বীজ α হইল $\frac{bc'-b'c}{ca'-c'a}$ অথবা $\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}$ (সাধারণ বীজের শর্ত অনুসারে ইহারা সমান বলিয়া)।

(*iii*) যদি α সাধারণ বীজ হয়, তবে $ax^2+bx+c=0$ এর অপর বীজটি $\frac{c/a}{\alpha}$

(∵ বীজদ্বয়ের গুণফল $=c/a$),

অর্থাৎ অপর বীজটি $=\frac{c(ca'-c'a)}{a(bc'-b'c)}$ বা $\frac{c(ab'-a'b)}{a(ca'-c'a)}$

[α'র তুল্যমান দুইটি লইয়া]

অনুরূপভাবে, $a'x^2+b'x+c'=0$ এর অপর বীজটি হইল :

$\frac{c'(ca'-c'a)}{a'(bc'-b'c)}$ বা $\frac{c'(ab'-a'b)}{a'(ca'-c'a)}$ [α'র তুল্য মান দুইটি লইয়া]

(*iv*) যদি উভয় বীজই সাধারণ হয়, তবে

বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=-\frac{b}{a}=-\frac{b'}{a'}$; ∴ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$

এবং বীজদ্বয়ের গুণফল $=\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$; ∴ $\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}$

∴ নির্ণেয় শর্তটি হইল : $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$.

লক্ষ্য কর যে এই ক্ষেত্রে সমীকরণ দুইটির নিম্নপ্রকার আকার হইবে, যথা :

$$ax^2+bx+c=0 \text{ এবং } k(ax^2+bx+c)=0.$$

4. (*i*) $x^2+px+q=0$ এবং $x^2+qx+p=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি বীজ সাধারণ হইলে প্রমাণ কর যে $p+q+1=0$ অথবা $p=q$.

(ii) যদি $px^2+qx+r=0$ এবং $qx^2+rx+p=0$ এর একটি বীজ সাধারণ হয় তবে দেখাও যে হয় $p+q+r=0$ অথবা $p=q=r$.

(iii) $x^2+px+q=0$ এবং $x^2+p'x+q'=0$ এর একটি বীজ সাধারণ; দেখাও যে এই বীজটি হয় $\frac{pq'-p'q}{q-q'}$ অথবা $\frac{q-q'}{p'-p}$.

(iv) যদি $a+b+c=0$ হয় তবে প্রমাণ কর যে $x^2+ax+bc=0$ এবং $x^2+bx+ca=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি বীজ সাধারণ।

(v) m এর মান কত হইলে $3x^2+4mx+2=0$ এবং $2x^2+3x-2=0$ এই সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকিবে ? [উঃ $\frac{7}{4}, -\frac{11}{8}$.]

(vi) দেখাও যে $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$ এবং

$$(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$$

এই সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ আছে।

5. যদি $x^2+bx+ca=0$ এবং $x^2+cx+ab=0$ সমীকরণদ্বয়ের **শূন্য নহে এমন একটিমাত্র** সাধারণ বীজ থাকে, তবে প্রমাণ কর যে উহাদের অপর বীজগুলি $t^2+at+bc=0$ সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে।

[উঃ $x^2+bx+ca=0$ এবং $x^2+cx+ab=0$ এর সাধারণ বীজটি α হইলে $\alpha^2+b\alpha+c=0$ এবং $\alpha^2+c\alpha+ab=0$.

বিয়োগ দ্বারা, $\alpha(b-c)-a(b-c)=0$; যদি $b\neq c$, হয় তবে সাধারণ বীজ $\alpha=a$; কিন্তু $b\neq c$, কারণ $b=c$ হইলে প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি অভিন্ন হইয়া যায় ও উহাদের উভয় বীজই সাধারণ হয় এবং ইহা প্রদত্ত শর্তবিরুদ্ধ। আবার $\alpha=a$, $x^2+bx+ca=0$ এর একটি বীজ হইলে $a^2+ab+ca=0$, বা $a(a+b+c)=0$;

$$\therefore\ a+b+c=0\ (\because \text{ সাধারণ বীজ } \alpha=a\neq 0).$$

যেহেতু $x^2+bx+ca=0$ এর বীজ দুইটির গুণফল $=ca$, এবং সাধারণ বীজটি a,

$$\therefore\ x^2+bx+ca=0 \text{ এর অপর বীজ} = c$$

অনুরূপভাবে $x^2+cx+ab=0$ এর অপর বীজ $=b$.

সুতরাং যে সমীকরণের বীজ দুইটি b এবং c তাহাকে নিম্ন আকারে লেখা যায়, যথা :

$$t^2-(b+c)t+bc=0$$

বা, $t^2+at+bc=0$; $[\because a=-(b+c)]$

6. কি শর্তে $ax^2+bx+c=0$ এর একটি বীজ $px^2+qx+r=0$ সমীকরণের একটি বীজের অন্যোন্যক হইবে ? [উঃ $(bp-cq)(aq-br)=(cr-ap)^2$]

[**ইঙ্গিত :** ধরা যাক্, $ax^2+bx+c=0$ এর একটি বীজ α; তাহা হইলে $px^2+qx+r=0$ এর একটি বীজ $1/\alpha$ হইবে। সুতরাং $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ এবং $r\alpha^2+q\alpha+p=0$; এখন বজ্রগুণন প্রণালীতে শর্তটি নির্ণয় কর।]

7. যদি α এবং β, $x^2-px+q=0$ সমীকরণের বীজ হয়, তবে নিম্নে প্রদত্ত রাশিগুলির মানকে p এবং q তে প্রকাশ কর :

(i) $\alpha^2+\beta^2$; (ii) $\alpha^3+\beta^3$; (iii) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$; (iv) $\alpha^4\beta^7+\beta^4\alpha^7$;

(v) $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2$; (vi) $(\alpha-\beta)^2$; (vii) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}$;

(viii) $\alpha^4+\beta^4$; (ix) $(1-\alpha+\alpha^2)(1-\beta+\beta^2)$; (x) $\dfrac{1}{p-\alpha}+\dfrac{1}{p-\beta}$.

সমাধান : এখানে $\alpha+\beta=p$ এবং $\alpha\beta=q$.

(i) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=p^2-2q.$

(ii) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=p(p^2-2q+q)=p(p^2-q)$
$=p^3-pq.$

(iii) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha\beta)^2}=\dfrac{p^2-2q}{q^2}.$

(iv) $\alpha^4\beta^7+\beta^4\alpha^7=\alpha^4\beta^4(\alpha^3+\beta^3)=q^4(p^3-pq).$ [(ii) এর সাহায্যে]

(v) $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2=\dfrac{(\alpha^2-\beta^2)^2}{(\alpha\beta)^2}=\dfrac{(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2}{(\alpha\beta)^2}=\dfrac{(p^2-2q)^2-4q^2}{q^2}$
$=\dfrac{p^4-4p^2q}{q^2}.$

(vi) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=p^2-4q.$

(vii) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\dfrac{p^3-pq}{q}.$ [(ii) এর সাহায্যে]

(viii) $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=(p^2-2q)^2-2q^2$
$=p^4-4p^2q+2q^2.$

(ix) $(1-\alpha+\alpha^2)(1-\beta+\beta^2)=1-(\alpha+\beta)+(\alpha^2+\beta^2)-\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha\beta$
$+\alpha^2\beta^2$
$=1-p+p^2-2q-qp+q+q^2$
$=1+p^2+q^2-pq-p-q.$

(x) এখানে সরাসরি মানটি নির্ণয় করা যায় অথবা নিম্নে প্রদত্ত পদ্ধতি অবলম্বন করা যায় :

$\because$ α একটি বীজ, $\therefore$ $\alpha^2-p\alpha+q=0$, বা $\alpha(\alpha-p)=-q$, বা $\dfrac{\alpha}{q}=\dfrac{1}{p-\alpha}$

অনুরূপভাবে $\beta/q=1/(p-\beta)$; $\therefore$ $\dfrac{1}{p-\alpha}+\dfrac{1}{p-\beta}=\dfrac{1}{q}(\alpha+\beta)=\dfrac{p}{q}.$

8. যদি α এবং β, $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ এর বীজ হয়, তবে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মানগুলিকে a, b এবং c তে প্রকাশ কর :

(i) $\alpha^2+\beta^2$; (ii) $\alpha^3+\beta^3$; (iii) $(\alpha-\beta)^2$; (iv) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$;

(v) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$; (vi) $\alpha^4+\beta^4$; (vii) $\alpha^{-3}+\beta^{-3}$;

(viii) $(1-\alpha+\alpha^2)(1-\beta+\beta^2)$; (ix) $\frac{1}{(a\alpha+b)^3}+\frac{1}{(a\beta+b)^3}$;

(x) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+3\alpha\beta$; (xi) $\alpha^2(\alpha^2\beta^{-1}-\beta)+\beta^2(\beta^2\alpha^{-1}-\alpha)$;

(xii) $\alpha^6\beta^9+\alpha^9\beta^6$.

[উঃ (i) $\frac{b^2-2ac}{a^2}$; (ii) $\frac{-(b^3-3abc)}{a^3}$; (iii) $\frac{b^2-4ac}{a^2}$; (iv) $-\frac{bc}{a^2}$;

(v) $\frac{b(3ac-b^2)}{a^2c}$; (vi) $\frac{1}{a^4}(b^4-4ab^2c+2a^2c^2)$; (vii) $\frac{b(3ac-b^2)}{c^3}$;

(viii) $\frac{a^2+b^2+c^2+ab-ac+bc}{a^2}$; (ix) $\frac{b(b^2-3ac)}{a^3c^3}$; (x) $\frac{b^2-2ac-2ab+3c^2}{ac}$;

(xi) $-\frac{b(b^2-4ac)(b^2-ac)}{a^4c}$; (xii) $\frac{bc^6(3ac-b^2)}{a^9}$.]

9. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজ α এবং β হইলে যে সমীকরণের বীজদ্বয় $(\alpha+\beta)^2$ এবং $(\alpha-\beta)^2$, তাহা নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ এবং ইহার বীজদ্বয় α ও β

$$\therefore \alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

নির্ণেয় সমীকরণের বীজ দুইটি $(\alpha+\beta)^2$ এবং $(\alpha-\beta)^2$

$\therefore$ এই বীজ দুইটির সমষ্টি $=(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2$

$$=(\alpha+\beta)^2+(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

$$=2\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{4c}{a}$$

$$=\frac{2b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}=\frac{2(b^2-2ac)}{a^2}$$

এবং বীজ দুইটির গুণফল $=(\alpha+\beta)^2.(\alpha-\beta)^2$

$$=\left(-\frac{b}{a}\right)^2\cdot\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{4c}{a}\right\}$$

$$=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{b^2-4ac}{a^2}=\frac{b^2(b^2-4ac)}{a^4}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ : $x^2-\frac{2(b^2-2ac)}{a^2}x+\frac{b^2(b^2-4ac)}{a^4}=0$

বা, $a^4x^2-2a^2(b^2-2ac)x+b^2(b^2-4ac)=0$.

10. (i) যদি $x^2+x+1=0$ এর বীজ α এবং β হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\frac{\alpha}{\beta}$ এবং $\frac{\beta}{\alpha}$ যে সমীকরণের বীজ, তাহাও $t^2+t+1=0$ এই আকারের।

(*ii*) যদি $p \neq q$ কিন্তু $p^2 = 5p - 3$ এবং $q^2 = 5q - 3$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে p/q এবং q/p যে সমীকরণের বীজ তাহা $3x^2 - 19x + 3 = 0$ এই আকারের।

(*iii*) যদি $ax^2 + bx + c = 0$ এর বীজ দুইটি $lx^2 + mx + n = 0$ এর বীজদ্বয়ের অন্যোন্যক হয় এবং সহগগুলির কোনটি যদি শূন্য না হয় তবে প্রমাণ কর যে $a : b : c = l : m : n$.

(*iv*) α এবং β যদি $x^2 - px + q = 0$ এর বীজ হয়, তবে সেই সমীকরণগুলি নির্ণয় কর যাহাদের বীজগুলি হইল যথাক্রমে

(*a*) α^2 এবং β^2 ; (*b*) $\frac{\alpha^2}{\beta}$ এবং $\frac{\beta^2}{\alpha}$; (*c*) $\frac{q}{p-\alpha}$ এবং $\frac{q}{p-\beta}$

(*d*) $\alpha\beta^{-1}$ এবং $\beta\alpha^{-1}$; (*e*) $\alpha + \beta^{-1}$ এবং $\beta + \alpha^{-1}$;

(*f*) $\alpha + \frac{\alpha^2}{\beta}$ এবং $\beta + \frac{\beta^2}{\alpha}$; (*g*) $\frac{1}{\alpha+\beta}$ এবং $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$.

[উঃ (*a*) $x^2 - (p^2 - 2q)x + q^2 = 0$; (*b*) $qx^2 - (p^3 - 3pq)x + q^2 = 0$;
(*c*) $x^2 - px + q = 0$; (*d*) $qx^2 - (p^2 - 2q)x + q = 0$;
(*e*) $qx^2 - p(q+1)x + (q+1)^2 = 0$; (*f*) $qx^2 - p(p^2 - 2q)x + p^2q = 0$;
(*g*) $pqx^2 - (p^2 + q)x + p = 0$.]

11. (*i*) $ax^2 + 2bx + c = 0$ এর বীজদ্বয় α ও β এবং $px^2 + 2qx + r = 0$ এর বীজদ্বয় $\alpha + k$ এবং $\beta + k$ হইলে প্রমাণ কর যে $\frac{b^2 - ac}{q^2 - pr} = \frac{a^2}{p^2}$.

(*ii*) $x^2 - px + q = 0$ এর বীজ দুইটির অন্তর এক (unity) হইলে প্রমাণ কর যে $p^2 + 4q^2 = (1 + 2q)^2$.

(*iii*) $x^2 + 2px + q = 0$ এবং $x^2 + 2qx + p = 0$ এর বীজগুলির অন্তর যদি কোন ধ্রুবক রাশি হয় তবে প্রমাণ কর যে $p + q = -1$.

12. যদি $x^2 - px + q = 0$ এবং $x^2 - p'x + q' = 0$ এর বীজগুলি যথাক্রমে (α, β) এবং (γ, δ) হয়, তবে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

(*i*) $(\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\alpha - \delta)^2 + (\beta - \delta)^2$

[উঃ $2(p^2 + p'^2 - pp' - 2q - 2q')$]

(*ii*) $(\alpha - \gamma)(\beta - \delta) + (\beta - \gamma)(\alpha - \delta)$. [উঃ $2(q + q') - pp'$]

13. (*i*) α এবং β যদি $x^2 - px + q = 0$ এর বীজ হয়, তবে দেখাও যে $qx^2 - (p^2 - 2q)x + q = 0$ এর একটি বীজ $\alpha\beta^{-1}$.

[ইঙ্গিত : $qx^2 - (p^2 - 2q)x + q = \alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = (\beta x - \alpha)(\alpha x - \beta)$]

(*ii*) $x^2 - px + q = 0$ এর বীজদ্বয় α এবং β হইলে দেখাও যে
$x^2 + (\alpha + \beta - \alpha\beta)x - (\alpha + \beta)\alpha\beta = 0$ এর বীজ দুইটি p এবং q.

পরীক্ষামূলক প্রশ্নমালা (TEST PAPERS)

(সময় : এক ঘণ্টা)

1. $x^2+ax+b=0$ এর একটি বীজ যদি $x^2+cx+d=0$ সমীকরণেরও একটি বীজ হয় তবে প্রমাণ কর যে ইহাদের অপর বীজ দুইটি

$(ad-bc)t^2-(b^2-d^2)t+bd(c-a)=0$ এই সমীকরণের বীজ।

2. $lx^2+2mx+n=0$ এবং $px^2+2qx+r=0$ এই সমীকরণ দুইটির যদি একটি সাধারণ বীজ থাকে তবে প্রমাণ কর যে

$(m^2-ln)x^2+(2mq-lr-pn)x+(q^2-pr)=0$ এর বীজ দুইটি সমান।

3. যদি $\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}$, $x^2-px+q=0$ এর বীজ হয় তবে প্রমাণ কর যে $\alpha+\beta$ এবং $\alpha-\beta$ যে সমীকরণের বীজ তাহা $(4x-p^2)^2=(p^2-4q)^2$.

4. যদি $x^2-bx+c=0$ এর বীজদ্বয় পর পর দুইটি ধনাত্মক যুগ্ম সংখ্যা অথবা পর পর দুইটি ধনাত্মক অযুগ্ম সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে $b^2-4c-4=0$.

5. দেখাও যে $ax^2+by^2=1$ এবং $ax+by=1$ সমাধান করিয়া প্রাপ্ত x এর মান দুইটি সমান হইবে, যদি $a+b=1$ হয়।

6. একটি দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি 7 এবং বীজ দুইটির ঘনের সমষ্টি 91; সমীকরণটি নির্ণয় কর।

7. $4x^2+2x-1=0$ সমীকরণের একটি বীজ যদি α হয়, তবে প্রমাণ কর যে $4\alpha^3-3\alpha$ কে উহার অপর বীজরূপে লওয়া যায়।

8. $x^2-px+q=0$ সমীকরণের বীজ দুইটির অন্তর যদি $x^2-qx+p=0$ সমীকরণের বীজ দুইটির অন্তরের সমান হয় তবে দেখাও যে $p=q$ না হইলে $p+q+4=0$.

9. $x^2-px+q=0$ এর বীজদ্বয় α, β এবং $x^2-qx+p=0$ এর বীজদ্বয় γ, δ হইলে; যে সমীকরণের বীজ দুইটি $\frac{1}{\alpha\delta}+\frac{1}{\gamma\beta}$ এবং $\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\delta}$ তাহা নির্ণয় কর।

10. $x^2+px+q=0$ সমীকরণের একটি বীজ $4+3i$ এবং p ও q বাস্তব হইলে p এবং q এর মান নির্ণয় কর।

p এবং q বাস্তব—এই প্রদত্ত শর্তটিকে সমাধানের যে ধাপে তুমি প্রয়োগ করিয়াছ তাহাকে বিশেষভাবে চিহ্নিত করিয়া দেখাও।

[উঃ 6. $x^2-7x+12=0$. 9. $p^2q^2x^2-p^2q^2x+p^3+q^3-4pq=0$. 10. $p=-8, q=25$.]

5·6. দ্বিঘাত রাশিমালার তত্ত্ব (Theory of Quadratic Expressions)

I. দ্বিঘাত রাশিমালা ax^2+bx+c $(a\neq 0)$ এর চিহ্ন

প্রতিপাদ্য। x এর সকল বাস্তব মানের জন্য কেবল একটি ব্যতিক্রমের ক্ষেত্র ভিন্ন আর সকল ক্ষেত্রে দ্বিঘাত রাশিমালা ax^2+bx+c এর চিহ্ন (x^2 এর সহগ) aর চিহ্নের **অনুরূপ** হয়—ব্যতিক্রমের ক্ষেত্রটি হইল, কেবল যখন অনুরূপ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ এর বীজ দুইটি বাস্তব ও অসমান হয় এবং x এর মান এই বীজ দুইটির মধ্যবর্তী হয়, তখন। শেষোক্ত এই ব্যতিক্রমের ক্ষেত্রে রাশিমালা ax^2+bx+c এর চিহ্ন aর চিহ্নের **বিপরীত** হয়।

প্রমাণ। মনে করা যাক, $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ এর বীজ দুইটি α এবং β;

তাহা হইলে,

$\alpha+\beta=-b/a$ এবং $\alpha\beta=c/a$.

$\therefore$ রাশিমালা ax^2+bx+c

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$$

$$=a(x-\alpha)(x-\beta) \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এখন তিনটি ক্ষেত্রের উদ্ভব হইতে পারে, যথা :

ক্ষেত্র 1. α এবং β বাস্তব ও সমান (অর্থাৎ $\alpha=\beta$)

তাহা হইলে, (1) হইতে $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$.

যদি $x=\alpha$ হয়, তবে ঐ রাশিমালা $=0$; নতুবা x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $(x-\alpha)^2$ সর্বদা ধনাত্মক, ফলে ax^2+bx+c এর চিহ্ন, aর যাহা চিহ্ন তাহাই হইবে।

ক্ষেত্র 2. $\alpha=$একটি জটিল সংখ্যা$=p+iq$ (p, q বাস্তব) এবং

$\beta=$বিপরীত (conjugate) জটিল সংখ্যা$=p-iq$

তাহা হইলে, (1) হইতে $ax^2+bx+c=a(x-p-iq)(x-p+iq)$

$$=a\{(x-p)^2+q^2\}.$$

সুতরাং x এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য $(x-p)^2+q^2$ ধনাত্মক, ফলে রাশিমালা ax^2+bx+c এর চিহ্ন, aর যাহা চিহ্ন তাহাই হইবে।

ক্ষেত্র 3. α এবং β উভয়েই বাস্তব কিন্তু $\alpha\neq\beta$.

যেহেতু α এবং β অসমান, সুতরাং একটি অপরটি অপেক্ষা বৃহত্তর ; ধরা যাক্, $\beta>\alpha$. এখন যদি $x>\beta$ হয়, তবে $(x-\alpha)$ এবং $(x-\beta)$ উভয়ে ধনাত্মক, ফলে

উহাদের গুণফল ধনাত্মক এবং (1) হইতে দেখা যায় যে রাশিমালা ax^2+bx+c এর চিহ্ন, aর চিহ্নের অনুরূপ।

যদি $x<\alpha$ হয়, তবে $(x-\alpha)$ এবং $(x-\beta)$ উভয়েই ঋণাত্মক, সুতরাং উহাদের গুণফল ধনাত্মক, ফলে (1) হইতে দেখা যায় যে রাশিমালা ax^2+bx+c এর চিহ্ন, aর যাহা চিহ্ন তাহাই হইবে।

(প্রতিপাদ্যে উল্লিখিত ব্যতিক্রমের ক্ষেত্র) x এর মান α অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু β অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর (অর্থাৎ $\alpha<x<\beta$)

এই ক্ষেত্রে $x-\alpha$ ধনাত্মক এবং $x-\beta$ ঋণাত্মক, সুতরাং উহাদের গুণফল ঋণাত্মক। ফলে, (1) হইতে দেখা যায় যে রাশিমালা ax^2+bx+c এর চিহ্ন, aর যাহা চিহ্ন তাহার বিপরীত হইবে।

এইভাবে ক্ষেত্র তিনটির একত্র বিবেচনার ফলে সমগ্র প্রতিপাদ্যটি প্রমাণিত হয়।

একটি গুরুত্বপূর্ণ মন্তব্য : স্মরণ রাখিতে হইবে : x এর সকল মানের জন্য রাশিমালা ax^2+bx+c **এর চিহ্ন বিনা ব্যতিক্রমে সর্বদা, aর যাহা চিহ্ন তাহাই হইবে,** যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজ দুইটি (1) কাল্পনিক এবং (2) বাস্তব ও সমান [অর্থাৎ, যদি $b^2-4ac\leqslant 0$] হয়।

প্রয়োগসমূহ : [নিম্নের প্রশ্নগুলির সমাধানে সংশ্লিষ্ট **প্রয়োজনীয় যুক্তি-সমূহ** কিভাবে উপস্থাপিত হইয়াছে তাহা ছাত্রছাত্রীদের লক্ষ্য করিতে পরামর্শ দেওয়া যাইতেছে।]

উদা. 1. রাশিমালা $x^2-7x+12$ এর চিহ্ন নির্ণয় কর, যখন $x=2, 5, 3{\cdot}5$ (সরাসরি x এর মান না বসাইয়া)।

সমাধান। প্রদত্ত রাশিমালা $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$

(*i*) যদি $x=2$ হয়, তবে $(x-3)$ ঋণাত্মক এবং $(x-4)$ও ঋণাত্মক, সুতরাং রাশিমালাটি **ধনাত্মক** হইবে।

(*ii*) যদি $x=5$ হয়, তবে $(x-3)$ এবং $(x-4)$ উভয়ে ধনাত্মক, সুতরাং রাশিমালাটি এক্ষেত্রেও **ধনাত্মক** হইবে।

(*iii*) যদি $x=3{\cdot}5$ হয়, তবে $(x-3)$ ধনাত্মক ও $(x-4)$ ঋণাত্মক, সুতরাং উহাদের গুণফল ঋণাত্মক ; ফলে রাশিমালাটির চিহ্নও **ঋণাত্মক** ($x^2-7x+12$ রাশিমালায় x^2 এর সহগের চিহ্নের **বিপরীত** চিহ্ন।)

উদা. 2. প্রমাণ কর যে x এর সকল **বাস্তব মানের** জন্য রাশিমালাদ্বয় $4x^2-12x+9$ এবং $5x^2-2x+7$ উভয়েই **ধনাত্মক**।

সমাধান। (i) $4x^2-12x+9=(2x-3)^2=4(x-3/2)^2$, সুতরাং ইহা x এর সকল বাস্তব মানের ক্ষেত্রে **ধনাত্মক** (কেবল $x=3/2$ এর ক্ষেত্র ব্যতীত, কারণ তখন উহার মান শূন্য)।

(ii) $5x^2-2x+7=5[x^2-\frac{2}{5}x+\frac{7}{5}]=5[(x-\frac{1}{5})^2+\frac{34}{25}]=5(x-\frac{1}{5})^2+\frac{34}{5}$; সুতরাং x এর সকল বাস্তব মানের ক্ষেত্রে রাশিমালাটি সর্বদা **ধনাত্মক।**

(**লক্ষ্য কর** যে $5x^2-2x+7=0$ এর বীজদ্বয় কাল্পনিক ; এখন প্রতিপাদ্যটির প্রমাণের **দ্বিতীয় ক্ষেত্রের** সহিত ইহার তুলনা কর।)

উদা. 3. প্রমাণ কর যে $\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{2}$ এর মধ্যবর্তী মানগুলি ব্যতীত x এর আর সকল বাস্তব মানের ক্ষেত্রে রাশিমালা $6x^2-5x+1$ ধনাত্মক এবং উহার মান শূন্য, যখন $x=\frac{1}{3}$ এবং $x=\frac{1}{2}$.

সমাধান। $6x^2-5x+1=6x^2-3x-2x+1=(3x-1)(2x-1)$
$$=6(x-\tfrac{1}{3})(x-\tfrac{1}{2}).$$

যুক্তিসমূহ ঃ

(i) যদি $x=\frac{1}{3}$ অথবা $x=\frac{1}{2}$ হয়, তবে রাশিমালাটির মান স্পষ্টত শূন্য হয়।

(ii) যদি $x>\frac{1}{2}$ হয়, তবে $(x-\frac{1}{2})$ এবং $(x-\frac{1}{3})$ উভয়েই ধনাত্মক, সুতরাং রাশিমালাটিও ধনাত্মক।

(iii) যদি $x<\frac{1}{3}$ হয়, তবে $(x-\frac{1}{2})$ এবং $(x-\frac{1}{3})$ উভয়ে ঋণাত্মক, অর্থাৎ উহাদের গুণফল ধনাত্মক ; সুতরাং রাশিমালাটিও ধনাত্মক ;

(iv) যদি $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$ হয়, তবে $(x-\frac{1}{3})$ ধনাত্মক, কিন্তু $(x-\frac{1}{2})$ ঋণাত্মক, সুতরাং উহাদের গুণফল ঋণাত্মক, ফলে রাশিমালাটি **ঋণাত্মক।**

∴ শেষ সিদ্ধান্ত হইল এই যে কেবল $\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{2}$ এর মধ্যবর্তী মানগুলি ব্যতীত x এর আর সকল বাস্তব মানের ক্ষেত্রে রাশিমালাটির সমুদয় মান ধনাত্মক।

আর, $x=\frac{1}{3}$ এবং $x=\frac{1}{2}$ এর ক্ষেত্রে রাশিমালাটির মান **শূন্য।**

উদা 4. [$(ax^2+bx+c)/(lx^2+mx+n)$ আকারের রাশিকে **মূলদ রাশি** বলা হয়।]

দেখাও যে মূলদ রাশি $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ এর মান $\frac{1}{3}$ এবং 3 এর মধ্যে অবস্থিত, যদি x বাস্তব হয়।

সমাধান। ধরা হইল, $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$

$$\text{তাহা হইলে } y(x^2+x+1)=x^2-x+1$$

$$\text{বা, } \quad x^2(y-1)+x(y+1)+(y-1)=0.$$

ইহা x এর দ্বিঘাত সমীকরণ। এখন x বাস্তব হইলে ইহার নিরূপক ঋণাত্মক হইতে পারে না;

অর্থাৎ, $(y+1)^2-4(y-1)(y-1) \nless 0$

বা, $-3y^2+10y-3 \geqslant 0$ ($\because$ $\nless 0$ এর অর্থ $\geqslant 0$)

বা, $3y^2-10y+3 \leqslant 0$ ($\because$ $x>0$ হইলে $-x<0$)

বা, $(3y-1)(y-3) \leqslant 0$

বা, $3(y-\frac{1}{3})(y-3)$ হইল হয় শূন্য অথবা ঋণাত্মক .... (1)

যুক্তিসমূহ :

(i) যদি $y=\frac{1}{3}$ অথবা $y=3$ হয়, তবে $3(y-\frac{1}{3})(y-3)=0$ হয় এবং শর্ত (1) সিদ্ধ হয়।

(ii) যদি $y>3$ হয়, তবে $(y-3)$ এবং $(y-\frac{1}{3})$ উভয়ে ধনাত্মক, সুতরাং $3(y-\frac{1}{3})(y-3)$ ধনাত্মক; অর্থাৎ এই ক্ষেত্রে শর্ত (1) সিদ্ধ হয় না।

(iii) যদি $y<\frac{1}{3}$ হয়, তবে $(y-3)$ এবং $(y-\frac{1}{3})$ উভয়ে ঋণাত্মক, সুতরাং, $3(y-\frac{1}{3})(y-3)$ ধনাত্মক; অর্থাৎ এই ক্ষেত্রেও শর্ত (1) সিদ্ধ হয় না।

(iv) কিন্তু যদি $\frac{1}{3}<y<3$ হয়, তবে $(y-\frac{1}{3})$ ধনাত্মক এবং $(y-3)$ ঋণাত্মক, সুতরাং $3(y-\frac{1}{3})(y-3)$ ঋণাত্মক; অর্থাৎ শর্ত (1) এই ক্ষেত্রে সিদ্ধ হয়।

সিদ্ধান্ত। x বাস্তব হইলে y দ্বারা নির্দেশিত প্রদত্ত রাশির মান $\frac{1}{3}$ হইতে 3 এর মধ্যে অবস্থিত।

টীকা। এই ক্ষেত্রে y অর্থাৎ প্রদত্ত রাশির সর্বোচ্চ মান 3 এবং সর্বনিম্ন মান $\frac{1}{3}$.

উদা. 5. প্রমাণ কর যে x বাস্তব হইলে $\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ এর কোন মান 5 এবং 9 এর মধ্যে হইতে পারে না।

সমাধান। ধরা যাক্, $\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}=y.$

$$\text{তাহা হইলে, } x^2+34x-71=x^2y+2xy-7y$$

$$\text{বা, } \quad x^2(1-y)+2x(17-y)+(7y-71)=0.$$

ইহা x এর দ্বিঘাত সমীকরণ। যদি x বাস্তব হয়, তবে ইহার নিরূপক—

$$\{2(17-y)\}^2-4(1-y)(7y-71)\geqslant 0$$

বা, $4[(289+y^2-34y)-(-7y^2+78y-71)]\geqslant 0$

বা, $4[8y^2-112y+360]\geqslant 0$

বা, $32[y^2-14y+45]\geqslant 0$

বা, $32(y-5)(y-9)\geqslant 0$ ... ... (1)

সুতরাং x বাস্তব হইলে শর্ত (1) পূরণ হওয়া অত্যাবশ্যক।

যুক্তিসমূহ :

(*i*) যদি $y=5$, বা $y=9$ হয়, তবে $32(y-5)(y-9)=0$ হয় এবং শর্ত (1) **পূরণ হয়।**

(*ii*) যদি $y>9$ হয়, তবে $(y-5)$ এবং $(y-9)$ উভয় উৎপাদক ধনাত্মক, সুতরাং উহাদের গুণফল ধনাত্মক ; ফলে শর্ত (1) **পূরণ হয়।**

(*iii*) যদি $y<5$ হয়, তবে $(y-5)$ এবং $(y-9)$ উভয় উৎপাদক ঋণাত্মক, সুতরাং উহাদের গুণফল ধনাত্মক ; ফলে শর্ত (1) **এক্ষেত্রেও পূরণ হয়।**

(*iv*) কিন্তু যদি $5<y<9$ হয়, তবে উৎপাদক $(y-5)$ ধনাত্মক এবং উৎপাদক $(y-9)$ ঋণাত্মক, সুতরাং উহাদের গুণফল ঋণাত্মক, ফলে শর্ত (1) **পূরণ হয় না।**

সিদ্ধান্ত। x বাস্তব হইলে y দ্বারা নির্দেশিত প্রদত্ত মূলদ রাশির কোন মান 5 এবং 9 এর মধ্যে থাকিতে পারে না।

টীকা। এখানে y, 9 অপেক্ষা বৃহত্তর অথবা 5 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর যে কোন মান গ্রহণ করিতে পারে ; সুতরাং ইহার গরিষ্ঠ অথবা লঘিষ্ট মান নির্ণয় করা যাইবে না।

দ্বিঘাত রাশিমালার গরিষ্ঠ এবং লঘিষ্ঠ মান (Maximum and Minimum values of quadratic expressions)

উদা 6. যদি x বাস্তব হয় তবে দ্বিঘাত রাশিমালা $ax^2+2bx+c(a\neq 0)$ এর গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।

সমাধান। প্রদত্ত রাশিমালা $ax^2+2bx+c$

$$=a\left[x^2+\frac{2b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{a^2}\right]$$

$$=a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{ac-b^2}{a} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

ক্ষেত্র 1. যখন a ধনাত্মক :

x এর কোন বাস্তব মানের জন্য $\left(x+\frac{b}{a}\right)^2$ কখনও ঋণাত্মক হইতে পারে না (অর্থাৎ $\nless 0$) ; হয় ইহা ধনাত্মক অথবা শূন্য ($x=-b/a$ হইলে) হইবে।

ফলে $a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2$ কখনও ঋণাত্মক হইতে পারে না ($\because$ aও নিজেই ধনাত্মক)।

$\therefore$ **(1)** হইতে দেখা যায় যে $ax^2+2bx+c$ এর মান কখনও ধ্রুবক অংশ $(ac-b^2)/a$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না ; অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিমালার লঘিষ্ঠ মান হইল $(ac-b^2)/a$ এবং তখন $x=-b/a$.

ক্ষেত্র 2. যখন a ঋণাত্মক :

এই ক্ষেত্রে x এর কোন বাস্তব মানের জন্য $a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 \ngtr 0$ (অর্থাৎ $\leqslant 0$) ; কিন্তু ইহা শূন্য হইবে যখন $x=-b/a$.

$\therefore$ **(1)** হইতে দেখা যায় যে রাশিমালা $ax^2+2bx+c$ এর মান কখনও $(ac-b^2)/a$ অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না, অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিমালার গরিষ্ঠ মান হইল $(ac-b^2)/a$ এবং তখন $x=-b/a$.

টীকা। যদি a **ধনাত্মক হয়**, তবে রাশিমালাটির গরিষ্ঠ মান নির্ণয় করা যায় না।

যদি a **ঋণাত্মক হয়**, তবে রাশিমালাটির লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় করা যায় না।

প্রশ্নমালা V(E)

1. প্রমাণ কর যে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য দ্বিঘাত রাশিমালা $3x^2-4x+10$ ধনাত্মক। এই রাশিমালার লঘিষ্ঠ মান কত ? ইহার গরিষ্ঠ মান কি নির্ণয় করিতে পার ?

2. x বাস্তব হইলে নিম্নলিখিত রাশিমালার চরম মান নির্ণয় কর :

(i) $3-4x-x^2$; (ii) $(2x-5)(3-2x)$. প্রতি ক্ষেত্রে x এর অনুরূপ মান নির্ণয় কর।

3. প্রমাণ কর যে x বাস্তব হইলে রাশিমালা $4x^2+12x+9$ এর অবম মান বর্তমান ; এই অবম মান এবং x এর অনুরূপ মানটিও নির্ণয় কর।

4. (i) প্রমাণ কর যে $\frac{1}{2}$ এবং 1 এর মধ্যবর্তী মানগুলি ব্যতীত x এর আর সকল বাস্তব মানের ক্ষেত্রে $2x^2-3x+1$ ধনাত্মক।

(ii) x যদি সর্বদা বাস্তব হয়, তবে p এর মান কত হইলে রাশিমালা $x^2+2px+1$ ধনাত্মক হইবে ?

5. (i) x এর কি কি বাস্তব মানের জন্য রাশিমালা $3x^2-2x-5$ ঋণাত্মক হইবে ?

(ii) প্রমাণ কর যে 1 এবং 1·5 এর মধ্যবর্তী x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $2x^2-5x+3$ ঋণাত্মক।

6. যদি x বাস্তব হয়, তবে প্রমাণ কর যে

(i) $\dfrac{x}{x^2-5x+9}$ এর মান অবশ্যই $-\frac{1}{11}$ এবং 1 এর মধ্যে অবস্থিত।

(ii) $\dfrac{x^2+x+2}{x^2+2x+4}$ এর মান অবশ্যই $\frac{1}{2}$ এবং $\frac{7}{6}$ এর মধ্যে অবস্থিত।

(iii) $\dfrac{2x^2-2x+4}{x^2-4x+3}$ এর মান -7 এবং 1 এর মধ্যে থাকিতে পারে না।

(iv) $\dfrac{x^2+2x-11}{2(x-3)}$ এর মান 2 এবং 6 এর মধ্যে অবস্থিত হইতে পারে না।

7. দেখাও যে x এর বাস্তব মানের জন্য $\dfrac{6x^2-22x+21}{5x^2-18x+17}$ এর বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম মান দুইটি যথাক্রমে $\frac{5}{4}$ এবং 1 এবং x এর অনুরূপ মান দুইটি যথাক্রমে 1 এবং 2.

8. x যদি বাস্তব হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-3)}$ এর যে কোন বাস্তব মান সম্ভব।

9. x বাস্তব হইলে প্রমাণ কর যে মূলদ রাশি $\dfrac{(x-a)(x-c)}{(x-b)}$ সকল বাস্তব মান ধারণে সক্ষম, যদি a, b, c মানের হয় উর্ধ্বক্রমে অথবা নিম্নক্রমে থাকে।

[**ইঙ্গিত :** ধরা যাক, $y=$প্রদত্ত রাশি।

তাহা হইলে, $x^2-(a+c+y)x+ac+by=0$;

যেহেতু x বাস্তব, নিরূপক $\geqslant 0$; ইহা হইতে পাইবে যে y এর দ্বিঘাত রাশিমালা যথা :

$$y^2+2(a+c-2b)y+(a-c)^2\geqslant 0\,;$$

কিন্তু $y^2+2(a+c-2b)y+(a-c)^2=\{y+(a+c-2b)\}^2+(a-c)^2-(a+c-2b)^2$

$$=\{y+(a+c-2b)\}^2+4(a-b)(b-c)$$

এখন y এর সকল বাস্তব মানে ইহা ধনাত্মক হইবে যদি $(a-b)(b-c)>0$ হয় ; অর্থাৎ যদি a, b, c মানের হয় উর্ধ্বক্রমে অথবা নিম্নক্রমে থাকে। সুতরাং…]

10. প্রয়োজনীয় শর্ত নির্ণয় কর, যাহাতে x এবং y এর সাধারণ দ্বিঘাত রাশিমালা, যথা $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ কে দুইটি একঘাত উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়।

[**সমাধান :** $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ লিখিয়া ইহাকে x এর দ্বিঘাত সমীকরণ হিসাবে বিবেচনা কর। সুতরাং,

$$ax^2+2x(hy+g)+(by^2+2fy+c)=0.$$

$$\therefore\quad x=-\frac{2(hy+g)\pm\sqrt{4(hy+g)^2-4a(by^2+2fy+c)}}{2a}$$

বা, $ax+hy+g=\pm\sqrt{y^2(h^2-ab)+2y(gh-af)+g^2-ac}$

এখন প্রদত্ত রাশির যদি $px+qy+r$ এই আকারের দুইটি একঘাত উৎপাদক থাকে, তবে মূল চিহ্নাধীন রাশিটি অবশ্যই একটি পূর্ণবর্গ হইবে এবং তাহা সম্ভব যদি সমীকরণ

$y^2(h^2-ab)+2y(gh-af)+(g^2-ac)=0$ এর দুইটি সমান বীজ থাকে (অর্থাৎ, যদি ইহার নিরূপক শূন্য হয়)।

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত হইল

$$4(gh-af)^2-4(h^2-ab)(g^2-ac)=0,$$

বা, সরল করিয়া, $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0.$

টীকা। প্রমাণিত হইল যে প্রদত্ত রাশিমালাকে দুইটি একঘাত উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় ইহা ধরিয়া লইলে অপরিহার্য ফলস্বরূপ উপরের শর্তটি পাওয়া যায়। আবার এই শর্তটি যথেষ্টও বটে, অর্থাৎ শর্তটি ধরিয়া লইলে প্রদত্ত রাশিমালাকে দুইটি একঘাত উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যাইবে।

11. (*i*) দেখাও যে $x^2+2xy+y^2+3x+2y+2$ কে দুইটি একঘাত উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় এবং উৎপাদক দুইটি নির্ণয় কর।

(*ii*) p এর যে মানের জন্য $2x^2+3xy+y^2+7x+py+6$ কে দুইটি একঘাত উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় তাহা নির্ণয় কর।

12. যদি $ax^2+by^2+cz^2+2ayz+2bzx+2cxy$ কে দুইটি একঘাত উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়, তবে প্রমাণ কর যে হয় $a+b+c=0$ অথবা $a=b=c$.

6

বিন্যাস ও সমবায়
(PERMUTATIONS & COMBINATIONS)

6·1. সূচনা (Introduction)

কতিপয় বস্তুর সবগুলি বা উহাদের মধ্যে কয়েকটি লইয়া কোন নির্দিষ্ট ক্রমের একটি সজ্জাকে একটি **বিন্যাস** (Permutation) বলে।

উদা: (*i*) a, b, c এই তিনটি অক্ষরের সবগুলিকে একযোগে লইলে নিম্নের বিন্যাসগুলি হইবে—

$$\begin{array}{ccc} abc & bac & cab \\ acb & bca & cba \end{array}$$

(*ii*) a, b, c এই তিনটি অক্ষরের দুইটি করিয়া লইলে যে বিন্যাসগুলি হয় সেগুলি হইল—

$$\begin{array}{ccc} ab & ac & bc \\ ba & ca & cb \end{array}$$

(*iii*) a, b, c এই অক্ষর তিনটি হইতে মাত্র একটিকে লইয়া

$$a \qquad b \qquad c$$

এই বিন্যাসগুলি হইবে।

কতিপয় বস্তু হইতে একযোগে সবগুলি বা উহাদের মধ্যে কয়েকটিকে লইয়া সজ্জার বিচার না করিয়া যে বিভিন্ন **দল** বা **নির্বাচন** বা **মণ্ডলী** গঠন করা যায় তাহাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি **সমবায়** (Combination) বলে।

উদা: (*i*) একযোগে সবগুলিকে লইয়া a, b, c এই তিনটি অক্ষরের সমবায় হইল একটি মাত্র দল—

$$(abc)$$

(*ii*) একযোগে দুইটি লইয়া a, b, c এই তিনটি অক্ষরের সমবায়গুলি হইল—

$$(ab) \qquad (ac) \qquad (bc)$$

(*iii*) একযোগে মাত্র একটি লইয়া a, b, c এই অক্ষর তিনটির সমবায়গুলি হইবে—

$$(a) \qquad (b) \qquad (c)$$

টীকা। নির্বাচনে (বা দল গঠনে) অর্থাৎ সমবায়ে যে কয়টি বস্তু লইয়া প্রতি নির্বাচন গঠিত তাহার সংখ্যাই বিবেচ্য, তাহাদের ক্রম বিবেচ্য নহে।

বিন্যাসের ক্ষেত্রে একটি দলের বস্তুগুলির সংখ্যা এবং ক্রম উভয়ই বিবেচনা করিতে হয়।

সুতরাং একটি সমবায় হইতে একাধিক বিন্যাস পাওয়া যাইতে পারে। উদাহরণস্বরূপ লক্ষ্য কর যে (abc) এই একটি সমবায় হইতে $(abc$; acb ; bac ; bca ; cab ; $cba)$ এই ছয়টি বিন্যাস পাওয়া যায়।

প্রদত্ত কতিপয় বস্তু হইতে একযোগে সবগুলি বা কয়েকটি লইয়া বিভিন্ন **বিন্যাসের সংখ্যা** (number of permutations) বা **সমবায়ের সংখ্যা** (number of combinations) নির্ণয় করাই এই পরিচ্ছেদের লক্ষ্য।

প্রতীক (Notations) : n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর r সংখ্যক বস্তু একযোগে লইয়া $(r \leqslant n)$ যতগুলি বিন্যাস হয় **তাহাদের সংখ্যাকে** ^nP_r এই প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

n বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া $(r \leqslant n)$ যে সকল সমবায় হয় তাহাদের সংখ্যা ^nC_r এই প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

6·2. মূল নীতি (Fundamental Principle)

যদি কোন একটি প্রক্রিয়া m বিভিন্ন প্রকারে করা যায় এবং ঐরূপ যে কোন এক প্রকারে প্রক্রিয়াটি করিবার পর যদি অপর একটি প্রক্রিয়া n বিভিন্ন প্রকারে করা যায়, তবে ঐ দুই প্রক্রিয়া ক্রমান্বয়ে $m \times n$ বিভিন্ন প্রকারে করা যাইবে। লক্ষ্য রাখিতে হইবে যে প্রক্রিয়া দুইটি একই সঙ্গে সম্পন্ন না করিয়া একটির পর একটি করার কথা বলা হইয়াছে।

উদাহরণস্বরূপ, ধরা যাউক A এবং B এই দুই স্থানের মধ্যে 4টি বিভিন্ন ট্রেন চলাচল করে এবং B ও Cর মধ্যে 3টি ট্রেন চলাচল করে। তাহা হইলে A হইতে B হইয়া C পর্যন্ত একটি ভ্রমণ যত প্রকারে করা যায় তাহার সংখ্যা হইবে $4 \times 3 = 12$.

ব্যাখ্যা : A হইতে Bতে ভ্রমণের চারিটি উপায় বা প্রসার রহিয়াছে। এখন কোন ব্যক্তি A হইতে এই চারি উপায়ের কোন এক উপায়ে Bতে পৌছাইয়া দেখিবে B হইতে Cতে পৌছাইবার তিনটি উপায় তাহার সামনে আছে। সুতরাং B পৌছাইবার প্রতি উপায়ের জন্য Cতে পৌছাইবার 3টি উপায় আছে।
$\therefore$ Bতে পৌছাইবার 4টি উপায়ের জন্য Cতে পৌছাইবার 4×3 উপায় হইবে।

এই নীতি দুইএর অধিক প্রক্রিয়ার ক্ষেত্রে সহজেই প্রসারিত করা যায়।

যদি কোন প্রক্রিয়া m বিভিন্ন প্রকারে (উপায়ে) করা যায় এবং ঐ m প্রকারের কোন এক প্রকারে উহা করিবার পর যদি একটি দ্বিতীয় প্রক্রিয়া n বিভিন্ন প্রকারে করা যায়, তবে ঐ দুই প্রক্রিয়া একাদিক্রমে $m \times n$ প্রকারে করা যাইবে। এখন এই দুই প্রক্রিয়া $m \times n$ প্রকারের কোন এক প্রকারে করিলে তৃতীয় একটি প্রক্রিয়া যদি p প্রকারে করা

যায় তবে এই তিনটি প্রক্রিয়া ক্রমান্বয়ে (বা পর পর) $m \times n \times p \cdots$ ইত্যাদি প্রকারে করা যাইবে।

নিম্নের উদাহরণগুলির সমাধান সরাসরি মূল নীতি প্রয়োগ করিয়া করা যাইবে—

1. এক ব্যক্তির তিন জোড়া জুতা এবং দুই প্রস্ত পোশাক আছে। সে কত প্রকারে সাজপোশাক করিতে পারে? ইহার উপর চারটি গলাবন্ধ থাকিলে কয় প্রকারে সে সজ্জিত হইতে পারিবে? [উঃ $3 \times 2 = 6$; $3 \times 2 \times 4 = 24$]

2. দুইটি সহর X এবং Y এর মধ্যে 10টি বাস যাতায়াত করে। এক ব্যক্তি কত প্রকারে X হইতে Y এ গিয়া ভিন্ন বাসে ফিরিতে পারিবে? [উঃ 90]

3. মাত্র চারটি হোটেল আছে এমন একটি শহরে তিনজন টুরিষ্ট আসিল। তাহারা কয় প্রকারে প্রত্যেকে আলাদা আলাদা হোটেলে থাকিতে পারিবে? [উঃ 24]

6·3. বিন্যাস : ^nP_r নির্ণয়ের সূত্র

উপপাদ্য : n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর একযোগে r সংখ্যক করিয়া বস্তু লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয় বা ^nP_r নির্ণয়ের একটি সূত্রের প্রতিপাদন করিতে হইবে ($r \leqslant n$)।

^nP_r সংখ্যাটি অর্থাৎ প্রতি ক্ষেত্রে প্রতি বস্তুকে অনধিক একবার মাত্র ব্যবহার করিয়া n বিভিন্ন বস্তুর একযোগে r বস্তু লইয়া বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে।

এই উদ্দেশ্যে মনে করা যাক r শূন্য স্থানের একটি সারি এবং n বিভিন্ন বস্তু আছে। এই n বিভিন্ন বস্তু দ্বারা r শূন্যস্থানগুলিকে যত প্রকারে পূর্ণ করা যায় সেই সংখ্যাই হইতেছে নির্ণেয় সংখ্যা অর্থাৎ ^nP_r.

১ম	২য়	৩য়	......	r তম
n	$n-1$	$n-2$	......	$n-(r-1)$

ধাপ 1. প্রথম শূন্যস্থানটি n বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ করা যাইতে পারে ; কারণ n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর যে কোন একটি দিয়া ঐ স্থানটি পূর্ণ করা যায়। এই n প্রকারের যে-কোন এক প্রকারে প্রথম স্থানটি পূর্ণ হইলে দ্বিতীয় স্থানটি $(n-1)$ প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে, কারণ বাকী $(n-1)$ বিভিন্ন বস্তুর যে কোন একটি দিয়া দ্বিতীয় স্থানটি পূর্ণ করা যায়।

এখন প্রথম স্থানটি পূর্ণ হওয়ার প্রতি প্রকারের সহিত দ্বিতীয় স্থান পূরণের $(n-1)$ প্রকারের প্রত্যেকটিকে সংযুক্ত করা যাইতে পারে।

$\therefore$ প্রথম দুইটি স্থান পর পর $n(n-1)$ প্রকারে পূর্ণ হইতে পারে।

ধাপ 2. প্রথম দুইটি স্থান $n(n-1)$ প্রকারের যে কোন এক প্রকারে পূর্ণ হইলে বাকী থাকে $(n-2)$ বিভিন্ন বস্তু যাহাদের যে কোন একটিকে তৃতীয় স্থানে রাখা যাইতে পারে এবং সেই হেতু তৃতীয় স্থানটি $(n-2)$ প্রকারে পূর্ণ করা যায়। কিন্তু প্রথম দুইটি স্থান পূরণের প্রতিটি প্রকারকে তৃতীয় স্থান পূরণের $(n-1)$ প্রকারের প্রতিটির সহিত সংযুক্ত করা যাইতে পারে।

∴ প্রথম তিনটি স্থান একাদিক্রমে $n(n-1)(n-2)$ প্রকারে পূর্ণ করা যায়—এবং পরবর্তী ক্ষেত্রগুলিতেও এইরূপ হইবে।

ধাপ 3. যে কোন দশায় বা অবস্থায় লক্ষ্য করা যায় যে—

(*i*) একটি নির্দিষ্ট সংখ্যক শূন্যস্থান পূরণের প্রকার সংখ্যা একই সংখ্যক উৎপাদকের গুণফলের সমান এবং ঐ উৎপাদকগুলির প্রথমটি n ও পরবর্তী উৎপাদকগুলির প্রত্যেকটি উহার পূর্ববর্তী অপেক্ষা এক কম;

(*ii*) প্রতি ক্ষেত্রে শেষ উৎপাদক $= n -$ (যতগুলি স্থান পূর্ণ করিতে হইবে তাহা অপেক্ষা এক কম এমন একটি সংখ্যা);

(*iii*) মোট যতগুলি স্থান পূর্ণ করিতে হইবে তাহার সংখ্যা এবং মোট উৎপাদক সংখ্যা একই।

∴ r সংখ্যক স্থান পূরণ করিবার প্রকার সংখ্যা $= \underbrace{n(n-1)\cdots[n-(r-1)]}_{r \text{ সংখ্যক উৎপাদক}}$

পূর্বের আলোচনা অনুসারে ইহা হইতে নির্ণেয় সংখ্যা ${}^nP_r$ পাওয়া যায়

অর্থাৎ ${}^nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)\cdots\cdots$ (1)

Factorial প্রতীক

1 হইতে n পর্যন্ত এই n সংখ্যক অখণ্ড ধনসংখ্যার গুণফলকে $n!$ বা $\lfloor n$ এই প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং প্রতীকটিকে পড়া হয়—ফ্যাক্টোরিয়াল n (factorial n)।

অতএব $n!$ বা $\lfloor n = 1\times2\times3\times4\times\cdots\cdots\times n,$

বা, $= n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots\times4\times3\times2\times1,$

$4! = 1\times2\times3\times4,$ বা $= 4\times3\times2\times1.$

স্পষ্টত, $\lfloor 8 = 8\times7\times\lfloor 6$, $\lfloor n-r = (n-r)\lfloor n-r-1.$

$\lfloor 0$ এর সংজ্ঞা : $\lfloor 0 = 1.$

উদাহরণ : (i) $\frac{\lfloor 9}{\lfloor 3}=9.8.7.6.5.4.$ (ii) $26\times25\times24=\frac{\lfloor 26}{\lfloor 23}.$

(iii) $n(n+1)(n+2)\cdots(n+r)=\frac{\lfloor n+r}{\lfloor n-1}.$

(iv) $2n!=2^n\times n!\times\{1.3.5.7\cdots(2n-1)\}.$

Factorial প্রতীক অনুসারে ^nP_r এর মান

^nP_r এর সূত্রে লক্ষ্য করা হইয়াছে যে $r\leqslant n$,

ক্ষেত্র 1. $r=n$ হইলে সূত্রানুসারে পাওয়া যায়

$$^nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots n \text{ উৎপাদক পর্যন্ত}$$
$$=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-n+1)=n!$$

n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর নিজেদের মধ্যে অর্থাৎ একযোগে সবগুলি লইয়া বিন্যাস সংখ্যা $\lfloor n$ বলা হয়।

ক্ষেত্র 2. $r<n$ হইলে 6·3 অনুচ্ছেদের সূত্র (1)টি নিম্নরূপ হয়—

$$^nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\{(n-r)(n-r-1)\cdots3.2.1\}}{\{(n-r)(n-r-1)\cdots3.2.1\}}$$
$$=\frac{\lfloor n}{\lfloor n-r}.$$

উদাহরণ :

1. $^{10}P_3=\frac{\lfloor 10}{\lfloor 7}=10.9.8=720.$

2. $^{2n}P_n=\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n}=\frac{2^n\{1.3.5.7\cdots(2n-1)\}\lfloor n}{\lfloor n}.$

$$=2^n\{1.3.5.7\cdots(2n-1)\}.$$

3. $^nP_{13}:{}^{n+1}P_{12}=3:4$ হইলে n এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন $\frac{\lfloor n}{\lfloor n-13}:\frac{\lfloor n+1}{\lfloor n-11}=3:4$ বা, $\frac{\lfloor n}{\lfloor n-13}\times\frac{\lfloor n-11}{\lfloor n+1}=\frac{3}{4}$

বা, $\frac{\lfloor n(n-11)(n-12)\lfloor n-13}{\lfloor n-13\times(n+1)\lfloor n}=\frac{3}{4}$ বা, $\frac{(n-11)(n-12)}{n+1}=\frac{3}{4}$

বা, $4n^2-95n+525=0$ বা, $(n-15)(4n-35)=0$

$\therefore$ $n=15$ (n এর ভগ্নাংশ ঘটিত মান বাতিল করিয়া)।

প্রশ্নমালা VI(A)

1. নিম্নলিখিতগুলির মান নির্ণয় কর :

(i) $\frac{\underline{|9}}{\underline{|3}}$; (ii) $\frac{\underline{|7}}{\underline{|3}\,\underline{|4}}$; (iii) $\frac{\underline{|8}}{\underline{|2}\,\underline{|2}\,\underline{|4}}$; (iv) $\frac{\underline{|16}}{(\underline{|8})^3}$.

[উঃ (i) 60480; (ii) 35; (iii) 420: (iv) $\frac{143}{448}$.]

2. Factorial আকারে লিখ :

(i) $10\times11\times12\times13$. (ii) $n(n+1)(n+2)$.

(iii) $n(n+1)(n+2)\cdots(n+r)$.

3. প্রমাণ কর : $\underline{|2n}=2^n\{1.3.5.7\cdots(2n-1)\}\underline{|n}$.

4. মান নির্ণয় কর :

(i) ${}^{11}P_5$; (ii) ${}^{12}P_3\div{}^{10}P_4$; (iii) ${}^nP_2$; (iv) ${}^{2n}P_n$.

[উঃ (i) 55440; (ii) 11/42; (iii) $n(n-1)$; (iv) $2^n.\{1.3.5\cdots\cdots(2n-1)\}$.

5. (a) যদি ${}^nP_3=6.{}^nP_2$ হয় n এর মান নির্ণয় কর। [উঃ $n=8$]

(b) যদি ${}^{56}P_{r+6}/{}^{54}P_{r+3}=30800$ হয় r এর মান কত ? [উঃ $r=41$]

(c) ${}^{m+n}P_2=56$, ${}^{m-n}P_2=12$ হইলে m এবং n এর মান নির্ণয় কর। [উঃ $m=6$, $n=2$]

(d) ${}^{n-1}P_3:{}^{n+1}P_3=5:12$ হইলে n এর মান নির্ণয় কর। [উঃ $n=8$]

6'4. বিন্যাসের বিষয়সমূহ

বিন্যাসের প্রশ্নে উদ্ভূত কয়েকটি ক্ষেত্র :

(i) প্রদত্ত কয়েকটি অঙ্ক দ্বারা বিভিন্ন সংখ্যা গঠন ;

(ii) প্রদত্ত কয়েকটি অক্ষর দ্বারা বিভিন্ন শব্দ গঠন ;

(iii) একসারিবদ্ধ কতিপয় শূন্য চেয়ারে প্রদত্ত কতিপয় ব্যক্তিকে সাজান ;

(iv) প্রদত্ত কিছু সংখ্যক পত্র কিছু সংখ্যক খামের মধ্যে স্থাপন ;

(v) তাকে বই সাজান, ইত্যাদি।

উদা. 1. প্রত্যেক সংখ্যায় প্রত্যেক অঙ্ক একবার মাত্র ব্যবহার করিয়া 3, 4, 7, 8, 9 অঙ্কগুলির সাহায্যে চার অঙ্কের কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় ?

প্রশ্নটি, 5টি বস্তু (এক্ষেত্রে 5টি অঙ্ক, 3, 4, 7, 8, 9) দ্বারা 4টি স্থান (একক, দশক, শতক এবং সহস্রক) যত প্রকারে পূর্ণ করা যায় তাহা নির্ণয় করার অনুরূপ।

$\therefore$ গঠিত সংখ্যার নির্ণেয় সংখ্যা = 5 বস্তু হইতে একযোগে 4 বস্তু লইয়া বিন্যাস সংখ্যা

$$={}^5P_4=5\times4\times3\times2=120$$

উদা. 2. কোন শব্দে কোন অক্ষর একাধিকবার ব্যবহার না করিয়া $MONDAY$ শব্দটির অক্ষরগুলি দ্বারা কতগুলি বিভিন্ন শব্দ গঠন করা যায় ?

এখানে প্রকৃতপক্ষে 6টি বিভিন্ন বস্তু (M, O, N, D, A, Y) দ্বারা 6টি স্থান কত প্রকারে পূর্ণ করা যায়, তাহাই নির্ণয় করিতে হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= {}^6P_6 = \lfloor 6 = 720$ (শব্দ)।

উদা. 3. এক সারিতে 7টি শূন্য চেয়ারে কত প্রকারে 7 জন বসিতে পারে ?

স্পষ্টত নির্ণেয় প্রকার সংখ্যা $= {}^7P_7 = \lfloor 7 = 5040.$

উদা. 4. একটি তাকে মোট 6 খানি বই ধরে। 10 খানি বিভিন্ন বই কত প্রকারে ঐ তাকে রাখা যাইবে ?

এক্ষেত্রে 6টি স্থান 10টি বস্তু দ্বারা পূর্ণ করিতে হইবে ;

$\therefore$ নির্ণেয় প্রকার সংখ্যা $= {}^{10}P_6 = 10.9.8.7.6.5 = 151200.$

নিয়ন্ত্রিত বিন্যাস

ধরন (Type) I. কয়েকটি বিশেষ বস্তু কখনই থাকিবে না বা সর্বদাই থাকিবে :

নিম্নে সম্পর্কটি প্রমাণ করিতে হইবে—

$${}^nP_r = {}^{n-1}P_r + r.{}^{n-1}P_{r-1} \quad (r \le n).$$

প্রমাণ :

${}^nP_r = n$ বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া বিন্যাস সংখ্যা

$=$ (i) n বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু যাহাদের মধ্যে একটি বিশেষ বস্তু (ধরা যাউক উহা X) কখনই থাকিবে না তাহাদের লইয়া বিন্যাস সংখ্যা

$+$

(ii) n বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু যাহাদের মধ্যে ঐ বিশেষ বস্তু X সর্বদাই থাকিবে তাহাদের লইয়া বিন্যাস সংখ্যা।

(i) নির্ণয় করিতে হইলে ঐ বিশেষ বস্তু Xটি রাখিয়া বাকী **($n-1$)** বস্তুর একযোগে r বস্তু লইয়া বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে এবং স্পষ্টত ঐ সংখ্যাটি ${}^{n-1}P_r$.

(ii) নির্ণয় করিতে হইলে এক্ষেত্রে ঐ বিশেষ বস্তু X কে রাখিয়া বাকী $(n-1)$ বস্তু হইতে কেবল $(r-1)$ বস্তু লওয়া হয়। এরূপ বিন্যাসের সংখ্যা ${}^{n-1}P_{r-1}$.

এখন এই বিন্যাসগুলির প্রত্যেকটিতে X অন্তর্ভুক্ত করিতে হইবে যাহাতে প্রত্যেক বিন্যাসে r সংখ্যক বস্তু থাকে। কিন্তু, যেক্ষেত্রে X ঐ বিন্যাসগুলির প্রত্যেকটির প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়,…rতম স্থানে থাকিতে পারে। X প্রথম স্থানে থাকিলে ${}^{n-1}P_{r-1}$টি বিন্যাস হইবে, X দ্বিতীয় স্থানে থাকিলে ${}^{n-1}P_{r-1}$টি বিন্যাস এবং এইরূপ r সংখ্যক স্থানের প্রত্যেকটির জন্য।

$\therefore$ n সংখ্যক বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু (r সংখ্যক স্থানের যে কোন একটিতে X রাখিয়া) লইয়া বিন্যাস সংখ্যা হইতেছে $r.\,{}^{n-1}P_{r-1}$. সুতরাং বলা যায় যে

$$ {}^{n}P_{r}=\underbrace{{}^{n-1}P_{r}}_{(i)}+\underbrace{r.\,{}^{n-1}P_{r-1}}_{(ii)} $$

অন্যভাবে ${}^{n}P_{r}$ এর সূত্রটি ব্যবহার করিয়া

$$ \text{ডানপক্ষ}={}^{n-1}P_{r}+r.\,{}^{n-1}P_{r-1} $$

$$ =\frac{\underline{|n-1}}{\underline{|n-1-r}}+r.\frac{\underline{|n-1}}{\underline{|(n-1)-(r-1)}} $$

$$ =\frac{\underline{|n-1}}{\underline{|n-r-1}}+r.\frac{\underline{|n-1}}{(n-r)\,\underline{|n-r-1}} $$

$$ =\frac{\underline{|n-1}}{\underline{|n-r-1}}\left(1+\frac{r}{n-r}\right) $$

$$ =\frac{\underline{|n-1}}{\underline{|n-r-1}}\times\frac{n-r+r}{n-r} $$

$$ =\frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}={}^{n}P_{r}=\text{বামপক্ষ (প্রমাণিত)।} $$

উদা. 1. 10টি বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে 4টি করিয়া বস্তু লইয়া বিন্যাস করিলে উহাদের কতগুলিতে একটি নির্দিষ্ট বস্তু (i) কখনই থাকবে না, (ii) সর্বদাই থাকিবে ?

(i) যে নির্দিষ্ট বস্তুটি কখনই থাকিবে না তাহা আলাদা রাখিয়া দিলে বাকী থাকে 9টি বস্তু ; সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা 9টি বস্তু হইতে একযোগে 4টি বস্তু লইয়া বিন্যাসের সংখ্যার সমান $={}^{9}P_{4}=9\times8\times7\times6=3024$.

(ii) যে নির্দিষ্ট বস্তুটি সর্বদাই থাকিবে তাহা পৃথক রাখিয়া বাকী 9টি বস্তু হইতে একযোগে 3টি লইয়া **(4টি নহে)** বিন্যাস সংখ্যা $={}^{9}P_{3}$.

এই বিন্যাসগুলির প্রত্যেকটিতে 4টি স্থান আছে (মাঝে এবং প্রান্তে) যেখানে ঐ বিশেষ বস্তুটি রাখা যায় যাহাতে ${}^{9}P_{3}$ বিন্যাসের প্রত্যেকটি হইতে 4টি বিন্যাস হইতে পারে। সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $=4\times{}^{9}P_{3}=2016$.

অন্যভাবে, 10টি বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে 4টি বস্তু লইয়া বিন্যাস করিলে যতগুলি বিন্যাসে একটি বিশেষ বস্তু সর্বদাই থাকিবে $=$ 10টি বিভিন্ন বস্তু হইতে 4টি বস্তু একযোগে লইয়া মোট বিন্যাস সংখ্যা—যে বিন্যাসগুলিতে ঐ বিশেষ বস্তুটি কখনই থাকিবে না তাহার সংখ্যা $={}^{10}P_4-{}^{9}P_4=5040-3024=2016$.

উদা. 2. n বিভিন্ন বস্তুর r বস্তু করিয়া একযোগে লইয়া বিন্যাস করিলে কতগুলি বিন্যাসে 5টি বিশেষ বস্তু (i) সর্বদাই থাকিবে, (ii) কখনই থাকিবে না ?

(i) একযোগে r বস্তু করিয়া লইয়া n বিভিন্ন বস্তুর বিন্যাস সংখ্যা, n বস্তু দ্বারা r স্থানগুলি পূরণের প্রকার সংখ্যার সমান। এখন ঐ 5টি বিশেষ বস্তু r সংখ্যক স্থানে ${}^{r}P_5$ প্রকারে সজ্জিত হইতে পারে। এই সজ্জার প্রত্যেকটিতে বাকী $(r-5)$ স্থানগুলি বাকী $(n-5)$ বস্তু দ্বারা ${}^{n-5}P_{r-5}$ প্রকারে পূর্ণ হইতে পারে ; ∴ মোট বিন্যাস সংখ্যা

$$={}^{r}P_5\times{}^{n-5}P_{r-5}=\frac{\lfloor r}{\lfloor r-5}\times\frac{\lfloor n-5}{\lfloor n-r}.$$

(ii) যে পাঁচটি বিশেষ বস্তু কখনই থাকিবে না সেগুলিকে ছাড়িয়া দিয়া, নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $={}^{n-5}P_r=\dfrac{\lfloor n-5}{\lfloor n-r-5}$.

ধরন (Type) II. যখন বিশেষ কয়েক বস্তু একত্র থাকিবে না :

ক্ষেত্র 1. ধরা যাউক দুইটি মাত্র বস্তু আছে যাহারা একত্র থাকিবে না :

নিয়মাবলী : (1) কোনরূপ নিয়ন্ত্রণ আরোপ না করিয়া মোট বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করিতে হবে। (2) ইহার পর ঐ দুইটি বস্তু একত্র রাখিয়া বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে। (3) এই দুই ফলের বিয়োগ ফল হইতেই নির্ণেয় সংখ্যা পাওয়া যাইবে।

উদা. 3. কতগুলি বিভিন্ন ক্রমে 10 খানি পরীক্ষাপত্র সাজান যাইতে পারে যাহাতে সর্বোৎকৃষ্ট ও সর্বনিকৃষ্ট পত্রদুখানি কখনও একত্র না থাকে ?

কোনরূপ নিয়ন্ত্রণ না থাকিলে পরীক্ষাপত্র 10 খানি উহাদেরই মধ্যে $\lfloor 10$ প্রকারে সজ্জিত করা যাইতে পারে। এখন সর্বোৎকৃষ্ট ও সর্বনিকৃষ্ট পত্র—B এবং W কে একখানি একক পত্র X রূপে বিবেচনা করা হউক। তাহা হইলে পাওয়া যাইবে 9 খানি পত্র যাহাদের $\lfloor 9$ প্রকারে উহাদের মধ্যে সজ্জিত করা যাইবে। এইরূপ

সজ্জাগুলির প্রত্যেকটিতে BW এই ক্রমে B এবং W পত্র দুইটির স্থলে X থাকিবে ; কিন্তু B এবং W কে উহাদের মধ্যে $\lfloor 2$ প্রকারে সাজান যাইতে পারে।

$\therefore$ যে সজ্জাগুলি B এবং W সর্বদাই একত্রে থাকিবে তাহার সংখ্যা $=\lfloor 9\times\lfloor 2.$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা যেগুলিতে B এবং W কখনও একত্র থাকিবে না $=\lfloor 10-\lfloor 9\times\lfloor 2=10\times\lfloor 9-\lfloor 9\times 2=8\times\lfloor 9=2903040.$

উদা. 4. প্রমাণ কর যে দুইটি বিশেষ বই কখনও একত্রে থাকিবে না এইভাবে n সংখ্যক বিভিন্ন বই একটি তাকে $(n-2)\times\lfloor n-1$ প্রকারে সাজান যায়। হুবহু উদা. 3 এর ন্যায়।

ক্ষেত্র 2. একত্র থাকিবে না এরূপ বস্তুর সংখ্যা যখন দুই এর অধিক :

উদা. 5. 6টি বালক ও 4টি বালিকাকে কত প্রকারে একটি সারিতে সাজান যায় যাহাতে কখনই দুইটি বালিকা একত্র থাকিবে না ?

ঈপ্সিত বসিবার ব্যবস্থা দুইটি প্রক্রিয়ায় করা যায়—

(*i*) প্রথমে বালক 6টির অবস্থান নিরূপিত করিয়া অবস্থানগুলিকে B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 দ্বারা সূচিত করা হইল।

ইহা করা যাইতে পারে ${}^6P_6=\lfloor 6=720$ প্রকারে।

এইরূপ একটি বিন্যাস নিম্নরূপ :

$$\times B_1\times B_2\times B_3\times B_4\times B_5\times B_6\times$$

(*ii*) এখন বালিকাগুলির অবস্থান যদি ক্রশ চিহ্নিত স্থানগুলিতে নির্দেশিত হয় তবে কখনই উহাদের দুইটি একত্রে থাকিবে না। এরূপ 7টি স্থান আছে যেখানে 4টি বালিকাকে স্থাপন করা যায়। ইহা ${}^7P_4=7.6.5.4=840$ প্রকারে করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় প্রকার সংখ্যা $={}^7P_4\times\lfloor 6=840\times 720=604800.$

কিন্তু নিম্নের প্রশ্নটি ছাত্রছাত্রীদের আরও সতর্কভাবে অনুধাবন করিতে হইবে—

উদা. 6. n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর একযোগে r সংখ্যক করিয়া বস্তু লইয়া বিন্যাস-সমূহের কতগুলিতে 2টি বিশেষ বস্তু একত্র থাকিবে ?

ঐ দুইটি বিশেষ বস্তু ছাড়িয়া দিয়া বাকী $(n-2)$ বস্তুর একযোগে $(r-2)$ করিয়া বস্তু লইয়া বিন্যাসগুলি বিবেচনা করা যাউক ; এই বিন্যাসগুলির সংখ্যা $={}^{n-2}P_{r-2}.$

এই বিন্যাসগুলির প্রত্যেকটির সহিত ঐ দুই বিশেষ বস্তুকে একটি একক বস্তুরূপে যুক্ত করিয়া দেওয়া হইল। প্রকৃতপক্ষে আছে $(r-1)$ সংখ্যক স্থান ($r-2$ স্থানের মাঝে এবং দুই প্রান্তে) যেখানে ঐ একক বস্তুটি স্থাপন করা যায় এবং প্রতি ক্ষেত্রে

ঐ দুইটি বস্তু যাহারা একক বস্তুটি গঠন করিয়াছে তাহাদের নিজেদের মধ্যে $\lfloor 2$ প্রকারে সাজান যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{n-2}P_{r-2} \times (r-1) \times 2$

$$= 2(r-1)(n-2)(n-3) \cdots\cdots (n-r+1).$$

ধরন III. প্রদত্ত অঙ্কসমূহ দ্বারা সংখ্যা গঠন (একই বস্তু একাধিক বার না লইয়া) :

উদা. **7.** 1, 2, 3, 4, 5, 6 এই ছয়টি অঙ্ক দেওয়া আছে। নিম্নে বর্ণিত শর্ত-সাপেক্ষে এই অঙ্কগুলি দ্বারা যে সকল সংখ্যা গঠিত হইতে পারে তাহাদের সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে।

(i) **কোন নিয়ন্ত্রণ ব্যতিরেকে।**

প্রদত্ত ছয়টি অঙ্ককে উহাদের নিজেদের মধ্যে যত প্রকারে বিন্যস্ত করা যায়, ছয় অঙ্কের সংখ্যার সংখ্যাও তত $= {}^6P_6 = \lfloor 6 = 720$.

(ii) **একটি বিশেষ অঙ্ক যে সকল সংখ্যায় একটি বিশেষ স্থানে থাকিবে।**

উদাহরণস্বরূপ ধরা যাউক ছয় অঙ্কের সেই সকল সংখ্যার সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে যাহাদের দশক স্থানে 2 অঙ্কটি সর্বদাই থাকে। সুতরাং, এই ক্ষেত্রে বাকী পাঁচটি স্থান বাকী পাচটি অঙ্ক দ্বারা পূর্ণ করা যাইতে পারে $5! = 120$ প্রকারে।

$\therefore$ যে সকল সংখ্যার দশক স্থানে 2 সর্বদাই থাকে তাহাদের সংখ্যা $= 120$.

(iii) **যে সকল সংখ্যা একটি বিশেষ সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য।**

ধরা যাউক কেবলমাত্র যুগ্ম অর্থাৎ 2 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যাগুলি গঠন করিতে হইবে। এই সংখ্যাগুলির একক-স্থানে 2, 4, 6 থাকিবে।

একক স্থানে 2 এরূপ 120টি সংখ্যা হইবে। অনুরূপে একক স্থানে 4 বা 6 থাকিলে প্রতি ক্ষেত্রে 120টি করিয়া সংখ্যা হইবে।

$\therefore$ যুগ্ম সংখ্যার মোট সংখ্যা $= 3 \times 120 = 360$.

(iv) **যে সকল সংখ্যার প্রথমে ও শেষে বিশেষ বিশেষ অঙ্ক থাকিবে।**

ধরা যাউক 1 দিয়া আরম্ভ এবং 5 দিয়া শেষ যে সংখ্যাগুলি তাহাদের গঠন করিতে হইবে। 1 অঙ্কটি প্রথমে এবং 5 অঙ্কটি শেষ স্থানে রাখিয়া বাকী চারটি স্থান $\lfloor 4 = 24$ প্রকারে বাকী চারিটি অঙ্ক দ্বারা পূর্ণ করা যায়।

$\therefore$ 1 দিয়া আরম্ভ এবং 5 দিয়া শেষ এরূপ সংখ্যার সংখ্যা $= 24$.

দ্রষ্টব্য। যদি সংখ্যাগুলির প্রথমে বা শেষে 1 বা 5 থাকিত তবে ঐ সংখ্যা হইত $\lfloor 2 \lfloor 4 = 48$, কারণ 1 এবং 5 তাহাদের মধ্যে $\lfloor 2$ প্রকারে স্থান পরিবর্তন করিতে পারে।

(v) একটি বিশেষ সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বা বৃহত্তর এমন সংখ্যাসমূহ।

ধরা যাউক প্রদত্ত অঙ্কগুলি দ্বারা 300000 অপেক্ষা বৃহত্তর সংখ্যাগুলি গঠন করিতে হইবে। সুতরাং সংখ্যাগুলি গোড়ায় 3 বা 4 বা 5 বা 6 থাকিবে।

প্রতি ক্ষেত্রে বাকা 5টি স্থান $\lfloor 5 = 120$ প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে।

$\therefore$ মোট সংখ্যার সংখ্যা $= 4 \times 120 = 480$.

উদা. 8. কোন অঙ্ক একাধিকবার না লইয়া 3, 5, 7, 8, 9 অঙ্কগুলি দ্বারা 7000 অপেক্ষা বৃহত্তর কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়?

উদ্দিষ্ট সংখ্যাগুলি নিশ্চয়ই

(i) 5 অঙ্কের বা, (ii) 7, 8 বা 9 দিয়া শুরু 4 অঙ্কের হইবে।

(i) 5 অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার সংখ্যা $= {}^5P_5 = \lfloor 5 = 120$.

(ii) 7 দিয়া শুরু 4 অঙ্কের সংখ্যার সংখ্যা যত, 3, 5, 8, 9 দ্বারা অপর তিনটি স্থান পূর্ণ করিবার প্রকার সংখ্যাও তত; ইহা ${}^4P_3 = 24$ প্রকারে করা যায়। অনুরূপভাবে 8 এবং 9 দিয়া শুরু হইলে প্রতি ক্ষেত্রে 24টি করিয়া সংখ্যা হইবে;

$\therefore$ 7000 অপেক্ষা বৃহত্তর সকল সংখ্যাগুলির সংখ্যা $= 120 + 3 \times 24 = \mathbf{192}$.

উদা. 9. কোন সংখ্যার কোন অঙ্ক পুনঃ পুনঃ ব্যবহার না করিয়া 3, 1, 0, 5, 7, 2, 9 হইতে যে-কোন সংখ্যক অঙ্ক লইয়া কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়?

এক অঙ্কের সংখ্যার সংখ্যা $= 6$ (0 বাদ দিয়া)

দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার সংখ্যা নির্ণয়—

7টি অঙ্কের একযোগে 2টি করিয়া লইয়া বিন্যাস সংখ্যা $= {}^7P_2$ কিন্তু ইহাদের মধ্যে ${}^6P_1$ সংখ্যকের দশক স্থানে শূন্য থাকে এবং সেই কারণে সেগুলি দুই অঙ্কের সংখ্যা নহে; $\therefore$ দুই অঙ্কের সংখ্যার সংখ্যা $= {}^7P_2 - {}^6P_1$.

অনুরূপভাবে তিন অঙ্কের সংখ্যার সংখ্যা $= {}^7P_3 - {}^6P_2$ এবং এইরূপ পর পর।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যার সংখ্যা

$$= {}^6P_1 + ({}^7P_2 - {}^6P_1) + ({}^7P_3 - {}^6P_2) + ({}^7P_4 - {}^6P_3) + ({}^7P_5 - {}^6P_4) + ({}^7P_6 - {}^6P_5) + ({}^7P_7 - {}^6P_6) = \mathbf{11742}.$$

উদা. 10. প্রতি সংখ্যার প্রতি অঙ্ক মাত্র একবার লইয়া 3, 4, 5, 6, 7 এবং 8 এইগুলির সবকয়টিকে একযোগে লইয়া কয়টি সংখ্যা গঠন করা যায়? উহাদের সমষ্টি কত?

উদ্দিষ্ট সংখ্যাগুলির মোট সংখ্যা $=\underline{|6}=720$.

একক স্থানে 8 থাকিলে ঐরূপ সংখ্যার সংখ্যা $=\underline{|5}=120$ হইবে কারণ, এক্ষেত্রে বাকী 5টি স্থান 3, 4, 5. 6 এবং 7 দ্বারা পূর্ণ করিতে হইবে।

যে সকল সংখ্যার একক স্থানে 3, 4, 5, 6 বা 7 থাকিবে তাহাদের সংখ্যা প্রত্যেক ক্ষেত্রেই $\underline{|5}=120$ হইবে।

$\therefore$ এই 720টি সংখ্যার সবকয়টির একক স্থানের অঙ্কগুলির সমষ্টি $=120\ (3+4+5+6+7+8)=120\times 33=3960$.

আবার যে সকল সংখ্যার দশক স্থানে প্রদত্ত অঙ্কগুলির যে কোন একটি থাকিবে তাহাদেরও প্রত্যেক ক্ষেত্রে সমষ্টি $\underline{|5}$.

$\therefore$ দশক স্থানের অঙ্কগুলির সমষ্টিও একই অর্থাৎ, 3960. এইরূপ অগ্রসর হইয়া, নির্ণেয় সমষ্টি

$=3960$ একক $+3690$ দশ $+3960$ শত $+3960$ সহস্র $+3960$ দশ সহস্র $+3690$ শত সহস্র

$=3960(1+10+100+1000+10000+100000)$

$=3960\times 1,11,111=$ **43,99,99,560.**

ধরন IV. প্রদত্ত অক্ষর দ্বারা শব্দ গঠন :

নিম্নের ক্ষেত্রগুলির উদ্ভব হইতে পারে :

(*i*) কোন অক্ষরই একাধিকবার লওয়া হইবে না ;

(*ii*) কোন কোন অক্ষর একাধিকবার লওয়া হইবে ;

(*iii*) একটি বিশেষ অক্ষর গোড়ায় বা শেষে থাকিবে ;

(*iv*) কতকগুলি অক্ষর একত্র থাকিতে পারে—যেমন, স্বরবর্ণগুলি একত্র থাকিতে পারে বা ব্যঞ্জনবর্ণগুলি একত্র থাকিতে পারে।

দ্রষ্টব্য : ক্ষেত্র (*ii*) [যেখানে কোন কোন অক্ষর বার বার লওয়া হয়] এর আলোচনা অনুচ্ছেদ 6·6 এ করা হইয়াছে।

উদা. 11. *MONDAY* শব্দটির অক্ষরগুলি লইয়া নিম্নের শর্তসাপেক্ষে গঠিত শব্দগুলির সংখ্যা নির্ণয় কর :

(*i*) **কোন বাধানিষেধ না থাকিলে** (কিন্তু কোন অক্ষর একাধিকবার লওয়া হইবে না)

অক্ষর ছয়টিকে নিজেদের মধ্যে $\underline{|6}=720$ প্রকারে সাজান যায়।

$\therefore$ গঠিত শব্দের মোট সংখ্যা $=720$.

(*ii*) ***M* দিয়া শুরু শব্দগুলির সংখ্যা**

M কে স্থির রাখিয়া বাকী অক্ষর 5টি কে নিজেদের মধ্যে $\underline{|5}=120$ প্রকারে সাজান যায়।

$\therefore$ M দিয়া শুরু শব্দগুলির মোট সংখ্যা $=120$.

(*iii*) ***Y* দিয়া শেষ শব্দগুলির সংখ্যা**

উপরের ন্যায় ঠিক একই যুক্তিতে Y দিয়া শেষ শব্দগুলির সংখ্যা পাওয়া যাইবে $=120$.

(*iv*) ***M* দিয়া শুরু এবং *Y* দিয়া শেষ এমন শব্দগুলির সংখ্যা**

M কে গোড়ায় এবং Y কে শেষে রাখিলে আর কেবল 4টি অক্ষর থাকে যাহাদের নিজেদের মধ্যে $\underline{|4}=24$ প্রকারে সাজান যায়। $\therefore$ M দিয়া শুরু এবং Y দিয়া শেষ এমন শব্দসমূহের সংখ্যা $=24$.

(*v*) ***M* দিয়া শুরু কিন্তু *Y* দিয়া শেষ নহে এমন শব্দের সংখ্যা।**

M দিয়া শুরু এমন শব্দগুলির সংখ্যা $=120$. [উপরের (*ii*) দ্রষ্টব্য]

M দিয়া শুরু এবং Y দিয়া শেষ এমন শব্দের সংখ্যা $=24$ [(*iv*) দ্রষ্টব্য]

$\therefore$ M দিয়া শুরু কিন্তু Y দিয়া শেষ নহে এমন শব্দের সংখ্যা $=120-24=96$.

(*vi*) **স্বরবর্ণসমূহের একত্র অবস্থানে**

এখানে স্বরবর্ণগুলি হইল O এবং A. ইহাদের একটি অক্ষররূপে বিবেচনা করিলে পাওয়া যায় মোট 5টি অক্ষর যথা M, N, D, Y এবং (OA) ; ইহাদের নিজেদের মধ্যে $\underline{|5}=120$ প্রকারে সাজান যায়। কিন্তু এরূপ প্রতিটি সজ্জাতে O, A স্বরবর্ণ দুইটিকে নিজেদের মধ্যে $\underline{|2}$ প্রকারে সাজান যায়।

$\therefore$ যে সকল শব্দে স্বরবর্ণ দুইটি সর্বদা একত্র থাকিবে তাহাদের সংখ্যা $=120\times 2=240$.

(*vii*) **ব্যঞ্জনবর্ণগুলি একত্র থাকিলে**

M, N, D, Y এই ব্যঞ্জনবর্ণগুলিকে একটি অক্ষর ধরিয়া $O, A, (MNDY)$ এই তিনটি অক্ষরকে নিজেদের মধ্যে $\underline{|3}=6$ প্রকারে সাজান যায়। এখন ব্যঞ্জনবর্ণ চারিটিকে নিজেদের মধ্যে $\underline{|4}=24$ প্রকারে সাজান যায়।

∴ যে শব্দগুলিতে ব্যঞ্জনবর্ণগুলি একত্র থাকিবে তাহাদের সংখ্যা $=6\times24=144$.

(*viii*) **স্বরবর্ণগুলি কেবল যুগ্মস্থানে থাকিলে**

$$\begin{matrix}\times & \times & \times & \times & \times & \times\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{matrix}$$

2টি স্বরবর্ণ আছে এবং 3টি যুগ্ম স্থান আছে।

∴ স্বরবর্ণগুলি $^3P_2=3\times2=6$ প্রকারে যুগ্ম স্থানগুলি দখল করিতে পারে। এখন স্বরবর্ণ দুইটি যত প্রকারে 2টি যুগ্ম স্থান দখল করে তাহার প্রতিটির জন্য বাকী 4টি অক্ষরের বাকী 4টি স্থান গ্রহণের $^4P_4=\lfloor 4=24$টি প্রকার হইবে ; ∴ মোট শব্দসংখ্যা $=6\times24=144$.

প্রশ্নমালা VI(B)

1. নিম্নের শব্দগুলির অক্ষরসমূহ দিয়া কতগুলি বিভিন্ন শব্দ গঠন করা যায় (কোন অক্ষর একাধিকবার না লইয়া) : (*i*) *SUNDAY* ;

(*ii*) *ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ* ?

[উঃ (*i*) 720 ; (*ii*) $\lfloor 26$]

2. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 অঙ্কগুলি দ্বারা 3 বিভিন্ন অঙ্কের কয়টি সংখ্যা গঠন করা যায় ? [উঃ 210]

3. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 এই অঙ্কগুলির সাহায্যে গঠিত 4 অঙ্কের এরূপ বিভিন্ন সংখ্যার সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের সব অঙ্কগুলি বিভিন্ন এবং একক স্থানের অঙ্কটি 7. [উঃ 120]

4. চারি হস্তে পৃথক পৃথক ভাবে ধৃত শঙ্খ, চক্র, গদা, পদ্ম পরস্পর বিনিময় করিয়া ভগবান বিষ্ণু মূর্তির কত রকমের পরিবর্তন করা যায় ? [উঃ 24]

5. পাঁচখানি পত্র লেখা হইয়াছে এবং পাঁচটি ডাকবাক্স আছে। কত প্রকারে ঐ পত্রগুলি এক একটি ডাকবাক্সে এক একটি করিয়া ফেলা যাইবে ? [উঃ 120]

6. সাতখানি বিভিন্ন বইএর একটি সেট (set) একটি তাকে কত প্রকারে সাজান যায় ? [উঃ 5040]

7. কতগুলি ক্রমানুসারে *SUNDAY* শব্দটির অক্ষরগুলিকে সাজান যায় ? এই বিন্যাসের কতগুলি *S* দিয়া শুরু নহে ? কতগুলিই বা *S* দিয়া শুরু কিন্তু কোন স্বরবর্ণ দিয়া শেষ নহে ? [উঃ 720 ; 600 ; 72]

8. ইষ্টার্ন রেলওয়ের 25টি ষ্টেশনযুক্ত কোন একটি শাখার জন্য যে কোন শ্রেণীর কত প্রকারের টিকিট ছাপিতে হইবে ? [উঃ 600]

9. কোন অঙ্ক একাধিকবার না লইয়া 4, 5, 6, 7 অঙ্কগুলির সাহায্যে 500 অপেক্ষা বৃহত্তর কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়? এই অঙ্কগুলির সবকয়টিকে একযোগে লইয়া এবং প্রতি সংখ্যার প্রতি অঙ্ক একবার মাত্র লইয়া গঠিত সংখ্যাগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর। [উঃ 42 ; 146652]

10. কত প্রকারে 4 জন XI শ্রেণীর এবং 3 জন XII শ্রেণীর ছাত্রকে একটি সারিতে সাজান যাইবে যাহাতে XI শ্রেণী ও XII শ্রেণীর ছেলেরা পাশাপাশি থাকে? [উঃ 144]

11. *ARTICLE* শব্দটির অক্ষরগুলি দিয়া কতগুলি শব্দ গঠন করা যাইবে যাহাতে স্বরবর্ণগুলি কেবলমাত্র যুগ্ম স্থানে থাকে? [উঃ 144]

12. স্বরবর্ণগুলি কখনই বিচ্ছিন্ন থাকিবে না এইভাবে *DAUGHTER* শব্দটির অক্ষরগুলি দিয়া কতগুলি শব্দ গঠন করা যাইবে? [উঃ 4320]

13. সর্বোৎকৃষ্ট ও সর্বনিকৃষ্ট পত্র দুখানি কখনই একত্র থাকিবে না এইভাবে কত প্রকারে 6 খানি পরীক্ষাপত্র সাজান যায়? [উঃ 480]

14. *DIRECT* শব্দটির অক্ষরগুলিকে একযোগে 4টি করিয়া লইয়া কতগুলি প্রকারে সাজান যায় যাহাতে D অক্ষরটি সর্বদাই অন্তর্ভুক্ত থাকে? [উঃ 240]

15. কত প্রকারে 15 জন H.S. এবং 12 জন B.Sc. পরীক্ষার্থীকে এক সারিতে সাজান যাইবে যাহাতে কোন দুইজন B.Sc. পরীক্ষার্থী পাশাপাশি বসিতে না পারে? [উঃ $\lfloor 15 \times {}^{16}P_{12}$]

16. সাতটি বর্ণের (বেগুনী, নীল, আসমানী, সবুজ, হলুদ, কমলা এবং লাল) কত প্রকার বিন্যাস করা যায় যাহাতে বেগুনী এবং লাল বর্ণ কখনই পাশাপাশি না থাকে? [উঃ 3600]

17. 8টি বিভিন্ন আয়তনের (sizes) মিষ্টান্ন 8 জন বিভিন্ন বয়সের বালকের মধ্যে কত প্রকারে বন্টন করা যাইতে পারে যাহাতে সর্বকনিষ্ঠ বালকটি সর্বদাই বৃহত্তম মিষ্টান্নটি পায়? [উঃ 5040]

[ইঙ্গিত: যেহেতু সর্বকনিষ্ঠ বালকটি সর্বদাই বৃহত্তমটি পাইবে অতএব বাকী 7 জন বালকের মধ্যে বাকী 7টি মিষ্টান্ন বন্টনের প্রশ্নটি থাকে; ইহা ${}^{7}P_{7} = \lfloor 7$ প্রকারে করা যায়।]

18. 8টি বিভিন্ন বস্তুর একযোগে 5টি করিয়া লইয়া বিন্যাসের কতগুলিতে 2টি বিশেষ বস্তু সর্বদাই থাকিবে? [উঃ 6000]

19. 10টি বিভিন্ন বস্তুর একযোগে সবগুলি লইয়া বিন্যাসগুলির যেগুলিতে দুইটি বিশেষ বস্তু কখনই একত্রে থাকিবে না তাহাদের সংখ্যা নির্ণয় কর। [উঃ 2903040]

20. n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর একযোগে 4টি করিয়া লইয়া যে সকল বিন্যাসে একটি বিশেষ বস্তু থাকে না তাহাদের সংখ্যা, যে সকল বিন্যাসে ঐ বিশেষ বস্তুটি থাকে তাহাদের সংখ্যার সমান হইলে n এর মান নির্ণয় কর। [উঃ $n=8$]

21. n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর একযোগে r সংখ্যক করিয়া লইয়া যে সকল বিন্যাসে 2টি বিশেষ বস্তু (*i*) কখনই থাকিবে না ; (*ii*) সর্বদাই থাকিবে তাহাদের সংখ্যা নির্ণয় কর। [উঃ (i) ${}^{n-2}P_r$; (ii) ${}^{r}P_2 \times {}^{n-2}P_{r-2}$]

22. n সংখ্যক বস্তুর একযোগে সব কয়টি লইয়া যে সকল বিন্যাসে 2টি বিশেষ বস্তু কখনই একত্রে থাকিবে না তাহাদের সংখ্যা নির্ণয় কর। [উঃ $(n-2)\,\underline{|n-1}$]

23. কোন অঙ্কই একাধিকবার না হইয়া 3, 6, 7, 2, 0 অঙ্কগুলির সাহায্যে 5টি সার্থক অঙ্কবিশিষ্ট কয়টি অযুগ্ম সংখ্যা গঠন করা যায় ? [উঃ 36]

24. কোন সংখ্যার কোন অঙ্ক একাধিকবার থাকিবে না এরূপ 100 এবং 1000 এর মধ্যবর্তী কতগুলি সংখ্যা 2, 3, 4, 0, 8, 9 এই অঙ্কগুলির সাহায্য গঠন করা যায় ? [উঃ 100]

25. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 এবং 9 অঙ্কগুলির সাহায্যে 1000 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় যাহাদের কোনটিতে কোন অঙ্ক একাধিকবার থাকিবে না ? [উঃ 154]

26. 0, 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলির প্রত্যেকটি একবার করিয়া লইয়া ছয় অঙ্কের কয়টি অযুগ্ম সংখ্যা গঠন করা যায় ? [উঃ 288]

[অযুগ্ম সংখ্যাগুলির শেষ অঙ্কটি অবশ্যই 1, 3 বা 5 হইবে। শেষ অঙ্কটি 1 হইলে বাকী 5টি অঙ্ককে নিজেদের মধ্যে $\underline{|5}=120$ প্রকারে সাজান যায়। কিন্তু ইহাদের মধ্যে কতকগুলি হইবে 0 দিয়া শুরু এবং সেগুলিকে বাদ দিতে হইবে কারণ সেগুলি ছয় অঙ্কের সংখ্যা নহে। প্রথম অঙ্ক 0 এবং শেষ অঙ্ক 1 এমন সংখ্যার সংখ্যা $=\underline{|4}=24$; শেষ অঙ্কটি 1 এমন ছয় অঙ্কের সংখ্যার সংখ্যা $=120-24=96$ এবং অনুরূপে 3 বা 5 শেষ অঙ্ক হইলে প্রতি ক্ষেত্রে 96টি সংখ্যা গঠন করা যাইবে।

∴ নির্ণেয় অযুগ্ম সংখ্যার সংখ্যা $=3\times 96=288$.]

27. 300 অপেক্ষা বৃহত্তর কতগুলি যুগ্ম সংখ্যা 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলির সাহায্যে, কোন অঙ্ক একবারের বেশী না লইয়া, গঠন করা যায় ? [উঃ 111]

[3 অঙ্কবিশিষ্ট যুগ্ম সংখ্যার সংখ্যা—

(1) 3 দিয়া আরম্ভ এবং 2 দিয়া শেষ $= {}^3P_1 = 3$

(2) 3 „ „ „ 4 „ „ $= {}^3P_1 = 3$

(3) 4 „ „ „ 2 „ „ $= {}^3P_1 = 3$

(4) 5 „ „ „ 2 „ „ $= {}^3P_1 = 3$

(5) 5 „ „ „ 4 „ „ $= {}^3P_1 = 3$

15

4 অঙ্কের যুগ্ম সংখ্যার সংখ্যা :

(1) 2 দিয়া শেষ $= {}^4P_3 = 24$

(2) 4 „ „ $= {}^4P_3 = 24$

48

5 অঙ্কের যুগ্ম সংখ্যার সংখ্যা :

(1) 2 দিয়া শেষ $= {}^4P_4 = 24$

(2) 4 „ „ $= {}^4P_4 = 24$

48

$\therefore$ নির্ণেয় যুগ্ম সংখ্যার সংখ্যা $= 15 + 48 + 48 = 111.$]

6·5. সবগুলি বিভিন্ন নহে এমন বস্তুসমূহের বিন্যাস

উপপাদ্য : যদি n সংখ্যক বস্তুর মধ্যে p সংখ্যক এক রকমের সদৃশ বস্তু, q সংখ্যক আর এক রকমের সদৃশ বস্তু, r সংখ্যক আরও এক রকমের সদৃশ বস্তু এবং বাকাগুলি সব বিভিন্ন বস্তু থাকে তবে উহাদের সবগুলিকে একযোগে লইয়া য বিন্যাসগুলি করা যায় তাহাদের সংখ্যা হইতেছে,

$$\frac{\lfloor n}{\lfloor p \lfloor q \lfloor r}.$$

ধরা যাউক, বস্তুগুলিকে অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হইল। আরও ধরা হইল p সংখ্যক a, q সংখ্যক b এবং r সংখ্যক c আছে।

ধরা যাউক নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= x$.

x সংখ্যক বিন্যাসের যে কোন একটির p সংখ্যক aর পরিবর্তে p সংখ্যক নূতন অক্ষর $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_p$ লওয়া হইল যাহারা পরস্পর বিভিন্ন এবং বাকী $(n \quad p)$ অক্ষর হইতেও ভিন্ন। এই p সংখ্যক নূতন অক্ষরগুলিকে নিজেদের মধ্যে $\lfloor p$ প্রকারে সাজান যায়। সুতরাং x বিন্যাসের প্রত্যেকটিতে এই পরিবর্তন ঘটাইলে $x \times \lfloor p$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে যাহার মধ্যস্থ p সংখ্যক aগুলি এখন সব বিভিন্ন।

এখন $x \times \lfloor p$ সংখ্যক বিন্যাসের যে কোন একটির q সংখ্যক bর পরিবর্তে q সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_q$ লওয়া হইল। অপরগুলিকে স্থির রাখিয়া শুধু ইহাদের বিন্যস্ত করিলে $\lfloor q$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায়। এই প্রক্রিয়া $x \times \lfloor p$

বিন্যাসের প্রত্যেকটিতে করিলে $x \times \lfloor p \times \lfloor q$ বিন্যাস পাওয়া যাইবে যাহাদের সমস্ত p সংখ্যক a অক্ষরগুলি, এবং সমস্ত q সংখ্যক b অক্ষরগুলি বিভিন্ন। একইভাবে r সংখ্যক cর পরিবর্তে r বিভিন্ন অক্ষর লইয়া উহাদের বিন্যস্ত করিলে $x \times \lfloor p \times \lfloor q \times \lfloor r$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে। এখন সমস্ত সদৃশ অক্ষরগুলি বিভিন্ন অক্ষর দ্বারা প্রতিস্থাপিত হইয়াছে ;

$\therefore$ $x \times \lfloor p \times \lfloor q \times \lfloor r = n$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর সবগুলিকে একযোগে লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা $= \lfloor n$;

$$\therefore \quad x = \frac{\lfloor n}{\lfloor p \lfloor q \lfloor r}.$$

উদা. 1. *BOOKWORK* শব্দটির অক্ষরগুলি লইয়া কতগুলি বিন্যাস হইবে ?

শব্দটিতে 8টি অক্ষর আছে যাহাদের মধ্যে 3টি O, 2টি K এবং বাকী সবগুলি বিভিন্ন অক্ষর।

$$\therefore \quad \text{মোট বিন্যাস সংখ্যা} = \frac{\lfloor 8}{\lfloor 3 \lfloor 2} = 3360.$$

উদা. 2. একটি খুঁটিতে একই সময়ে 2টি নীল, 2টি লাল এবং 5টি হলদে পতাকা উড়াইয়া কতগুলি সংকেত দেওয়া যায় ?

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় সংকেতের সংখ্যা} = \frac{\lfloor 9}{\lfloor 2 \lfloor 2 \lfloor 5} = 756.$$

উদা. 3. *ARRANGE* শব্দটির অক্ষরগুলিকে কত প্রকারে সাজান যায় ? দেখাও যে R দুইটি কখনই একত্রে থাকিবে না এইভাবে *ARRANGE* শব্দটির অক্ষরগুলিকে 900 প্রকারে সাজান যায়।

ARRANGE শব্দটিতে মোট 7টি অক্ষর আছে যাহাদের মধ্যে আছে 2টি A এবং 2টি R.

$$\therefore \quad \text{বিন্যাস সংখ্যা} = \frac{\lfloor 7}{\lfloor 2 \lfloor 2} = 1260.$$

যে বিন্যাসগুলিতে R দুটি একত্রে থাকিবে তাহাদের সংখ্যা

$$= \frac{\lfloor 6}{\lfloor 2} = 360.$$

[2টি R একত্রে রাখিয়া উহাদের একটি অক্ষররূপে গণ্য করিলে 6টি অক্ষর হয় যাহাদের মধ্যে থাকে 2টি A.]

∴ যে সকল বিন্যাসে 2টি R একত্রে থাকিবে না তাহাদের সংখ্যা $= 1260 - 360 = 900$.

6·6. একই বস্তু বার বার লইয়া বিন্যাস

উপপাদ্য ঃ যে কোন বিন্যাসে প্রত্যেক বস্তুকে একবার, দুইবার, $\cdots r$ বার পর্যন্ত পুনঃ পুনঃ লওয়া চলিলে n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর একযোগে r সংখ্যক করিয়া বস্তু লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে।

r সংখ্যক শূন্যস্থান এবং n সংখ্যক বস্তু মনে করা হইল।

প্রথম স্থানটি n প্রকারে পূর্ণ করা যায় কারণ ঐ স্থানে প্রদত্ত n বস্তুর যে কোন একটিকে স্থাপন করা যায়। যে কোন এক প্রকারে ইহা করিবার পর দ্বিতীয় স্থানটিও আবার n প্রকারে পূর্ণ করা যায় কারণ ঐ একই বস্তুকে পুনরায় ব্যবহার করা যাইবে।

∴ দুইটি স্থান পর পর $n \times n = n^2$ প্রকারে পূর্ণ করা যায়।

তৃতীয় স্থানটিও n প্রকারে পূর্ণ করা যায় যেহেতু পুনঃ পুনঃ ব্যবহার চলিবে।

∴ তিনটি স্থান পর পর n^3 প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে এবং এইরূপে পর পর r সংখ্যক স্থান পর্যন্ত হইবে।

∴ নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা $= r$ সংখ্যক স্থান পর পর পূর্ণ করিবার প্রকার সংখ্যা $= n^r$.

উদা. 1. কত প্রকারে তিনটি বিভিন্ন পুরস্কার (যথা ঃ প্রথমটি ভাল আচার-ব্যবহারের জন্য, দ্বিতীয়টি উৎকর্ষের জন্য এবং তৃতীয়টি সর্বোত্তম তার্কিকের জন্য) 10 জন বালকের মধ্যে প্রদান করা যায় যদি যে কোন বালক সব পুরস্কার কয়টি পাইতে পারে?

প্রথম পুরস্কারটি 10 জন বালকের যে কোন একজনকে দেওয়া যায়; ইহার পর, দ্বিতীয় পুরস্কারটিও 10 জন বালকের যে কোন একজনকে দেওয়া যায়; কারণ সকলেই সমানভাবে দ্বিতীয় পুরস্কার পাইবার যোগ্য। সুতরাং দুটি পুরস্কার 10×10 প্রকারে দেওয়া যাইবে। অনুরূপে তৃতীয় পুরস্কারটিও 10 প্রকারে দেওয়া যাইবে এবং তাহা হইলে তিনটি পুরস্কার বিতরণ করিবার প্রকার সংখ্যা $= 10^3 = 1000$.

উদা. 2. 4 অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়? (স্পষ্টত একটি অঙ্ক চারবার পর্যন্ত কোন একটি সংখ্যায় লওয়া যাইতে পারে)

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 মোট এই দশটি অঙ্ক আছে। যেহেতু সংখ্যাগুলির প্রথম অঙ্কটি শূন্য হইতে পারে না, সুতরাং ইহাকে 9 প্রকারে নির্বাচন করা যায়। আবার একটি অঙ্ক একটি সংখ্যার মধ্যে বার বার থাকিতে পারে বলিয়া সংখ্যাগুলির

দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ অঙ্কগুলি দশটি অঙ্কের যে কোন একটি হইতে পারে এবং সেই কারণে বাকী তিনটি স্থানের প্রত্যেকটি 10 প্রকারে পূর্ণ করা যাইতে পারে।

∴ চারি অঙ্কের সংখ্যায় মোট সংখ্যার সংখ্যা $=9\times10^3=9000$.

6·7. বৃত্তাকারে বিন্যাস

একটি সারিতে বা রেখায় বিন্যাসের ক্ষেত্রে সর্বদা দুইটি প্রান্ত থাকে। কিন্তু কতকগুলি বস্তু বৃত্তাকারে সাজাইলে কোন বিন্যাসেই দুইটি প্রান্ত স্থির করা যায় না। সুতরাং বৃত্তাকারে বিন্যাসের ক্ষেত্রে কেবল বস্তুসমূহের আপেক্ষিক অবস্থানের কথা বিবেচনা করা হইবে।

অতএব n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর একযোগে সবকয়টি লইয়া একটি বৃত্তাকারে $\underline{|n-1}$ প্রকারে সাজান যায়, কারণ এটি আপেক্ষিক সজ্জার প্রশ্ন বলিয়া একটি বস্তুকে স্থির রাখিয়া বাকী $(n-1)$ বস্তুকে $\underline{|n-1}$ প্রকারে সাজান হয়।

যদি clockwise এবং counter-clockwise এই দুই প্রকার বিন্যাসের প্রভেদ না ধরা হয় তবে বিন্যাস সংখ্যা হইবে $\frac{1}{2}\underline{|n-1}$. যেমন, n সংখ্যক বিভিন্ন রঙের পুঁতি দিয়া একটি মালা $\frac{1}{2}\underline{|n-1}$ প্রকারে গড়া যায়।

কত প্রকারে n সংখ্যক লোককে একটি গোল টেবিলে বসান যায় বাহির করিতে হইলে বিন্যাসগুলি টেবিলের সাপেক্ষে কিম্বা পরস্পরের সাপেক্ষে তাহা বিবেচনা করিয়া $\underline{|n}$ বা $\underline{|n-1}$ লইতে হইবে।

উদা. 1. (*a*) 10 জন বালক কত প্রকারে একটি বৃত্তাকারে বসিতে পারে?

(*b*) একটি স্থিতিস্থাপক পটির উপর ছয়টি পাথর কত প্রকারে গাঁথিয়া একটি ব্রেসলেট (bracelet) তৈয়ার করা যায়?

(*c*) চারি ব্যক্তি কত প্রকারে একটি গোল টেবিলের ধারে ধারে বসিতে পারিবে যাহাতে কোন দুই প্রকারে একই লোক পাশাপাশি না বসে?

(*d*) কত প্রকারে 5 জন পুরুষ এবং 2 জন মহিলাকে একটি গোল টেবিলের ধারে বসান যায় যদি মহিলা দুইজন (*i*) একত্র বসে, (*ii*) বিচ্ছিন্ন হইয়া থাকে?

(*a*) বিভিন্ন ভাবে বৃত্তাকারে বসাইলে বালকদিগের আপেক্ষিক অবস্থানের কথা বিবেচনা করিতে হইবে। সুতরাং উহাদের একজনকে স্থির রাখিয়া 9 জনকে নিজেদের মধ্যে সাজাইতে হইবে; ইহা ${}^9P_9=\underline{|9}=3,62,880$ প্রকারে করা যায় এবং ইহাই নির্ণেয় বৃত্তের সংখ্যা।

(*b*) এক্ষেত্রেও একটি পাথর স্থির রাখিয়া পাথরগুলির $\underline{|5}$ সংখ্যক বিভিন্ন বিন্যাস পাওয়া যায়। কিন্তু পটির উপর গাঁথা হইলে সর্বদাই এমন এক জোড়া বিন্যাস পাওয়া যাইবে যেখানে একটি বিন্যাস ঠিক অপরটির সমান, যদি braceletটি ঘুরাইয়া অপরদিক হইতে দেখা হয়। এইরূপ প্রতি জোড়াকে একটি বিন্যাস বিবেচনা করিতে হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় bracelet এর বিভিন্ন নকসার (design) সংখ্যা $=\frac{1}{2}\underline{|5}=60.$

(*c*) এক ব্যক্তিকে স্থির রাখিয়া $\underline{|3}$ বিন্যাস হয়। এখন বিভিন্ন জোড়া জোড়া এরূপ বিন্যাস থাকিবে যে প্রত্যেক জোড়ার একটি একটি বিন্যাস ঠিক অপরটির অনুরূপ যদি clockwise এবং anticlockwise ক্রমের প্রভেদ না ধরা হয়; আবার এই দুই বিন্যাসে যে কোন এক বিশেষ ব্যক্তির পাশের দুজন একই থাকে।

$\therefore$ এখানেও প্রতি এক জোড়া এরূপ বিন্যাসকে একটি বিন্যাস বলিয়া বিবেচনা করা যায় এবং সেই হেতু নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $=\frac{1}{2}\underline{|3}=3.$

(*d*) (*i*) প্রথমে ধরা যাউক মহিলা দুইজনকে নিজেদের মধ্যে সাজান হইল; ইহা $\underline{|2}$ প্রকারে সম্ভব। ইহাদের স্থির রাখিয়া এইবার পুরুষ 5 জনকে নিজেদের মধ্যে $\underline{|5}$ প্রকারে সাজান হইল।

$\therefore$ যে বিন্যাসগুলিতে মহিলা দুইজন একত্র থাকিবে তাহার সংখ্যা

$$=\underline{|5}\times\underline{|2}=240.$$

(*ii*) এক্ষেত্রে, প্রথমে 7 জনের (5 পুরুষ, 2 মহিলা) বৃত্তাকারে সম্ভাব্য সকল বিন্যাস বিবেচনা করা যাউক; এই বিন্যাসগুলি একজনকে স্থির রাখিয়া $\underline{|6}$ প্রকারে করা যায়। অতএব যে বিন্যাসগুলিতে মহিলা দুজন বিচ্ছিন্ন থাকবে তাহার সংখ্যা

$$=\underline{|6}-\underline{|5}\times\underline{|2}=720-240=480.$$

প্রশ্নমালা VI(C)

1. কত প্রকারে 5টি dot (.) চিহ্ন এবং 3টি cross (×) চিহ্ন এক সারিতে সাজান যায়? [উঃ 56]

2. নিম্নের শব্দগুলির অক্ষরগুলি দিয়া কতগুলি বিন্যাস করা যায়, বাহির কর :

(*i*) *INDIA*; (*ii*) *CALCUTTA*;
(*iii*) *ASSASSINATION*; (*iv*) *ABRACADABRA*;
(*v*) *ALGEBRA* (*vi*) *RAMARANJAN*.

[উঃ (*i*) 60; (*ii*) 5040; (*iii*) 10810800; (*iv*) 83160; (*v*) 2520; (*vi*) 37800

3. একটি পুস্তকাগারে একটি পুস্তকের 5 কপি, অন্য দুইটি পুস্তকের প্রত্যেকটির 4 কপি করিয়া, অপর তিনটি পুস্তকের প্রত্যেকটির 6 কপি করিয়া এবং আটখানি বিভিন্ন পুস্তকের এক কপি করিয়া আছে। সকল পুস্তককে কত প্রকারে সাজান যায় ? [উঃ $39!/\{5!(4!)^2(6!)^3\}$]

4. প্রতিটি 3 খণ্ডের দুইখানি গ্রন্থ, এবং প্রতিটি 2 খণ্ডের দুইখানি গ্রন্থ আছে ; কত প্রকারে পুস্তক 10 খানিকে একটি তাকে সাজান যায় যাহাতে একই গ্রন্থের খণ্ডগুলি পরস্পর বিচ্ছিন্ন না থাকে ? [উঃ 3456]

5. *REARRANGE* শব্দটির অক্ষরগুলিকে কত প্রকারে পুনর্বিন্যাস করা যায় ? এই বিন্যাসগুলির কতগুলিতে A অক্ষরগুলি একত্র থাকিবে ?

[উঃ 15119, 3360]

6. কত প্রকারে "*BALLOON*" শব্দটির অক্ষরগুলিকে সাজান যায় যাহাতে L দুইটি একত্র না থাকে ? [উঃ 900]

7. *ORION* শব্দটির অক্ষরগুলির, R এবং N একত্র থাকিবে না, এই শর্তে বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয় কর। [উঃ 36]

8. একই অঙ্ক পুনঃ পুনঃ ব্যবহার করিয়া 3, 1, 9 অঙ্কগুলির সাহায্যে অনধিক 4 অঙ্কের কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাইবে ? [উঃ 120]

9. দশ লক্ষ অপেক্ষা বৃহত্তর কতগুলি সংখ্যা 2, 3, 0, 3, 4, 2, 3 অঙ্কগুলি দ্বারা গঠন করা যায় ? [উঃ 300]

10. কত প্রকারে 8 জন লোক বৃত্তাকারে বসিতে পারে ? একটি গোল টেবিলের চারিদিকে টেবিলের সম্পর্কে কত প্রকারে তাহাদের বসান যায়। প্রতি ক্ষেত্রে বিন্যাসগুলির কতগুলিতে 3টি বিশেষ লোক পাশাপাশি বসিবে ?

[উঃ 5040, 40320, 720, 4320]

11. কোন গোল টেবিলের চারিধারে 7 জন ব্যক্তি কত প্রকারে বসিতে পারে যাহাতে কোন দুই প্রকার বিন্যাসে পাশাপাশি একই লোক না থাকে ?

[উঃ টেবিলের সম্পর্কে 2520 ; নিজেদের আপেক্ষিক অবস্থানে 360]

12. কত প্রকারে 7 জন ইংরাজ এবং 6 জন ভারতীয় একটি গোল টেবিলের ধারে বসিতে পারে যাহাতে কোন দুইজন ভারতীয় পাশাপাশি না থাকে ? [উঃ $(7!)^2$]

13. একটি ring এর উপর বিভিন্ন রঙের 8টি পাথর কত প্রকারে সাজান যায় ? এই বিন্যাসগুলির কয়টিতে লাল এবং হলদে পুঁতি পাশাপাশি থাকিবে না ?

[উঃ 2520 ; 1800]

14. কত প্রকারে 6 জন মহিলা ও 6 জন ভদ্রলোককে একটি গোল টেবিলের ধারে ধারে সাজান যায় যাহাতে কোন দুইজন ভদ্রলোক পাশাপাশি না বসেন এবং দুই বিশেষ মহিলা Miss X এবং Miss Y, Mr. Z এর পাশে বসিতে নারাজ হন ?

[উঃ 34560]

15. 4 জন বালকের মধ্যে 5টি পুরস্কার কত প্রকারে বিতরণ করা যায় যখন প্রত্যেক বালকই সবকয়টি পুরস্কার পাইবার যোগ্য ? [উঃ 1024]

16. 5টি বালকের প্রত্যেককে একটি করিয়া কত প্রকারে 5টি পুরস্কার দেওয়া যাইতে পারে ? [উঃ 120]

6·8. **সমবায় :** ^nC_r নির্ণয়ের সূত্র, $(r \leqslant n)$

এখানে পুনরায় স্মরণ করা যাইতেছে যে প্রদত্ত কতিপয় বস্তু হইতে একযোগে কয়েকটি বা সবগুলি লইয়া (উহাদের ক্রম নিরপেক্ষভাবে) যে বিভিন্ন দল বা নির্বাচন (groups or selections) করা যায় তাহাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি **সমবায়** বলে।

^nC_r এই প্রতীকের অর্থ হইল n বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া সমবায় সংখ্যা $(r \leqslant n)$।

উপপাদ্য :

n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r সংখ্যক বস্তু লইয়া সমবায় সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে, অর্থাৎ ^nC_r নির্ণয়ের একটি সূত্র প্রতিষ্ঠা করিতে হইবে $(r \leqslant n)$।

^nC_r সংখ্যাটি অর্থাৎ n বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া সমবায় সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রথমে ^nC_r সমবায়ের যে কোন একটি লওয়া হইল ; এই সমবায়ে r বিভিন্ন বস্তু আছে। এই r বস্তুগুলিকে বিভিন্ন ক্রমে সাজাইয়া এই সমবায় হইতে উদ্ভূত সমস্ত সম্ভাব্য বিভিন্ন বিন্যাস পাওয়া গেল। স্পষ্টত পাওয়া গেল $^rP_r = \lfloor r$ সংখ্যক বিন্যাস।

$\therefore$ $^nC_r \times \lfloor r = n$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর একযোগে r সংখ্যক করিয়া বস্তু লইয়া সম্ভাব্য সকল বিন্যাসের সংখ্যা $= {^nP_r}$

$$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

বা, $$^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r \, \lfloor r} \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

দ্রষ্টব্য : $^nC_r=\dfrac{\lfloor n}{\lfloor n-r\lfloor r}$ এ $r=n$ বসাইয়া পাওয়া যায় $^nC_n=\dfrac{\lfloor n}{\lfloor 0\lfloor n}=1.$

আবার $r=0$ বসাইলে, $^nC_0=\dfrac{\lfloor n}{\lfloor n\lfloor 0}=1$ ($\lfloor 0=1$ ধরিয়া)

$$\therefore\quad {}^nC_0={}^nC_n=1.$$

বিকল্প পদ্ধতি : (^nP_r এর সূত্র ব্যবহার না করিয়া)

n বিভিন্ন বস্তুকে $a, b, c, d,\cdots\cdots$ অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হইল। ^nC_r সংখ্যক সমস্ত সমবায়গুলিকে লিখিলে $r\times{}^nC_r$ সংখ্যক অক্ষর সমগ্র তালিকায় হইবে (যেহেতু প্রত্যেক সমবায়ে r সংখ্যক অক্ষর আছে এবং ^nC_r সংখ্যক সমবায় আছে)।

প্রত্যেকটি অক্ষর (যথা a) তালিকাটিতে $^{n-1}C_{r-1}$ বার থাকিবে, যেহেতু ইহা $(b, c, d,\cdots)$ অপর $(n-1)$ অক্ষর হইতে $(r-1)$ অক্ষর লইয়া প্রতিটি সমবায়ের সহিত থাকে।

অতএব, তালিকাস্থ অক্ষর সংখ্যা $n\times{}^{n-1}C_{r-1}$ এর সহিতও সমান (প্রতি অক্ষর $^{n-1}C_{r-1}$ বার আছে এবং n সংখ্যক অক্ষর আছে)।

$\therefore\quad r\times{}^nC_r=n\times{}^{n-1}C_{r-1}$, বা, $^nC_r=\dfrac{n}{r}\times{}^{n-1}C_{r-1},$

n এর বদলে $n-1$ এবং r এর বদলে $r-1$ লিখিয়া পাওয়া যায়—

$$^{n-1}C_{r-1}=\frac{n-1}{r-1}\times{}^{n-2}C_{r-2}\,;$$

এইরূপ, $^{n-2}C_{r-2}=\dfrac{n-2}{r-2}\times{}^{n-3}C_{r-3}\,;$

এবং এইরূপ পর পর $^{n-r+2}C_2=\dfrac{n-r+2}{2}\times{}^{n-r+1}C_1,$

$$^{n-r+1}C_1=\frac{n-r+1}{1}\times{}^{n-r}C_0=\frac{n-r+1}{1}\text{ পর্যন্ত};$$

$$\therefore\ {}^nC_r=\frac{n}{r}\ {}^{n-1}C_{r-1}=\frac{n}{r}\times\frac{n-1}{r-1}\times\frac{n-2}{r-2}\times\cdots\times\frac{n-r+2}{2}\times{}^{n-r+1}C_1$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots\times2\times1}=\frac{\lfloor n}{\lfloor n-r\lfloor r}.$$

6·9. দুইটি প্রয়োজনীয় সম্পর্ক

(i) $^nC_r = {}^nC_{n-r} \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$ **(5)**

এখন $^nC_r = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\,\underline{|r}}$ এবং $^nC_{n-r} = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|n-(n-r)}\,\underline{|n-r}} = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$

অতএব সম্পর্কটি প্রমাণিত হইল।

বিকল্প (সূত্র প্রয়োগ না করিয়া) : n সংখ্যক বস্তু হইতে r সংখ্যক বস্তু নির্বাচন করিয়া লইলে $(n-r)$ সংখ্যক বস্তু পড়িয়া থাকে।

$\therefore$ n সংখ্যক বস্তু হইতে r সংখ্যক করিয়া বস্তুর দল সংখ্যা বা ^nC_r এবং n সংখ্যক বস্তু হইতে $(n-r)$ সংখ্যক করিয়া বস্তুর দল সংখ্যা বা $^nC_{n-r}$ একই

(ii) $^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$ **(6)**

বামপক্ষ $= \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\,\underline{|r}} + \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|n-r+1}\,\underline{|r-1}}$

$$= \underline{|n}\left\{\frac{1}{\underline{|n-r}\,.\,r\,\underline{|r-1}} + \frac{1}{(n-r+1)\underline{|n-r}\,\underline{|r-1}}\right\}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\,\underline{|r-1}}\left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right\}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\,\underline{|r-1}}\left\{\frac{(n-r+1)+r}{r(n-r+1)}\right\} = \frac{(n+1)\,\underline{|n}}{\underline{|n-r}\,\underline{|r-1}} \times \frac{1}{r(n-r+1)}$$

$$= \frac{\underline{|n+1}}{\underline{|n-r+1}\,\underline{|r}} = {}^{n+1}C_r.$$

বিকল্প (সূত্র প্রয়োগ না করিয়া) : $^{n+1}C_r$ হইতেছে $(n+1)$ সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর, যথা $a, b, c, d \cdots$ইত্যাদি হইতে r সংখ্যক অক্ষর নির্বাচন করিবার প্রকারের সংখ্যা। যদি প্রত্যেক নির্বাচন কেবলমাত্র $b, c, d \cdots$ইত্যাদি অক্ষরগুলি হইতে (a কে বাদ দিয়া) করা হয় তবে নির্বাচন সংখ্যা হয় ^nC_r. কিন্তু যদি প্রতি নির্বাচনে a অক্ষরটি থাকে তবে ইহাতে $b, c, d, \cdots$ইত্যাদি অপর n সংখ্যক অক্ষরের $(r-1)$ সংখ্যক অক্ষর থাকিবে সুতরাং নির্বাচনগুলি $^nC_{r-1}$ প্রকারে করা যায়।

$\therefore$ নির্বাচনের মোট সংখ্যা $= {}^nC_r + {}^nC_{r-1}$.

কিন্তু মোট নির্বাচনের সংখ্যা $= {}^{n+1}C_r$; $\therefore$ $^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$.

সহজ প্রয়োগ :

স্মরণ রাখিতে হইবে : $^nC_r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots\cdots1}$

$= \frac{\text{prefix } n \text{ হইতে শুরু করিয়া } r \text{ সংখ্যক উৎপাদক}}{\text{suffix } r \text{ হইতে শুরু করিয়া } r \text{ সংখ্যক উৎপাদক}}$

এবং $^nC_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r \ \lfloor r}$; প্রথমটি সংখ্যা সংক্রান্ত প্রশ্নে এবং পরেরটি বীজগণিত সংক্রান্ত প্রশ্নে ব্যবহার করা যাইতে পারে।

উদা. 1. মান নির্ণয় কর :

(i) $^8C_4$; (ii) $^nC_2$; (iii) $^{10}C_8$; (iv) $^{10}C_3 + {}^{10}C_4$.

(i) $^8C_4 = \frac{8.7.6.5}{4.3.2.1} = 70$; (ii) $^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2.1} = \frac{n(n-1)}{2}$;

(iii) $^{10}C_8 = {}^{10}C_2 = \frac{10.9}{2.1} = 45.$

দ্রষ্টব্য : Suffix যখন prefix এর অর্ধেক অপেক্ষা বেশী হইবে তখন সূত্র (5) ব্যবহার করিয়া (iii) এর ক্ষেত্রের মত পরিপূরক সমবায়ের (Complementary Combination) মান নির্ণয় করিতে হয়।

(iv) $^{10}C_3 + {}^{10}C_4 = {}^{11}C_4 = \frac{11.10.9.8}{4.3.2.1} = 330.$ [(6) দ্রষ্টব্য]

উদা. 2. (a) $^{18}C_r = {}^{18}C_{r+2}$ হইলে $^rC_5$ এর মান নির্ণয় কর ;

(b) $^nP_r = 272$, $^nC_r = 136$; n এবং r এর মান নির্ণয় কর।

(a) যেহেতু $^{18}C_r = {}^{18}C_{18-r}$, সূত্র (5) অনুসারে $18 - r = r + 2$,

বা, $r = 8 \ \therefore \ {}^rC_5 = {}^8C_5 = {}^8C_3 = \frac{8.7.6}{3.2.1} = 56.$

(b) $^nC_r \times \lfloor r = {}^nP_r$ বলিয়া $136 \times \lfloor r = 272$,

বা, $\lfloor r = 2 = \lfloor 2$; $\therefore \ r = 2$;

এখন $^nP_r = 272$ সুতরাং $^nP_2 = 272$;

$\therefore \ n(n-1) = 272 = 17 \times 16$, বা, $-16 \times (-17)$; $\therefore \ n = 17.$

(n এর ঋণাত্মক মান -16 অগ্রাহ্য)

উদা. 3. একটি কাউন্সিলের 8 জন নির্বাচিত সদস্য এবং 5 জন সরকার মনোনীত সদস্যদের মধ্য হইতে 7 জনের কতগুলি বিভিন্ন কমিটি গঠিত হইতে পারে ?

স্পষ্টতঃই, 13 জনের মধ্য হইতে ক্রমনিরপেক্ষভাবে যে কোন 7 জনকে নির্বাচিত করিতে হইবে ;

$\therefore$ নির্ণেয় কমিটির সংখ্যা $= {}^{13}C_7 = {}^{13}C_6 = \dfrac{13.12.11.10\,9.8}{6.5.4.3.2.1} = 1716.$

উদা. 4. কোন তিনটি বিন্দুই একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে এরূপ 8টি বিন্দু যোগ করিয়া কয়টি সরলরেখা পাওয়া যাইবে ?

যে কোন তিনটি বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে বলিয়া, প্রতি একজোড়া বিন্দু (যেমন A, B) একটি সরলরেখাকে নির্দিষ্ট করিবে। লক্ষ্য করিতে হইবে যে A, B এবং B, Aর মধ্য দিয়া সরলরেখা দুইটি ভিন্ন সরলরেখা নহে। অতএব 8টি বিন্দু হইতে যে কোন 2টি বিন্দুর নির্বাচন (বিন্যাস নহে) করিতে হইবে। এইরূপ নির্বাচনের সংখ্যাই নির্ণেয় সরলরেখার সংখ্যা এবং সেইজন্যই ইহা $= {}^8C_2 = \dfrac{8.7}{2.1} = 28.$

প্রশ্নমালা VI(D)

1. মান নির্ণয় কর : (a) ${}^8C_3$; ${}^{24}C_3$; ${}^{19}C_{14}$.

(b) ${}^4C_3 + {}^4C_2$; ${}^8C_5 + {}^8C_4$; ${}^nC_r + {}^nC_{r+1}$.

[উঃ (a) 56 ; 2024 ; 11628. (b) 10 ; 126 ; ${}^{n+1}C_{r+1} = \dfrac{\lfloor n+1}{\lfloor r+1 \lfloor n-r}$.]

2. (a) (i) ${}^nC_2 = 45$ হইলে n এর মান নির্ণয় কর। (ii) ${}^{2n}C_r = {}^{2n}C_{r+2}$ হইলে r এর মান কত ?

(b) যদি ${}^nP_r = 132$, ${}^nC_r = 66$ তবে n এবং r এর মান নির্ণয় কর ; একই প্রশ্ন যদি ${}^nP_r = 336$ এবং ${}^nC_r = 56$.

(c) যদি ${}^{2n}C_3 : {}^nC_2 = 44 : 3$ হয় তবে n এর মান নির্ণয় কর।

(d) ${}^nC_{12} = {}^nC_8$ হইলে ${}^nC_{17}$, ${}^{22}C_n$ এর মান নির্ণয় কর।

(e) সরল কর : ${}^{n+1}C_3 \div {}^nC_2$; ${}^{n+1}C_{r+1} \div {}^nC_r$.

[উঃ (a) (i) 10 ; (ii) $(n-1)$. (b) 12, 2 ; 8, 3. (c) 6. (d) 1140, 231.

(e) $\frac{1}{3}(n+1)$; $\dfrac{n+1}{r+1}$]

3. 7 খানি বিভিন্ন পুস্তক হইতে কত প্রকারে তিনখানি পুস্তক নির্বাচন করা যায় ?

[উঃ 35]

4. 14 জন বালকের মধ্য হইতে কত প্রকারে 11 জনের একটি ফুটবল দল গঠন করা যায় ? [উঃ 364]

5. 52 খানি তাসের একটি প্যাকেট হইতে তিনখানি করিয়া কত হাত তাস দেওয়া যায় ? [উঃ 22,100]

6. কোনও তিনটি সমরেখ নহে, এক সমতলে অবস্থিত এমন 12টি বিন্দু যোগ করিয়া কয়টি সরলরেখা পাওয়া যাইবে ? কয়টি ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে ? [উঃ 66 ; 220]

7. একটি বৃত্তের উপর 8টি বিন্দু চিহ্নিত করা আছে। উহাদের দুইটি করিয়া যুক্ত করিয়া কয়টি জ্যা টানা যাইবে ? [উঃ 28]

8. একটি দশভুজের কয়টি কর্ণ হইতে পারে যদি একটি কর্ণ বলিতে পাশাপাশি নহে এমন দুইটি কৌণিক বিন্দুর সংযোজক রেখা বুঝায় ? [উঃ 35]

9. 8 জন পুরুষ এবং 6 জন স্ত্রীলোকের মধ্য হইতে 5 জনের কয়টি কমিটি হইতে পারে ? [উঃ 2002]

10. এক ব্যক্তির 6 জন বন্ধু আছে। কত প্রকারে তিনি তাহাদের এক বা একাধিক জনকে একটি ভোজে নিমন্ত্রণ করিতে পারেন ? [উঃ 63]

11. প্রমাণ কর : $\dfrac{{}^{4n}C_{2n}}{{}^{2n}C_n}=\dfrac{1.3.5.\cdots(4n-1)}{\{1.3.5.\cdots(2n-1)\}^2}$

12. দেখাও যে পর পর যে কোন r সংখ্যক অখণ্ড সংখ্যার গুণফল $\underline{|r}$ দ্বারা সম্পূর্ণ বিভাজ্য।

6·10. শর্ত সাপেক্ষ সমবায়

নিম্নের উদাহরণগুলি হইতে বিশেষ বিশেষ শর্ত সাপেক্ষে সমবায় সংক্রান্ত প্রশ্নের সমাধানের পদ্ধতি স্পষ্টভাবে বুঝা যাইবে :

উদা. 1. গণিতের একটি পরীক্ষাপত্রে 11টি প্রশ্ন দেওয়া আছে উত্তর করিবার জন্য 6টি প্রশ্ন তুমি কত বিভিন্ন প্রকারে বাছিবে ? 11নং প্রশ্নটি আবশ্যিক করা হইলেই বা তুমি উত্তর করিবার জন্য মোট 6টি প্রশ্ন কত প্রকারে নির্বাচন করিবে ?

প্রথম অংশ : 11টি প্রশ্ন হইতে 6টি প্রশ্ন যত প্রকারে নির্বাচন করা যায় তাহার সংখ্যা $={}^{11}C_6={}^{11}C_5=\dfrac{11.10.9.8.7}{5.4.3.2.1}=462.$

দ্বিতীয় অংশ : 11নং প্রশ্নটি আবশ্যিক হওয়ায় বাকী 10টি প্রশ্ন হইতে 5টি প্রশ্ন নির্বাচন করিতে হইবে ;

$\therefore$ নির্ণেয় নির্বাচনের সংখ্যা $={}^{10}C_5=\dfrac{10.9.8.7.6}{5.4.3.2.1}=252.$

উদা. 2. 8 জন মহিলা এবং 7 জন পুরুষের একটি সভা হইতে কত প্রকারে 3 জন মহিলা এবং 4 জন পুরুষ লইয়া একটি কমিটি নিয়োগ করা যাইবে? Mr. Y একজন সভ্য হইলে যদি Mrs. X ঐ কমিটিতে থাকিতে না চান তাহা হইলেই বা প্রকারের সংখ্যা কত হইবে?

প্রথম অংশ : 8 জনের মধ্য হইতে 3 জন মহিলা $^8C_3$ প্রকারে নির্বাচন করা যায় এবং 7 জনের মধ্য হইতে 4 জন পুরুষ $^7C_4$ প্রকারে নির্বাচন করা যায়। মহিলাদের প্রত্যেকটি দল (3 জন মহিলার) $^7C_4$ পুরুষ দলের প্রত্যেকটির সহিত যুক্ত হইলে $^8C_3 \times {}^7C_4$ কমিটি (3 জন মহিলা এবং 4 জন পুরুষের) গঠিত হইবে। অতএব, কমিটি গঠন করিবার প্রকার সংখ্যা

$$= {}^8C_3 \times {}^7C_4 = 56 \times 35 = 1960.$$

দ্বিতীয় অংশ : প্রথমে যে সকল কমিটিতে Mrs. X এবং Mr. Y উভয়েই থাকিবেন তাহাদের সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে। সেই ক্ষেত্রে অপর 7 জন (Mrs. X কে বাদ দিয়া) হইতে 2 জন মহিলা এবং বাকী 6 জন পুরুষদের (Mr. Y কে বাদ দিয়া) হইতে 3 জন পুরুষ নির্বাচন করিবার থাকে। এই নির্বাচনগুলি, পূর্বের ন্যায়, $^7C_2 \times {}^6C_3 = 420$ প্রকারে করা যায়।

$\therefore$ যে সকল কমিটিতে Mrs. X এবং Mr. Y থাকিবেন না তাহাদের সংখ্যা $= 1960 - 420 = \mathbf{1540}$.

উদা. 3. এক ব্যক্তির 15 জন পরিচিত লোক আছে যাহাদের মধ্যে 10 জন আত্মীয়। 9 জন অতিথিকে তিনি কত প্রকারে নিমন্ত্রণ করিতে পারিবেন যাহাতে তাহাদের মধ্যে 7 জন আত্মীয় থাকে?

15 জন পরিচিতের মধ্যে 10 জন আত্মীয় এবং 5 জন অনাত্মীয়। 10 জনের মধ্য হইতে 7 জন আত্মীয়কে $^{10}C_7$ প্রকারে নিমন্ত্রণ করা যায়। নিমন্ত্রণের এরূপ প্রতিটি প্রকারের জন্য 5 জন অনাত্মীয়ের মধ্য হইতে 2 জনকে $^5C_2$ প্রকারে নির্বাচন করা যায়। $\therefore$ যত প্রকারে 9 জন অতিথিকে নিমন্ত্রণ করা যায় তাহার সংখ্যা $^{10}C_7 \times {}^5C_2 = 120 \times 10 = \mathbf{1200}$.

উদা. 4. একটি পরীক্ষাপত্রে 7টি করিয়া প্রশ্নের দুইটি বিভাগ আছে। একজন পরীক্ষার্থীকে 9টি প্রশ্নের উত্তর করিতে হইবে কিন্তু কোন বিভাগ হইতে 5টির বেশী প্রশ্ন হইবে না। কত প্রকারে 9টি প্রশ্ন নির্বাচন করা যাইতে পারে?

ধরা যাউক বিভাগ দুইটি—A বিভাগ এবং B বিভাগ। যেহেতু একজন পরীক্ষার্থী যে কোন বিভাগ হইতে 5টির বেশী প্রশ্নের উত্তর দিতে পারিবে না, সে

A বিভাগ হইতে 5টি এবং B বিভাগ হইতে 4টি প্রশ্ন বা A বিভাগ হইতে 4টি এবং B বিভাগ হইতে 5টি প্রশ্ন পছন্দ করিতে পারে। আরোপিত শর্তের জন্য অন্য কোন রূপ নির্বাচন হইতে পারে না।

এখন A বিভাগ হইতে 5টি এবং B বিভাগ হইতে 4টি প্রশ্ন $^7C_5 \times {^7C_4} = {^7C_2} \times {^7C_3} = 21 \times 35 = 735$ প্রকারে নির্বাচন করা যায়;

আবার A বিভাগ হইতে 4টি এবং B বিভাগ হইতে 5টি প্রশ্ন $^7C_4 \times {^7C_5} = 735$ প্রকারে নির্বাচন করা যায়;

$\therefore$ একজন পরীক্ষার্থী যত প্রকারে 9টি প্রশ্নের নির্বাচন করিতে পারে তাহার মোট সংখ্যা $= 735 + 735 = \mathbf{1470}$.

উদা. 5. 17টি ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 5টি স্বরবর্ণ হইতে 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 2টি স্বরবর্ণ যুক্ত কয়টি বিভিন্ন শব্দ গঠন করা যায়?

17টি হইতে 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ $^{17}C_3$ প্রকারে এবং 5টি হইতে 2টি স্বরবর্ণ $^5C_2$ প্রকারে বাছাই করা যায়। উহাদের 5টি করিয়া অক্ষরের (3টি ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 2টি স্বরবর্ণ) দলে $^{17}C_3 \times {^5C_2}$ প্রকারে গঠিত করা যায়। আবার প্রত্যেক দলের অক্ষর 5টি নিজেদের মধ্যে $\underline{|5}$ প্রকারে বিন্যস্ত হইয়া বিভিন্ন শব্দ গঠন করে।

$\therefore$ নির্ণেয় শব্দের মোট সংখ্যা $= {^{17}C_3} \times {^5C_2} \times \underline{|5} = \mathbf{816000}$.

উদা. 6. একই সমতলে অবস্থিত n সংখ্যক বিন্দু আছে যাহাদের কোন তিনটিই সমরেখ (একই সরলরেখায় অবস্থিত) নহে। উহাদের যুক্ত করিয়া কতগুলি বিভিন্ন সরলরেখা পাওয়া যায়? যদি ঐ n বিন্দুর মধ্যে p বিন্দু একই সরলরেখায় থাকে তবে ঐ সংখ্যা কত হইবে?

এই দুই ক্ষেত্রে কতগুলি ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে?

সরলরেখার সংখ্যা

যদি যে কোন তিনটি বিন্দু সমরেখ না হয় তবে n সংখ্যক বিন্দু হইতে দুইটি করিয়া বিন্দুর প্রতিটি নির্বাচন হইতে একটি করিয়া সরলরেখা পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ যে কোন তিনটি বিন্দু সমরেখ না হইলে উৎপন্ন সরলরেখার সংখ্যা $= {^nC_2} = \frac{1}{2}n(n-1)$.

p সংখ্যক বিন্দু সমরেখ হইলে, $^pC_2$ সংখ্যক সরলরেখা যাহা ঐ বিন্দুগুলির যে কোন তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত না হইলে উৎপন্ন হইতে পারিত, কম হইবে, পরিবর্তে p বিন্দুগুলি যোগ করিয়া একটিমাত্র সরলরেখা পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ p সংখ্যক বিন্দু সমরেখ হইলে উৎপন্ন সরলরেখার সংখ্যা $= {}^nC_2 - {}^pC_2 + 1$
$= \frac{1}{2}n(n-1) - \frac{1}{2}p(p-1) + 1.$

ত্রিভুজের সংখ্যা

যদি যে কোন তিনটি সমরেখ না হয় তবে n সংখ্যক বিন্দু হইতে তিনটি করিয়া বিন্দুর প্রতিটি নির্বাচন হইতে একটি করিয়া ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ উৎপন্ন ত্রিভুজের সংখ্যা $= {}^nC_3 = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2).$

p সংখ্যক বিন্দু সমরেখ হইলে ${}^pC_3$ সংখ্যক ত্রিভুজের সবগুলিই কমিবে।

$\therefore$ সংখ্যাটি হইবে $= {}^nC_3 - {}^pC_3 = \frac{1}{6}[n(n-1)(n-2) - p(p-1)(p-2)].$

প্রশ্নমালা VI(E)

1. একটিতে 9 জন এবং অপরটিতে 6 জন সভ্য আছে এমন দুইটি দল একটি সভায় আছে। এই ব্যক্তিদের হইতে কতগুলি বিভিন্ন কমিটি গঠন করা যাইবে যাহাদের প্রত্যেকটিতে প্রথম দল হইতে 6জন এবং দ্বিতীয় দল হইতে 3 জন সভ্য থাকে? [উঃ 1680]

2. 18 জন মহিলা এবং 14 জন পুরুষের একটি সভা হইতে 3 জন করিয়া মহিলা এবং 4 জন করিয়া পুরুষ লইয়া কত প্রকারে একটি কমিটি নিয়োগ করা যাইবে? [উঃ 816816]

3. 6 জন পুরুষ এবং 4 জন মহিলার মধ্য হইতে 5 জনের একটি দল গঠন করা হইবে। অন্ততঃ একজন মহিলা অন্তর্ভুক্ত করিয়া উহা কত প্রকারে করা যাইবে? [উঃ 246]

4. 16 জন শিক্ষার্থীর একটি দলে 6 জন মহিলা শিক্ষার্থী আছে। এই দল হইতে কত প্রকারে 10 জন শিক্ষার্থীকে নির্বাচন করা যায় যাহাতে উহাদের মধ্যে অন্ততঃ 4 জন মহিলা শিক্ষার্থী থাকে? [উঃ 4872]

5. কোন নির্বাচনে (election) 5 জন প্রার্থী আছে এবং 3 জন সদস্য নির্বাচিত করিতে হইবে। যদি একজন ভোটদাতা যতজনকে নির্বাচন করিতে হইবে তাহার অনধিক যতজন প্রার্থীকে ইচ্ছা ভোট দিতে পারেন তবে তিনি কত রকমে ভোট দিতে পারিবেন? [উঃ 25]

6. দুইটি শূন্য আসনের জন্য 7 জন পুরুষ এবং 3 জন মহিলা নির্বাচনপ্রার্থী আছে। একজন ভোটদাতা যতগুলি আসন শূন্য তাহার অনধিক যতজনকে ইচ্ছা ভোট দিতে পারিলে তিনি কত প্রকারে ভোট দিতে পারিবেন? [উঃ 55]

7. 10 জন প্রার্থীর মধ্য হইতে 5 জনের একটি কমিটি কত প্রকারে নির্বাচন করা যায় যাহাতে (*i*) সর্বকনিষ্ঠ এবং সর্বজ্যেষ্ঠ উভয়েই থাকে (*ii*) সর্বজ্যেষ্ঠ থাকিলে সর্বকনিষ্ঠ থাকিবে না ? [উঃ (*i*) 56 ; (*ii*) 196]

8. 15 জন বালকের একটি দলে 7 জন বয়স্কাউট আছে। (*i*) ঠিক 6 জন বয়স্কাউট থাকিবে, (*ii*) অন্ততপক্ষে 6 জন বয়স্কাউট থাকিবে, এরূপে কত প্রকারে 12 জন বালককে নির্বাচন করা যায় ? [উঃ (*i*) 196 ; (*ii*) 252]

9. যথাক্রমে 6 জন এবং 8 জন খেলোয়াড়ের দুইটি দল হইতে মোট 11 জন খেলোয়াড়ের একটি ক্রিকেট দল নির্বাচন করিতে হইবে। 6 জন খেলোয়াড়ের দল হইতে যদি অন্ততপক্ষে 4 জন খেলোয়াড় লইতে হয়, তবে কত প্রকারে ঐ নির্বাচন করা যাইবে ? [উঃ 344]

10. A বিভাগে 5টি, B বিভাগে 4টি এবং C বিভাগে 3টি প্রশ্ন আছে। A বিভাগ হইতে 3টি, B বিভাগ হইতে 2টি এবং C বিভাগ হইতে একটি প্রশ্ন লইয়া কত প্রকারে তুমি 6টি প্রশ্ন নির্বাচন করিবে ? [উঃ 180]

11. দুইটি বিভাগে 5টি করিয়া মোট 10টি প্রশ্ন হইতে একজন পরীক্ষার্থীকে 6টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হইবে, কিন্তু কোন বিভাগ হইতে 4টির বেশী প্রশ্নের উত্তর দিতে পারিবে না। এইভাবে সে কত রকমে প্রশ্নগুলি নির্বাচন করিতে পারিবে ? [উঃ 200]

12. 7 জন ভারতীয় এবং 4 জন বিদেশীদের মধ্য হইতে 6 জনের একটি কমিটি গঠন করিতে হইবে ; ইহা কত প্রকারে করা যাইবে যদি (*i*) ঐ কমিটিতে ঠিক 2 জন বিদেশী থাকে, (*ii*) অন্ততপক্ষে 2 জন বিদেশী থাকে ? [উঃ (*i*) 210 ; (*ii*) 371]

13. একটি কাউন্সিলে একজন সভাপতি, দুইজন সহ সভাপতি এবং 12 জন অপর সদস্য আছেন। ঐ সভাপতি এবং একজন মাত্র সহ সভাপতি থাকিবেন এইরূপে 6 জনের কয়টি বিভিন্ন কমিটি গঠন করা যাইবে ? [উঃ 990]

14. 7টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 4টি স্বরবর্ণ হইতে 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 2টি স্বরবর্ণ লইয়া কতগুলি শব্দ গঠন করা যাইতে পারে ? [উঃ 25,200]

15. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 মার্কা দেওয়া 8টি Counter (গণনার জন্য ধাতব চাকতি) আছে। অন্তত একটি যুগ্ম এবং একটি অযুগ্ম থাকিবে এরূপভাবে একযোগে 4টি Counter লইয়া কতগুলি সমবায় করা যায় ? [উঃ 68]

16. অন্ততঃ 3 জন পুরুষ এবং 2 জন স্ত্রীলোক থাকিবে এরূপভাবে 6 জনের একটি কমিটি 10 জন পুরুষ এবং 7 জন স্ত্রীলোকের মধ্য হইতে নির্বাচন করা হইবে। যদি 2 জন বিশেষ স্ত্রীলোক একই কমিটিতে থাকিতে না চায় তবে ইহা কত প্রকারে করা যাইবে ? **[উঃ 7,800]**

17. 21টি ম্যাচের ফলাফলের (*WIN, LOSS OR DRAW*) ভবিষ্যদ্বাণী করিতে হইবে। কতগুলি বিভিন্ন পূর্বাভাসে ঠিক 18টি সঠিক ফল থাকিবে ?

[উঃ 10,640]

18. 10 জন পরীক্ষার্থী এক পরীক্ষায় প্রথম বিভাগে উত্তীর্ণ হইয়াছে। বিভিন্ন মূল্যের তিনটি বৃত্তি তাহাদের মধ্যে পরীক্ষায় তাহাদের অধিকৃত স্থানের বিবেচনা না করিয়া বিতরণ করা হইবে। কতগুলি বিভিন্ন বৃত্তির তালিকা করা যাইবে ? যদি বৃত্তিগুলি সমমূল্যের হইত তাহা হইলেই বা কতগুলি তালিকা করা যাইত ?

[উঃ 720 ; 120]

19. 15টি বাহুযুক্ত কোন ক্ষেত্রের কতগুলি কর্ণ টানা যায় ? [উঃ 90]

20. কোন সমতলে 10টি বিন্দু আছে, তন্মধ্যে 4টি বিন্দু একই সরলরেখার উপর অবস্থিত এবং বাকীগুলির কোন তিনটিই সমরেখ নহে। বিন্দুগুলি যোগ করিয়া কতগুলি ত্রিভুজ উৎপন্ন হইতে পারে ? [উঃ 116]

21. একটি আট দাঁড়যুক্ত নৌকার মাঝিদিগকে কত প্রকারে সাজান যাইবে ;

(*i*) যদি মাঝিদের 4 জন নৌকায় কেবল stroke sideএ দাঁড় টানিতে পারে ;

(*ii*) যদি মাঝিদের 3 জন নৌকায় কেবল stroke sideএ এবং 2 জন কেবল bow sideএ দাঁড় বাহিতে পারে ? [উঃ (*i*) 576 ; (*ii*) 1728]

22. প্রমাণ কর যে ${}^{2n}C_n$ এ একটি নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদা থাকিবে এরূপ সমবায়ের সংখ্যা, ঐ নির্দিষ্ট বস্তুটি কখনও থাকিবে না এরূপ সমবায় সংখ্যার সমান।

6·11. সমবায়ের মোট সংখ্যা

(*i*) বস্তুগুলি সকলেই বিভিন্ন হইলে

প্রদত্ত n সংখ্যক বস্তুর কয়েকটি বা সবগুলি লইয়া একটি নির্বাচন কত প্রকারে করা সম্ভব তাহার সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে অর্থাৎ—

${}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \cdots + {}^nC_n$ এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রত্যেকটি বস্তুকে লইয়া দুই প্রকার প্রক্রিয়া করা যাইতে পারে, বস্তুটি গ্রহণ করা যাইতে পারে বা পরিত্যক্ত হইতে পারে ; যে কোন একটি বস্তু সম্পর্কে যে কোন একটি প্রক্রিয়া অপর যে-কোন বস্তু সম্পর্কে এক একটি প্রক্রিয়ার সহিত যুক্ত করা যায় বলিয়া n সংখ্যক বস্তু সম্পর্কে যতগুলি প্রক্রিয়া সম্ভব তাহার সংখ্যা $= 2 \times 2 \times 2 \cdots n$ উৎপাদক পর্যন্ত।

কিন্তু ইহার মধ্যে একটি প্রক্রিয়া থাকিয়া যায় যে প্রক্রিয়াটিতে সকল বস্তুই পরিত্যক্ত হইয়াছে, অতএব ঐ প্রক্রিয়াটিকে না ধরিয়া মোট সমবায় সংখ্যা $=2^n-1$.

ইহাকে সচরাচর n সংখ্যক বস্তুর মোট সমবায় সংখ্যা বলে।

উদা. এক পিতা তাঁহার 5 পুত্রের এক বা একাধিক জনকে লইয়া কত প্রকারে মেলায় যাইতে পারেন ?

পুত্রগুলিকে 1 জন, 2 জন, 3 জন, 4 জন বা 5 জন করিয়া লইয়া যাইতে পারা যায়। সুতরাং নির্ণেয় প্রকার সংখ্যা $= {}^5C_1+{}^5C_2+{}^5C_3+{}^5C_4+{}^5C_5$

$$=2^5-1=31.$$

(ii) বস্তুগুলির সব কয়টি বিভিন্ন না হইলে

$p+q+r+\cdots$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর মধ্যে p সংখ্যক একপ্রকার অভিন্ন বস্তু, q সংখ্যক অন্য প্রকার অভিন্ন বস্তু, r সংখ্যক অন্য আর এক প্রকার অভিন্ন বস্তু... ইত্যাদি আছে। উহাদের যতগুলিকে ইচ্ছা একযোগে লইয়া মোট সমবায়ের সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে।

p সংখ্যক বস্তুর ব্যবস্থা $(p+1)$ প্রকারে করা যাইতে পারে ; উহাদের 1, 2, 3, $\cdots p$টি লওয়া যাইতে পারে আবার একটিও না লওয়া যাইতে পারে। অনুরূপ q সংখ্যক বস্তুর ব্যবস্থা $(q+1)$ প্রকারে, r সংখ্যক বস্তুর ব্যবস্থা $(r+1)$ প্রকারে করা যাইতে পারে ; এইরূপ বাকী বস্তুগুলিরও ব্যবস্থা করা যাইতে পারে।

$\therefore$ যত প্রকারে বস্তুগুলি সম্পর্কে ব্যবস্থা গ্রহণ করা যাইতে পারে তাহার সংখ্যা

$$=(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots$$

কিন্তু ইহার একটি ক্ষেত্র আছে যে ক্ষেত্রে একটি বস্তুকেও লওয়া হয় নাই ; অতএব এই ক্ষেত্রটি বাদ দিয়া মোট সমবায় সংখ্যা

$$=\{(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\}-1.$$

উদা. 15টি ফল, যথা 8টি আম, 5টি আপেল এবং 2টি কমলা আছে ; কয়েকটি বা সবকয়টি ফল লইয়া কত প্রকারের নির্বাচন করা যাইবে ?

মোট 15টি ফল আছে ; এই 15টি ফলের মধ্যে 8টি এক রকমের, 5টি অন্য রকমের, 2টি আর এক রকমের ;

$\therefore$ নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $=(8+1)(5+1)(2+1)-1=9.6.3-1=161.$

6·12. বিভিন্ন দলে বিভাজন

(i) $(m+n)$ বস্তুকে কত প্রকারে এরূপ দুই ভাগে বিভক্ত করিতে পারা যায় যাহাতে ভাগ দুইটিতে যথাক্রমে m এবং n বস্তু থাকে।

স্পষ্টতই ইহা $(m+n)$ বস্তু হইতে একযোগে m বস্তু লইয়া সমবায় সংখ্যা নির্ণয় করার সামিল কারণ m বস্তুর একটি ভাগ নির্বাচন করিলে n বস্তুর অপর ভাগটি পড়িয়া থাকে।

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় সংখ্যা} = {}^{m+n}C_m = \frac{\lfloor m+n}{\lfloor m \, \lfloor n}.$$

দ্রষ্টব্য ঃ $m=n$ হইলে, দল বা ভাগগুলি সমান হইবে এবং এরূপক্ষেত্রে যত প্রকার বিভাগ (Subdivision) করা সম্ভব তাহার সংখ্যা $=\frac{1}{2}\cdot\frac{\lfloor 2m}{\lfloor m \, \lfloor m}$.

কারণ যে কোন একটি প্রক্রিয়াতে ভাগগুলি (groups) অদল-বদল করা যায় যাহার ফলে কোন নূতন সমবায় পাওয়া যায় না।

(*ii*) $(m+n+p)$ বস্তুকে কত প্রকারে তিন ভাগে বিভক্ত করা যায় যাহাতে ভাগগুলিতে যথাক্রমে m, n এবং p বস্তু থাকে?

প্রথমে $(m+n+p)$ বস্তুকে দুইটি ভাগে বিভক্ত করা যায় যাহাতে ভাগ দুইটিতে যথাক্রমে m এবং $(n+p)$ বস্তু থাকে; ইহা যত প্রকারে করা যায় তাহার সংখ্যা $= {}^{m+n+p}C_m = \frac{\lfloor m+n+p}{\lfloor m \, \lfloor n+p}$.

আবার $(n+p)$ বস্তু যত প্রকারে যথাক্রমে n এবং p বস্তুর দুইটি ভাগে (groups) বিভক্ত করা যায় তাহার সংখ্যা $= {}^{n+p}C_n = \frac{\lfloor n+p}{\lfloor n \, \lfloor p}$.

অতএব যত প্রকারে বস্তুগুলিকে m, n, p বস্তুবিশিষ্ট তিনটি ভাগে বিভক্ত করা যায় তাহার সংখ্যা $= \frac{\lfloor m+n+p}{\lfloor m \, \lfloor n+p} \times \frac{\lfloor n+p}{\lfloor n \, \lfloor p} = \frac{\lfloor m+n+p}{\lfloor m \, \lfloor n \, \lfloor p}$.

দ্রষ্টব্য ঃ $m=n=p$ ধরিলে ঐ প্রক্রিয়ার সংখ্যা হয় $\frac{\lfloor 3m}{(\lfloor m)^3}$.

কিন্তু এই সূত্রানুসারে যে কোন একটি বিভাজন প্রক্রিয়ায় ভাগ (group) তিনটি সম্ভাব্য যত প্রকার ক্রমে থাকিতে পারে তাহাদের সবগুলিকেই বিভিন্ন বলিয়া গণ্য করা হয়। যেহেতু প্রত্যেক প্রকারের বিভাজনের ক্ষেত্রে $\lfloor 3$ সংখ্যক এরূপ ক্রম থাকে যেগুলিকে অদল-বদল করিলে নূতন কোন সমবায় পাওয়া যায় না, বিভিন্ন যত প্রকারে বস্তুগুলিকে তিনটি সমান ভাগে বিভক্ত করা যায় তাহার সংখ্যা $= \frac{1}{\lfloor 3} \cdot \frac{\lfloor 3m}{(\lfloor m)^3}$.

নিম্নের উদাহরণটি হইতে নীতিটি স্পষ্ট বুঝা যাইবে :

উদা. : যত প্রকারে 15 জন ছাত্রকে সমানভাবে 3টি দলে বিভক্ত করা যায় তাহার সংখ্যা $=\dfrac{15!}{3!5!5!5!}=1,26,126.$

কিন্তু যত প্রকারে 15টি আপেল 3 জন ছাত্রের মধ্যে সমানভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া যায় তাহার সংখ্যা $=\dfrac{15!}{5!5!5!}=3,78,378.$

6·13. বিবিধ উদাহরণ

উদা. 1. (*a*) একটি পরীক্ষায় পাশের জন্য ছয়টি বিষয়ের প্রত্যেকটিতে একটি ন্যূনতম নম্বর পাইতে হইবে। কত প্রকারে একটি ছাত্র ফেল করিতে পারে ?

(*b*) 9টি ফল, যথা 3টি নারিকেল, 4টি আপেল এবং 2টি কমলা আছে। কয়েকটি বা সবকয়টি ফল লইয়া কত প্রকারের নির্বাচন করা যাইবে ?

(*a*) **প্রথম পদ্ধতি :** ছাত্রটি একটি, দুইটি, তিনটি,···বা ছয়টি বিষয়ে ফেল করিলে তাহাকে ফেল বলিয়া গণ্য করা হইবে।

∴ নির্ণেয় সংখ্যা $={}^6C_1+{}^6C_2+{}^6C_3+{}^6C_4+{}^6C_5+{}^6C_6=63.$

দ্বিতীয় পদ্ধতি : একটি বিষয়, যথা গণিত ধরা যাউক। এই বিষয়টিতে সে ফেল করিতে পারে বা ফেল না করিতে পারে। অতএব ইহার মীমাংসার দুইটি প্রকার আছে। অনুরূপে দ্বিতীয় বিষয়, যথা ইংরাজী, তৃতীয় বিষয় ··· ইত্যাদি প্রত্যেকটি বিষয়ের জন্য দুইটি করিয়া মীমাংসার প্রকার আছে।

∴ 6টি বিষয়ের জন্য মীমাংসার প্রকার সংখ্যা

$$=2\times2\times2\times2\times2\times2=2^6.$$

কিন্তু ইহাদের মধ্যে যেক্ষেত্রে সে সব বিষয়েই পাশ করিয়াছে সেটিও আছে।

∴ যত প্রকারে একটি ছাত্র ফেল করিতে পারে তাহার সংখ্যা $=2^6-1=63.$

দ্রষ্টব্য : মনে রাখিতে হইবে,

$${}^nC_1+{}^nC_2+{}^nC_3+\cdots+{}^nC_n=2^n-1.$$

(*b*) বিভিন্ন প্রকার নির্বাচন করিতে 3টি নারিকেল $3+1=4$ প্রকারে বিবেচিত হইতে পারে, কারণ 1, 2, 3টি নারিকেল লওয়া যাইতে পারে বা একটিও না লওয়া যাইতে পারে। অনুরূপভাবে 4টি আপেল 5 প্রকারে এবং 2টি কমলা 3 প্রকারে বিবেচিত হইতে পারে। ∴ যেক্ষেত্রে একটি ফলও লওয়া হইবে না সেইক্ষেত্রটি বিবেচনা করিয়া ফলগুলি যত প্রকারে নির্বাচন করা যায় তাহার সংখ্যা $=4.5.3-1=59.$

প্রয়োজনীয় মন্তব্য : এখানে ধরিয়া লওয়া হইয়াছে যে একই প্রকার ফলের সবগুলি একই আকারের। অবশ্য যদি উহারা বিভিন্ন আকৃতির হয় তবে (*a*)র ক্ষেত্রে

ব্যবহৃত সূত্রের প্রয়োগ করিতে হইবে এবং তখন নির্ণেয় নির্বাচন সংখ্যা হইবে $(2^3-1)\times(2^4-1)\times(2^2-1)=7\times15\times3=315.$

উদা. 2. (*a*) 4 জন তাস খেলোয়াড় কত প্রকারের হাত পাইতে পারে (প্রতিটি 13 খানি তাসের)?

(*b*) 52টি তাস হইতে কত প্রকারে 13টি করিয়া 4টি ভাগে রাখা যায়?

(*a*) প্রথম খেলোয়াড় $^{52}C_{13}$ হাত পাইতে পারে। ইহার প্রত্যেকটির জন্য দ্বিতীয় খেলোয়াড় $^{39}C_{13}$ হাত পাইবে; এবং এইরূপে এই দুইজন $^{52}C_{13}\times{}^{39}C_{13}$ বিভিন্ন হাত পাইতে পারে। এই একই ভাবে একের পর এক অপর দুই খেলোয়াড়ের কথা বিবেচনা করিলে মোট $^{52}C_{13}\times{}^{39}C_{13}\times{}^{26}C_{13}\times{}^{13}C_{13}=\dfrac{\underline{|52}}{\underline{|13}\;\underline{|13}\;\underline{|13}\;\underline{|13}}$ বিভিন্ন হাত পাওয়া যাইবে। টেবিলের উপর হাতগুলি যে ক্রমে রাখা হয় সেদিকে লক্ষ্য রাখিতে হইবে।

(*b*). (*a*) ক্ষেত্রে ভাগ 4টি একটি প্রদত্ত ক্রমে থাকে ধরিয়া লওয়া হয়। যদি ভাগ 4টি যে ক্রমে থাকে তাহা যদি অপ্রয়োজনীয় বলিয়া বিবেচনা করা হয়, যেমন এই ক্ষেত্রে তাহা হইলে প্রত্যেক প্রকারের বিভাজনের বেলায় এরূপ $\underline{|4}$ সংখ্যক ক্রম হয় বলিয়া, প্রত্যেক $\underline{|4}$ প্রকারের বিভাজনের জন্য বাস্তব ক্ষেত্রে এক রকমেরই বিভাজন প্রক্রিয়া হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা হইবে $\dfrac{\underline{|52}}{(\underline{|13})^4}\div\underline{|4}.$

উদা. 3 *MULTIPLE* শব্দটির অক্ষরগুলিকে স্বরবর্ণের ক্রম অপরিবর্তিত রাখিয়া কত প্রকারে পুনর্বিন্যস্ত করা যায়?

এখানে আছে 8টি অক্ষর যাহাদের মধ্যে 2টি *L* আর বাকীগুলি বিভিন্ন। যদি যে কোন একটি বিন্যাসে *UIE* স্বরবর্ণগুলির ক্রম অপরিবর্তিত রাখিতে হয় তবে উহাদের সদৃশ অক্ষররূপে গণ্য করিতে হইবে।

$\therefore$ অক্ষরগুলির বিন্যাসের মোট সংখ্যা $=\dfrac{\underline{|8}}{\underline{|2}\,\underline{|3}}=3360.$

এটি পুনর্বিন্যাসের প্রশ্ন সুতরাং (*MULTIPLE* শব্দটি একটি বিন্যাস বলিয়া) নির্ণেয় সংখ্যা $=3360-1=3359.$

উদা. 4. [সকল বস্তু বিভিন্ন নহে এরূপ n সংখ্যক বস্তু হইতে একযোগে rটি করিয়া গৃহীত বস্তুর বিন্যাস সংখ্যা বা সমবায় সংখ্যার সাধারণ সূত্রের আকার জটিল। কিন্তু এই প্রকার প্রশ্নের সমাধান বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে কি পদ্ধতিতে করা যাইতে পারে তাহা নিম্নে প্রদত্ত দৃষ্টান্তটি হইতে বুঝিতে পারা যাইবে।]

PROPORTION শব্দটির অক্ষরগুলি হইতে চারিটি অক্ষর লইয়া কত প্রকারের (*i*) নির্বাচন (বা সমবায়), (*ii*) সজ্জিতকরণ (বা বিন্যাস) করা যায় তাহা নির্ণয় কর।

এখানে ছয়টি বিভিন্ন প্রকারের 10টি অক্ষর আছে, যথা :

$$O, O, O\ ;\ P, P\ ;\ R, R\ ;\ T\ ;\ I\ ;\ N.$$

চারিটি অক্ষরের দল গঠনের সময় অক্ষরগুলিকে নিম্নপ্রকারে শ্রেণীবিভক্ত করা যায় :

(1) তিনটি অক্ষর এক প্রকার, আর একটি ভিন্ন প্রকারের

(2) দুইটি এক প্রকার, অপর দুইটি আর এক প্রকার

(3) দুইটি এক প্রকার, অপর দুইটি ভিন্ন প্রকারের

(4) চারিটি অক্ষরই পরস্পর ভিন্ন প্রকার।

(*i*) ইহাদের প্রতি ক্ষেত্রে নির্বাচন সংখ্যা নির্ণয় সম্পর্কে এখন আলোচনা করা যাক্।

(1) এখানে নির্বাচন সংখ্যা 5, কারণ তিনটি এক প্রকার অক্ষর O এর একক দলটির সহিত P, R, T, I, N এই পাঁচটি বিভিন্ন অক্ষরের প্রত্যেকটিকে পর পর পাঁচ প্রকারে যুক্ত করা যায়।

(2) এখানে নির্বাচন ${}^3C_2$ প্রকার, কারণ O, O , P, P ; R, R এই তিন জোড়া হইতে যে কোন দুই জোড়া মনোনীত করিতে হইবে। সুতরাং এই নির্বাচন সংখ্যা 3.

(3) এই নির্বাচন 3×10 প্রকার, কারণ ঐ তিন জোড়া হইতে এক জোড়া লইয়া অবশিষ্ট 5টি বিভিন্ন অক্ষর হইতে দুইটি লইতে হইবে (যেমন, O, O এই এক জোড়া যদি লওয়া হয়, তবে অবশিষ্ট 5টি অক্ষর P, R, T, I, N থাকে)। সুতরাং এইরূপ নির্বাচন সংখ্যা 30.

(4) এইরূপ নির্বাচন ${}^6C_4$ প্রকারে করা যায়, কারণ এখানে O, P, R, T, I, N এই ছয়টি বিভিন্ন অক্ষর হইতে যে কোন চারিটি নির্বাচন করিতে হইবে। এই নির্বাচন সংখ্যা $= 15$.

$\therefore$ সমগ্র নির্বাচন সংখ্যা $= 5 + 3 + 30 + 15 = 53$.

(*ii*) চারিটি অক্ষরের বিভিন্ন বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করিতে উপরের বিভিন্ন দলের প্রত্যেকটির অক্ষর চারটিকে সম্ভাব্য সকল প্রকারে সাজাইতে হইবে। সুতরাং

(1) হইতে প্রাপ্ত বিন্যাস সংখ্যা $= 5 \times \frac{\lfloor 4}{\lfloor 3}$ বা 20

(2) হইতে প্রাপ্ত বিন্যাস সংখ্যা $= 3 \times \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2 \times \lfloor 2}$ বা 18

(3) হইতে প্রাপ্ত বিন্যাস সংখ্যা $= 30 \times \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2}$ বা 360

(4) হইতে প্রাপ্ত বিন্যাস সংখ্যা $= 15 \times \lfloor 4$ বা 360

$\therefore$ সমগ্র বিন্যাস সংখ্যা $= 20 + 18 + 360 + 360 = 758$.

প্রশ্নমালা VI(F)

1. আটটি প্রশ্ন দেওয়া হইয়াছে ; আবার প্রত্যেক প্রশ্নের একটি করিয়া বিকল্প প্রশ্ন দেওয়া হইয়াছে। দেখাও যে কোন ছাত্র বা ছাত্রী এইগুলি হইতে একটি বা একাধিক প্রশ্নের উত্তর দিতে পারে $3^8 - 1$ প্রকারে।

2. (*a*) 6টি বিভিন্ন বস্তুকে কত প্রকারে এমন দুইভাগে বিভক্ত করা যায় যাহাতে একটিতে 2টি এবং অপরটিতে 4টি থাকিবে ? [উঃ 15]

(*b*) 6টি বিভিন্ন বস্তুকে কত প্রকারে 2টি সমান ভাগে বিভক্ত করা যায় ? [উঃ 10]

(*c*) 6টি বিভিন্ন বস্তুকে কত প্রকারে 2টি বালকের মধ্যে সমানভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া যায় ? [উঃ 5]

3. পাঁচটি বস্তু দুই ব্যক্তির মধ্যে কত প্রকারে ভাগ করিয়া দেওয়া যায় ? [উঃ 30]

4. 12টি আপেল কত প্রকারে 4 জন বালকের মধ্যে সমানভাবে বণ্টন করা যায় ? [উঃ 369600]

5. 22 জন ক্রিকেট খেলোয়াড়কে কত প্রকারে দুইটি দলে ভাগ করা যায়, যাহাতে প্রতি দলে 11 জন থাকে ? [উঃ $\frac{1}{2}(22!)/(11!)^2$]

6. *PARNECIOUS* শব্দটির অক্ষরগুলিকে কত প্রকারে সাজান যায়, যাহাতে স্বরবর্ণগুলির ক্রম অপরিবর্তিত থাকে ? [উঃ 30239]

7. 1000 অপেক্ষা কম এবং 5 দ্বারা সম্পূর্ণ বিভাজ্য এইরূপ কতগুলি সংখ্যা 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, এই অঙ্কগুলি হইতে কোন অঙ্কের পুনরাবৃত্তি ব্যতিরেকে গঠন করা যায় ? [উঃ 154]

8. চারিটি চিঠি লেখা হইল এবং চারিটি খামের উপর ঠিকানা লেখা হইল। এখন সব চিঠি কত প্রকারে ভুল খামে পাঠান যাইতে পারে যাহাতে কোন চিঠিই উচিত ঠিকানায় পৌছাইবে না ? [উঃ 9]

9. 10টি বিভিন্ন অক্ষর হইতে 7টি করিয়া লইয়া বিন্যাস করিলে উহাদের কতগুলিতে 3টি বিশেষ অক্ষর থাকিবে ? [উঃ 176400]

10. (*i*) *EXPRESSION*; (*ii*) *EXAMINATION* এই শব্দ দুইটির প্রত্যেকটির অক্ষরগুলি হইতে 4টি করিয়া লইয়া কত প্রকার নির্বাচন এবং বিন্যাস করা যায় তাহা নির্ণয় কর। [উঃ (*i*) 113, 2190 ; (*ii*) 136, 2454]

11. 'daddy did a deadly deed'—এই বাক্যটির অক্ষরগুলির সাহায্যে যত প্রকার নির্বাচন করা যায় তাহাদের মোট সংখ্যা যে 1919, ইহা প্রমাণ কর।

12. একটি তহবিলএ এক টাকার 5টি মুদ্রা, 25 পয়সার 6টি মুদ্রা এবং 10 পয়সার 7টি মুদ্রা আছে ; ইহা হইতে কত প্রকার বিভিন্ন মূল্যের অর্থ লওয়া যায় ? [উঃ 335]

13. 5টি বিভিন্ন রঙের মোট 20টি পতাকা আছে এবং প্রতি প্রকার রঙের পতাকা 4টি। যদি 4টি পতাকার সাহায্যে একটি 'সিগন্যাল' (signal) প্রস্তুত করা যায় তবে ঐ 20টি পতাকা হইতে কতগুলি বিভিন্ন 'সিগন্যাল' প্রস্তুত করা যাইবে ? [উঃ 625]

14. মানুষের সংখ্যা m, বাঁদরের সংখ্যা n এবং n, m অপেক্ষা বৃহত্তর। যদি কোন একজন মানুষের যে কোন সংখ্যক বাঁদর থাকা সম্ভব হয় তবে প্রত্যেক বাঁদরের কত প্রকারের একজন প্রভু থাকিতে পারে ? [উঃ n^m]

7

দ্বিপদ উপপাদ্য ঃ ধনাত্মক অখণ্ড সূচক

(THE BINOMIAL THEOREM : POSITIVE INTEGRAL INDEX)

7·1. সূচনা

দুইটি পদ (ax এবং b) এর সমন্বয়ে গঠিত $ax+b$ আকারের রাশিকে **দ্বিপদ রাশি** (Binomial expression) বলা হয়। কোন দ্বিপদ রাশিকে কোন ধনাত্মক অখণ্ড ঘাতে উন্নীত করিলে যে সূত্রের সাহায্যে উহাকে একটি সসীম সংখ্যক পদের শ্রেণীরূপে প্রকাশ করা যায় তাহাকে **ধনাত্মক অখণ্ড ঘাতের বা সূচকের দ্বিপদ উপপাদ্য** বলা হয়। এই সূত্রটি Sir Issac Newton (1642-1727 এর অবদান। এই অধ্যায়ে উপপাদ্যটি প্রমাণ করা হইবে এবং যাহারা **দ্বিপদ সহগ** (Binomial coefficients) বলিয়া অভিহিত হয় তাহাদের ধর্মগুলি আলোচনা করা হইবে।

7·2. ধনাত্মক অখণ্ড সূচকের ক্ষেত্রে দ্বিপদ উপপাদ্য (The Binomial Theorem for Positive Integral Index)

যদি n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে

I. $(x+a)^n = x^n + {}^nC_1 x^{n-1}a + {}^nC_2 x^{n-2}a^2 + \cdots + {}^nC_r x^{n-r}a^r + \cdots$
$\cdots + {}^nC_{n-1} x a^{n-1} + {}^nC_n a^n.$

$$= x^n + nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}a^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1.2.3.\cdots r}x^{n-r}a^r + \cdots$$

$$\cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2}{1.2.\cdots(n-1)}xa^{n-1} + a^n.$$

[x এবং a যে কোনও মান গ্রহণ করিতে পারে।]

টীকা। কেহ কেহ ${}^nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}$ লিখিয়া থাকেন।

II. সুতরাং, $(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \cdots \binom{n}{r}x^{n-r}a^r + \cdots$
$+ \binom{n}{n-1}xa^{n-1} + \binom{n}{n}a^n.$

III. সিগ্‌মা (sigma) অঙ্কপাতন (notation) অনুসারে,

$$(x+a)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^{n-r} a^r \text{ (লক্ষ্য কর : } {}^nC_0=1, {}^nC_n=1)$$

$$\text{বা,} \quad = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} a^r.$$

$(x+a)^n$ এর বিস্তৃতির উপরের তিনটি আকারের যে কোন একটিকেই ধনাত্মক সূচকের জন্য দ্বিপদ উপপাদ্য বলা হয়।

টীকা। $(x-a)^n$ এর বিস্তৃতি নির্ণয়ের জন্য লিখিতে পারা যায় যে $(x-a)^n = \{x+(-a)\}^n$ এবং এখন উপরে প্রদত্ত আকার তিনটির যে কোন একটির সাহায্য লইতে পারা যায়। উপপাদ্যটির রীতি-সিদ্ধ প্রমাণের পূর্বে পদগুলির গঠন পদ্ধতি অনুধাবন করা যাক্। ইহা লক্ষ্য করা যাইবে যে :

1. $(x+a)^n$ এর বিস্তৃতিতে পদের সংখ্যা হইল $n+1$, অর্থাৎ ঘাত সূচক n অপেক্ষা একটি বেশী পদ।

2. প্রথম পদের সহগ ${}^nC_0=1$; শেষ পদের সহগ ${}^nC_n=1$; প্রকৃতপক্ষে প্রথম পদ x^n এবং শেষ পদ a^n.

3. দ্বিতীয় পদ $= {}^nC_1 x^{n-1} a$; তৃতীয় পদ $= {}^nC_2 x^{n-2} a^2$, ইত্যাদি, ইত্যাদি।

সাধারণভাবে, $(r+1)$তম পদ [ইহাকে বিস্তৃতিটির **সাধারণ পদ** (**General term**) ও বলা হয়] $= {}^nC_r\, x^{n-r} a^r$.

উদাহরণস্বরূপ,

(i) $(a+b)^{12}$ এর দ্বিপদ বিস্তৃতির 7ম পদ হইল ${}^{12}C_6 a^{12-6}.b^6$.

(ii) $(x-\frac{1}{x})^{20}$ এর বিস্তৃতির 8ম পদ হইল

$$ {}^{20}C_7 x^{20-7} (-\tfrac{1}{x})^7$$

$$= -\frac{20.19.18.17.16.15.14}{1.2.3.4.5.6.7} x^{13}.\frac{1}{x^7}$$

$$= -(19.17.16.15)x^6 = -77520x^6.$$

টীকা। ${}^nC_0$, C_1, ${}^nC_2$, $\cdots$, ${}^nC_r$, $\cdots$ ${}^nC_n$ প্রভৃতি সহগগুলিকে $(x+a)^n$ এর বিস্তৃতির দ্বিপদ সহগ বলা হয়। (অনুচ্ছেদ 7·4 দ্রষ্টব্য।)

IV. মধ্যম পদ বা পদসমূহ (Middle term or terms)

(i) $(a+b)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে 13টি পদ আছে। প্রথম 6টি পদ এবং শেষ 6টি পদ বাদ দিলে অবশিষ্ট থাকে 7ম পদটি—ইহাই হইল ঐ বিস্তৃতিতে **মধ্যম পদ**,

অর্থাৎ মধ্যম পদ $= {}^{12}C_6 a^6 b^6$.

(*ii*) আরও সাধারণভাবে বলিলে, সূচক যদি ধনাত্মক যুগ্ম সংখ্যা, ধরা যাক $2m$ হয়, তবে মধ্যম পদ হইবে $(m+1)$তম পদ।

(*iii*) $(a+b)^{13}$এর বিস্তৃতিতে মোট 14টি পদ আছে। শুরু এবং শেষ উভয় প্রান্ত হইতে বৃহত্তম ও সমসংখ্যক পদ বাদ দিলে যে পদগুলি অবশিষ্ট থাকে, তাহারাই হইল **মধ্যম পদ**।

সুতরাং শুরু ও শেষ উভয় প্রান্ত হইতে 6টি করিয়া পদ বাদ দেওয়া হইলে অবশিষ্ট পদ, অর্থাৎ 7ম এবং 8ম পদ দুইটি, হইল মধ্যম পদ ; অতএব মধ্যম পদ দুইটি হইল ${}^{13}C_6a^7b^6$ এবং ${}^{13}C_7a^6b^7$.

(*iv*) আরও সাধারণভাবে, সূচক যদি ধনাত্মক অযুগ্ম সংখ্যা, ধরা যাক $(2m+1)$ হয়, তবে দুইটি মধ্যম পদ হইবে এবং উহারা $(m+1)$তম ও $(m+2)$তম পদ।

(*v*) ধরা যাক, $(a+b)^k$, (যেখানে k যে কোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা), এর দ্বিপদ বিস্তৃতিতে মধ্যম পদ নির্ণয় করিতে হইবে। এস্থলে দুইটি ক্ষেত্রের উদ্ভব হইতে পারে, যথা : k অযুগ্ম ধনাত্মক সংখ্যা হইতে পারে, যেখানে মনে করা যাক $k=2n+1$ (n হইল যে কোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা), অথবা k যুগ্ম ধনাত্মক সংখ্যা, ধরা যাক $k=2n$, হইতে পারে।

ক্ষেত্র 1. যখন $k=2n+1$, তখন বিস্তৃতিতে পদের সংখ্যা $2n+2$; উভয় প্রান্ত হইতে nটি করিয়া পদ বাদ দেওয়া হইলে মধ্যে অবশিষ্ট থাকে দুইটি পদ, যথা : $(n+1)$তম এবং $(n+2)$তম পদ। এই দুইটিই হইল এক্ষেত্রে **দুইটি মধ্যম পদ।**

যেহেতু $n=(k-1)/2$, সুতরাং বলা যায় যে

$$(n+1)\text{তম পদ}=\tfrac{k+1}{2}\text{তম পদ}={}^kC_{\frac{k-1}{2}}a^{\frac{k+1}{2}}b^{\frac{k-1}{2}}$$

এবং $(n+2)\text{তম পদ}=\tfrac{k+3}{2}\text{তম পদ}={}^kC_{\frac{k+1}{2}}a^{\frac{k-1}{2}}b^{\frac{k+1}{2}}$, হইল নির্ণেয় দুইটি মধ্যম পদ।

ক্ষেত্র 2. যখন $k=2n$, তখন বিস্তৃতিতে পদের সংখ্যা $2n+1$; উভয় প্রান্ত হইতে nটি করিয়া পদ বাদ দিলে মধ্যে অবশিষ্ট থাকে **কেবলমাত্র একটি পদ**, যথা: $(n+1)$তম পদ এবং এক্ষেত্রে ইহাই হইল মধ্যম পদ। যেহেতু $n=k/2$, সুতরাং বলা যায় যে

$(n+1)\text{তম পদ}=(\tfrac{k}{2}+1)\text{তম পদ}={}^kC_{\frac{k}{2}}a^{k/2}b^{k/2}$, হইল এক্ষেত্রে নির্ণেয় মধ্যম পদ।

উদা. 1. $(x-\frac{1}{x})^{2m+1}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যম পদ দুইটি হইল :

$$(m+1)\text{তম পদ} = {}^{2m+1}C_m x^{m+1}(-\tfrac{1}{x})^m$$

$$= (-1)^m\, {}^{2m+1}C_m x = (-1)^m \frac{\lfloor 2m+1}{\lfloor m \lfloor m+1} \cdot x.$$

এবং $(m+2)$তম পদ $= {}^{2m+1}C_{m+1}x^m(-\frac{1}{x})^{m+1}$

$$= (-1)^{m+1}\, {}^{2m+1}C_{m+1} \cdot \tfrac{1}{x}$$

$$= (-1)^{m+1} \cdot \frac{\lfloor 2m+1}{\lfloor m+1 \lfloor m} \frac{1}{x}.$$

উদা. 2. $(x+\frac{1}{x})^{2m}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যম পদটি হইল :

$$(m+1)\text{তম পদ} = {}^{2m}C_m x^m(\tfrac{1}{x})^m = {}^{2m}C_m$$

$$= \frac{\lfloor 2m}{\lfloor m \lfloor m} = \frac{2^m \lfloor m\{1.3.5.\cdots(2m-1)\}}{\lfloor m \lfloor m}$$

$$= \frac{2^m\{1.3.5.7.\cdots(2m-1)\}}{\lfloor m}.$$

টীকা। $\lfloor 2m = 1.2.3.4.5.6.7.\cdots(2m-2)(2m-1)2m$

$$= \{1.3.5.7.\cdots(2m-1)\} \times \{2.4.6.\cdots(2m-2)2m\}$$
$$= \{1.3.5.7.\cdots(2m-1)\} \times \{2.1.2.2.2.3\cdots2(m-1).2.m\}$$
$$= \{1.3.5.7.\cdots(2m-1)\} \times 2^m\{1.2.3.\cdots(m-1)m\}$$
$$= 2^m \lfloor m\{1.3.5.7.\cdots(2m-1)\}.$$

V. x বর্জিত পদ (Term Independent of x) :

ধরা হইল, $\left(3x-\dfrac{5}{x^3}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ নির্ণয় করিতে হইবে।

সাধারণ পদ, অর্থাৎ, $(r+1)$তম পদ, লইয়া শুরু করা হইল।

এখানে $(r+1)$তম পদ $= {}^8C_r(3x)^{8-r}\left(-\dfrac{5}{x^3}\right)^r$

$$= (-1)^r\, {}^8C_r.3^{8-r}.5^r.x^{8-r-3r}$$
$$= (-1)^r\, {}^8C_r.3^{8-r}.5^r.x^{8-4r}.$$

লক্ষ্য করা হইল যে x এর ঘাত $=8-4r$; x বর্জিত পদ নির্ণয় করিতে হইলে r এর এমন মান লওয়া আবশ্যক যেন $8-4r=0$ হয়, অর্থাৎ $r=2$ লইতে হইবে। অন্য কথায়, তৃতীয় পদটিই হইল নির্ণেয় পদ, যাহা x বর্জিত হইবে।

সুতরাং নির্ণেয় পদ $=(-1)^2\ {}^8C_2.3^{8-2}.5^2.x^0.$

$$=\frac{8.7}{2.1}.3^6.5^2=700\times3^6.$$

বিকল্প পদ্ধতি। নিম্নলিখিত প্রকারে অগ্রসর হওয়া যাইতে পারে :

$$\left(3x-\frac{5}{x^3}\right)^8=\frac{(3x^4-5)^8}{x^{24}}$$

$\left(3x-\frac{5}{x^3}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ এবং $(3x^4-5)^8$ এর বিস্তৃতিতে যে পদে x^{24} থাকিবে তাহারা একই পদ। সুতরাং $(3x^4-5)^8$ এর বিস্তৃতিতে যে পদে x^{24} আছে তাহা নির্ণয় করা যাক্। এস্থলেও সাধারণ পদটি প্রথমে জানা আবশ্যক :

$$(r+1)\text{তম পদ}={}^8C_r(3x^4)^{8-r}(-5)^r$$

$$=(-1)^r\,{}^8C_r3^{8-r}.5^r.x^{32-4r}$$

এখন $32-4r=24$ ধরিয়া $r=2$ পাওয়া যায়।

$\therefore$ $(3x^4-5)^8$এর বিস্তৃতির 3য় পদে x^{24} বর্তমান।

সুতরাং $\left(3x-\frac{5}{x^3}\right)^8$এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটি হইল

$$\frac{(-1)^2\ {}^8C_2.3^{8-2}.5^2.x^{24}}{x^{24}}=700\times3^6.$$

VI. সমদূরবর্তী পদ (Equidistant terms)

দেখাইতে হইবে যে n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে $(x+a)^n$ এর দ্বিপদ বিস্তৃতিতে উভয় প্রান্ত হইতে সমদূরবর্তী যে কোন দুইটি পদের সহগ সমান।

[এখানে **সহগ** বলিতে **দ্বিপদ সহগ** বুঝাইতেছে।]

সমাধান। $(x+a)^n$এর বিস্তৃতিতে প্রথমতঃ শুরু হইতে $(p+1)$তম পদটি বিবেচনা করা হইতেছে ; ইহার সহগ হইল ${}^nC_p$. বিস্তৃতিতে মোট পদের সংখ্যা $=(n+1)$; যদি শেষ প্রান্ত হইতে $(p+1)$ তম পদটি গণনা করা হয়, তবে দেখা যাইবে যে উহা এবং শুরু হইতে $\{(n+1)-(p+1)+1\}$ তম পদ হইল একই পদ ; অর্থাৎ উহা হইল শুরু হইতে $(n-p+1)$তম পদ, সুতরাং উহার সহগ $={}^nC_{n-p}$

এখন পূরক সমবায় (complementary combination) এর সূত্র অনুসারে, ${}^nC_p={}^nC_{n-p}$, কারণ প্রত্যেকের মান $=\frac{n!}{(n-p)!\,p!}$. সুতরাং ইহা প্রমাণিত হইল যে

শুরু হইতে $(p+1)$তম পদের সহগ = শেষপ্রান্ত হহতে $(p+1)$তম পদের সহগ।

[$0<p\leqslant n$ এর সীমার মধ্যে pএর যে কোন অখণ্ড মানের ক্ষেত্রে ইহা সত্য।]

প্রশ্নমালা VII(A)

[এই প্রশ্নমালায় k, m, n প্রভৃতির দ্বারা নির্দেশিত সূচকগুলিকে ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যারূপে গ্রহণ করিতে হইবে।]

1. নিম্নের দ্বিপদ বিস্তৃতিগুলি লিখ :

(i) $(x+2a)^4$; (ii) $\left(y+\frac{1}{y}\right)^6$; (iii) $(x^2+3y^2)^5$;

(iv) $(z-1)^8$; (v) $(3x-2y)^4$; (vi) $(a-2b)^k$.

2. $(x+1)^{10}$ এর বিস্তৃতির ক্ষেত্রে নিম্নের প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :

(i) পদের সংখ্যা কত ?

(ii) কোন্ পদে x^4 আছে ?

(iii) নবম পদে x এর ঘাত কত ?

(iv) x^6 এর সহগ কত ?

(v) মধ্যম পদটি কত ?

3. $(5x-3y)^{20}$ এর বিস্তৃতির ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত বিষয়সমূহ নির্ণয় কর :

(i) পদের সংখ্যা ;

(ii) ষষ্ঠ এবং দ্বাদশ পদে x এবং y এর ঘাত ;

(iii) তৃতীয় এবং 19তম পদ ;

(iv) মধ্যম পদ।

4. নিম্নের দ্বিপদ রাশির বিস্তৃতির প্রতি ক্ষেত্রে x^3 এর সহগ নির্ণয় কর :

(i) $(x-10)^5$; (ii) $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^6$; (iii) $(x-y)^{10}$; (iv) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^7$.

5. নিম্নলিখিত বিস্তৃতিগুলির প্রতি ক্ষেত্রে 4র্থ এবং $(r+1)$তম পদ নির্ণয় কর :

(i) $(2a-5b)^7$; (ii) $(1+3x)^m$; (iii) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$.

6. x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমে বিস্তৃতি নির্ণয় কর :

(i) $(1+x)^n+(1-x)^n$; (ii) $(1+x)^n-(1-x)^n$.

7. $(1\cdot0025)^{10}$ এর 6 দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান নির্ণয় কর [দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে]

8. (i) $(x^2+3x)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে x^{20} এবং (ii) $(1+\frac{1}{2}x)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ কি হইবে ?

9. সরল কর :

(i) $(a+b)^3-3b(a+b)^2+3b^2(a+b)-b^3$;

(ii) $(x-1)^4+4(x-1)^3+6(x-1)^2+4(x-1)+1$;

(iii) $(\sqrt{2}+1)^5-(\sqrt{2}-1)^5$.

10. সরল কর :

$x^n(x-1)^n+{}^nC_1x^{n-1}(x-1)^{n-1}(x+1)+{}^nC_2x^{n-2}(x-1)^{n-2}(x+1)^2+\cdots\cdots+{}^nC_rx^{n-r}(x-1)^{n-r}(x+1)^r+\cdots\cdots+(x+1)^n$.

11. $(2+\sqrt{3})^7$ এবং $(2-\sqrt{3})^7$ এর যোগফল এবং গুণফলও নির্ণয় কর। ইহা হইতে দেখাও যে $(2+\sqrt{3})^7$ এর অখণ্ড অংশ হইল 10,083.

12. নিম্নের বিস্তৃতিগুলিতে x^4 এর সহগ নির্ণয় কর :

(i) $(1-x)(1+x)^5$; (ii) $(1+x)(1-x)^n$.

13. $(1+2x)(1-x^3)^9$ এর x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমে সজ্জিত বিস্তৃতির প্রথম 4টি পদ নির্ণয় কর। x^{19} এর সহগ কত ?

14. $(2+3x-x^2)^n$ এর x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমে সজ্জিত বিস্তৃতিটি x^2 যুক্তপদ পর্যন্ত নির্ণয় কর।

[**সমাধান**। $(2+3x-x^2)^n=[2+(3x-x^2)]^n$

$$=2^n+n.2^{n-1}(3x-x^2)+\frac{n(n-1)}{2!}2^{n-2}x^2(3-x)^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}2^{n-3}.x^3(3-x)^3+\cdots\cdots+x^n(3-x)^n.$$
$$=2^n+3nx.2^{n-1}-nx^2.2^{n-1}+(n^2-n)2^{n-3}.9x^2+\cdots\cdots$$
$$=2^n+3nx.2^{n-1}+(9n^2-13n)x^2.2^{n-3}+\cdots\cdots$$]

15. নিম্নের বিস্তৃতিগুলিতে উদ্দিষ্ট পদগুলি লিখ :

(i) $\left(3x+\frac{2}{x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতির 10ম পদ ;

(ii) $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}\right)^8$ এর বিস্তৃতির ষষ্ঠ পদ ;

(iii) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^n$ এর বিস্তৃতির rতম পদ ;

(iv) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{4r}$ এর বিস্তৃতির $(2r+1)$তম পদ।

16. উদ্দিষ্ট সহগগুলি নির্ণয় কর :

(i) $(2-x)^{11}$ এর বিস্তৃতিতে x^8 এর সহগ ;

(ii) $(3x+2x^2)^9$ এর বিস্তৃতিতে x^{11} এর সহগ ;

(iii) $(1-x^2)^{4r}$ এর বিস্তৃতিতে x^{2r} এর সহগ ;

(iv) $(1-x)^{n-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^{r+1} এর সহগ ;

(v) $\left(x^2-\frac{1}{2x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ ;

(vi) $\left(2x^2-\frac{1}{4x}\right)^{11}$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ।

17. নিম্নের বিস্তৃতিগুলিতে x বর্জিত পদগুলি নির্ণয় কর :

(i) $\left(x-\frac{2}{x}\right)^{10}$; (ii) $\left(2x^3-\frac{1}{x}\right)^{12}$; (iii) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$.

18. $(1-2x+3x^2)^7$ এর বিস্তৃতি x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমে x^3 পর্যন্ত নির্ণয় কর।

19. $(2+x-x^2)^4$ এর বিস্তৃতিতে x^4 এর সহগ নির্ণয় কর ; $(1-x^2-x^3)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগও নির্ণয় কর।

টীকা। স্মরণ রাখ : ${}^nC_r : {}^nC_{r-1} = \frac{n-r+1}{r}$. (যাচাই করিয়া দেখ।)

20. নিম্নের বিস্তৃতিগুলির প্রতি ক্ষেত্রে $(r+1)$তম পদ এবং rতম পদের অনুপাত কি হইবে—

(i) $\left(1+\frac{x}{2}\right)^n$; (ii) $\left(x-\frac{3}{x}\right)^n$; (iii) $(2x+3y)^{2r}$?

21. (i) $(x-y)^n$; (ii) $(2x+3y)^n$—ইহাদের প্রতিটির বিস্তৃতিতে $(r+1)$তম পদ ও $(r-1)$তম পদের অনুপাত কি হইবে ?

22. $(3x+2)^{19}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এবং x^{r+1} এর সহগ দুইটি সমান হইলে r এর মান নির্ণয় কর।

23. যদি $x=0{\cdot}2$ হয় তবে প্রমাণ কর যে $(1+x)^{14}$ এর বিস্তৃতিতে 11তম পদটি 10ম পদের $\frac{1}{10}$ অংশ।

24. $(1+x)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে কোন একটি সহগ এবং উহার ঠিক পূর্ববর্তী সহগের অনুপাত হইল 6/7 ; সহগ দুইটির সাংখ্যমান নির্ণয় কর।

25. নিম্নের বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটি নির্ণয় কর :

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3\left(x-\frac{1}{x}\right)^5.$$

26. x এর ঘাতের অধঃক্রমে $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

27. যদি $(1+bx^2+cx^3)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ a_r হয়, তবে প্রমাণ কর যে $2na_4=(n-1)a_2^2$.

28. প্রমাণ কর যে

$$(1+x)^{2n}-2nx(1+x)^{2n-1}+\frac{2n(2n-2)}{2\,!}x^2(1+x)^{2n-2}$$

$$-\frac{2n(2n-2)(2n-4)}{3\,!}x^3(1+x)^{2n-3}+\cdots\cdots (n+1) \text{ তম পদ পর্যন্ত}$$

$(1-x^2)^n$ এর সমান।

29. নিম্নের প্রতিটি বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর :

(i) $(1-x)(1+x)^n$; (ii) $(1+2x+x^2)(1+x)^n$.

30. $(1+x)^n\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে $\dfrac{1}{x}$ এর সহগ নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

[অতি বৃহৎ সহগগুলিকে উৎপাদকের আকারে অথবা factorial এর আকারে রাখিয়া দেওয়া যাইতে পারে—গুণ করিয়া দিতে হইবে না।]

1. (i) $x^4+8x^3a+24x^2a^2+32xa^3+16a^4$.

(ii) $y^6+6y^4+15y^2+20+15y^{-2}+6y^{-4}+y^{-6}$.

(iii) $x^{10}+15x^8y^2+90x^6y^4+270x^4y^6+405x^2y^8+243y^{10}$.

(iv) $z^8-8z^7+28z^6-56z^5+70z^4-56z^3+28z^2-8z+1$.

(v) $81x^4-216x^3y+216x^2y^2-96xy^3+16y^4$.

(vi) $a^k-2ka^{k-1}b+2k(k-1)a^{k-2}b^2+\cdots\cdots+(-1)^r\dfrac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r+1)}{r\,!}a^{k-r}2^rb^r$
$+\cdots\cdots+(-1)^k2^kb^k$.

2. (i) 11 ; (ii) 7ম পদ $=210x^4$; (iii) x^2 ; (iv) 210 ; (v) 6ষ্ঠ পদ $=252x^5$.

3. (i) 21 ; (ii) $x^{15}y^6 : x^9y^{11}$; (iii) $3^2.5^{18}.38x^{18}y^2 : 3^{18}5^2.38x^2y^{18}$;

(iv) $\dfrac{20\,!}{10\,!\,10\,!}(15xy)^{10}$

4. (i) 1000 ; (ii) -20 ; (iii) $-120y^7$; (iv) 21.

5. (i) $-70{,}000a^4b^3$; ${}^7C_r.(-1)^r2^{7-r}5^ra^{7-r}b^r$.

(ii) ${}^mC_3(3x)^3$; ${}^mC_r\,3^rx^r$. (iii) ${}^nC_3\,x^{n-6} : {}^nC_rx^{n-2r}$,

6. (i) $2\{1+{}^nC_2x^2+{}^nC_4x^4+\cdots\cdots\}$; (ii) $2\{x+{}^nC_3x^3+{}^nC_5x^5+\cdots\cdots\}$

7. 1·025283. 8. (i) $3^6.55$; (ii) $2^nC_n(\frac{1}{4})^n$,

9. (*i*) a^3 ; (*ii*) x^4 ; (*iii*) 82 ; 10. $(x^2+1)^n$.

11. (*i*) 10,084 ; (*ii*) 1. 12. (*i*) -5 ; (*ii*) $\frac{n(n-1)(n-2)(n-7)}{24}$.

13. $1+2x-9x^3-18x^4$; 168. 15. (*i*) $2^{11}.3^3.55x^{-6}$; (*ii*) $-7.3^{-5}x^{11}$;

(iii) $\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}x^{n-2r+2}$; (*iv*) $\frac{4r!}{2r!\,2r!}$.

16. (i) 1320 ; (ii) $3^9.16$; (iii) $(-1)^r\frac{4r!}{3r!\,r!}$;

(iv) $(-1)^{r+1}\frac{(n-1)!}{(r+1)!\,(n-r-2)!}$; (v) $-\frac{99}{16}$; (vi) $-\frac{231}{8}$.

17. (i) -63, 128 ; (ii) -1760 ; (iii) $\frac{(2n)!}{n!\,n!}$.

18. $1-14x+105x^2-532x^3+\cdots\cdots$ 19. 1 ; $-\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$.

20. (i) : $\frac{(n-r+1)x}{2r}$; (ii) $\frac{3(n-r+1)}{rx^2}$, (iii) $\frac{3y(r+1)}{2rx}$.

21. (i) $\frac{(n-r+2)(n-r+1)y^2}{r(r-1)x^2}$; (ii) $\frac{9(n-r+2)(n-r+1)y^2}{4r(r-1)x^2}$.

22. 11. 24. 792 , 924. 25. 0.

26. $x^7+x^5-3x^3-3x+3x^{-1}+3x^{-3}-x^{-5}-x^{-7}$.

29. (i) $\frac{n!\;(n-2r+1)}{r!\;(n-r+1)!}$; (ii) $\frac{(n+2)!}{r!\,(n-r+2)!}$.

30. $\frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}$.

পরীক্ষামূলক প্রশ্নাবলী (TEST PAPERS)

(সময় ঃ 40 মিনিট)

1. $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^{2n+1}$ (যেখানে n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা), এর মধ্যম পদসমূহ নির্ণয় কর।

2. দেখাও যে $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^n$ এর দ্বিপদ বিস্তৃতিতে x^p এর সহগ হইল

$$\frac{\lfloor n}{\lfloor \frac{1}{3}(n-p)\ \lfloor \frac{1}{3}(2n+p)}.$$

3. n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে দেখাও যে $(1+x)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ হইল $(1+x)^{2n-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগের দ্বিগুণ।

4. দেখাও যে $(x+2)^{n-1}+(x+2)^{n-2}(x+1)+(x+2)^{n-3}(x+1)^2+\cdots$ $\cdots+(x+1)^{n-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ হইল

$$\frac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!}\,(2^{n-r}-1)$$

5. $\left(9x^2-\frac{1}{3x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতির x বর্জিত পদ নির্ণয় কর।

6. p ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হইলে দেখাও যে $(1+x)^{2p}$ এর মধ্যম পদের সহগ, $(1+x)^{2p-1}$ এর দুইটি মধ্যম পদের সহগ দুইটির সমষ্টির সমান।

7. $(3+2x-4x^2)^9$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এর সহগ নির্ণয় কর।

8. প্রমাণ কর যে $(1-2x)^{18}\,(1+3x)^{17}$ এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ হইল শূন্য, এবং x^3 এর সহগ নির্ণয় কর।

9. দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে মান নির্ণয় কর (দ্বিতীয় ক্ষেত্রে 7 দশমিক স্থান পর্যন্ত) :

(i) $(97)^5$; (ii) $(1{\cdot}001)^{16}$

10. যদি $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে 4র্থ এবং 5ম পদ দুইটি যথাক্রমে 1760 এবং 7920 হয়, তবে x এবং n এর মান নির্ণয় কর। ঐ বিস্তৃতির 3য় এবং 9ম পদ নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

1. $\frac{(2n+1)\,2n(2n-1)\cdots\cdots(n+2)}{n\,!}\cdot\frac{a}{b}$. এবং $\frac{(2n+1)\,2n(2n-1)\cdots\cdots(n+1)}{n\,!}\cdot\frac{b}{a}$.

5. 495, 7. 2,286,144, 9, (i) 8,587,340,257 · (ii) 1·0161206.

7·3. ধনাত্মক অখণ্ড সুচকের ক্ষেত্রে দ্বিপদ উপপাদ্যের প্রমাণ

উপপাদ্যের বিবৃতি

n যে কোন ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে,

$$(x+a)^n = x^n + {}^nC_1 x^{n-1}a + {}^nC_2 x^{n-2}a^2 + \cdots$$
$$\cdots + {}^nC_r x^{n-r}a^r + \cdots + {}^nC_{n-1}\, x\, a^{n-1} + {}^nC_n\, a^n \cdots\cdots \textbf{(1)}$$

যেখানে x এবং a যে কোন মান গ্রহণ করিতে পারে এবং

$${}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\ \cdots(n-r+1)}{r\,!}$$

এই সূত্রটি ধনাত্মক সূচকের জন্য **দ্বিপদ উপপাদ্য** বলিয়া পরিচিত।

I. আরোহ পদ্ধতিতে প্রমাণ (Proof by the method of Induction)

প্রথম ধাপ। সরাসরি গুণক্রিয়ার দ্বারা পাওয়া যায় যে

$$x+a)^2 = (x+a)(x+a) = x^2 + 2xa + a^2$$
$$= x^2 + {}^2C_1 x^{2-1}a^1 + {}^2C_2 a^2 \qquad (\because\ {}^2C_1 = 2\,;\ {}^2C_2 = 1)$$

$$(x+a)^3 = (x+a)(x+a)(x+a)$$
$$= (x^2+2xa+a^2)(x+a)$$
$$= x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$$
$$= x^3 + {}^3C_1 x^{3-1}a + {}^3C_2 x^{3-2}a^2 + {}^3C_3 a^3$$
$$(\because\ {}^3C_1 = 3\,;\ {}^3C_2 = 3\,;\ {}^3C_3 = 1)$$

ইত্যাদি, ইত্যাদি।

সুতরাং সূত্র **(1)** সত্য বলিয়া দেখা যায় যখন $n=2$, বা $n=3$.

দ্বিতীয় ধাপ। এখন সূত্র **(1)** সত্য বলিয়া ধরিয়া লওয়া হইল যখন $n=$ যে কোন একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা k অর্থাৎ ইহা ধরিয়া লওয়া হইল যে

$$(x+a)^k = x^k + {}^kC_1 x^{k-1}a + {}^kC_2 x^{k-2}a^2 + \cdots$$
$$\cdots + {}^kC_r x^{k-r}a^r + \cdots\cdots + {}^kC_{k-1} x a^{k-1} + {}^kC_k a\ .$$

এক্ষণে উভয়পক্ষকে $(x+a)$ দ্বারা গুণ করা হইল। তাহা হইলে বামপক্ষ $=(x+a)^{k+1}$; ডানপক্ষের গুণ কার্যটিকে নিম্নপ্রকারে সজ্জিত করা হইল :

$$x^k + C_1x^{k-1}a + {}^kC_2x^{k-2}a^2 + \cdots + {}^kC_{r-1}x^{k-r+1}a^{r-1} + {}^kC_rx^{k-r}a^r + \cdots + {}^kC_{k-1}xa^{k-1} + {}^kC_k a^k$$

$$\times \quad x+a$$

$$x^{k+1} + {}^kC_1x^ka + {}^kC_2x^{k-1}a^2 + \cdots + {}^kC_{r-1}x^{k-r+2}a^{r-1} + {}^kC_rx^{k-r+1}a^r + \cdots + {}^kC_{k-1}x^2a^{k-1} + {}^kC_k\, xa^k$$

$$+\, x^ka + {}^kC_1x^{k-1}a^2 + \cdots + \quad \cdots \cdots \quad + {}^kC_{r-1}x^{k-r+1}a^r + \cdots + {}^kC_{k-2}x^2a^{k-1} + {}^kC_{k-1}xa^k + {}^kC_ka^{k+1}$$

$$x^{k+1} + ({}^kC_1+1)x^ka + ({}^kC_2+{}^kC_1)x^{k-1}a^2 + \cdots + ({}^kC_r+{}^kC_{r-1})x^{k-r+1}a^r + \cdots + ({}^kC_{k-1}+{}^kC_{k-2})x^2a^{k-1}$$
$$+ ({}^kC_k+{}^kC_{k-1})xa^k + {}^kC_ka^{k+1}$$

$$= x^{k+1} + {}^{k+1}C_1x^ka + {}^{k+1}C_2x^{k-1}a^2 + \cdots + {}^{k+1}C_rx^{k-r+1}a^r + \cdots + {}^{k+1}C_{k-1}x^2a^{k-1} + {}^{k+1}C_kxa^k + {}^{k+1}C_{k+1}a^{k+1} \cdots \quad (2)$$

[$\because$ ${}^nC_r + {}^nC_{r+1} = {}^{n+1}C_r$, সুতরাং ${}^kC_2 + {}^kC_1 = {}^{k+1}C_2, \cdots {}^kC_r + {}^kC_{r-1} = {}^{k+1}C_r$, ${}^kC_k + {}^kC_{k-1} = {}^{k+1}C_k$
এবং শেষে ${}^kC_k = {}^{k+1}C_{k+1} = 1$]

এইভাবে **(2)** নির্দেশিত রাশি $=(x+a)^{k+1}$ হইতে দেখা যায় যে দ্বিপদ উপপাদ্যের সূত্র **(1)** সত্য হয়, যখন $n=k+1$, যদি ধরিয়া লওয়া হয় যে ইহা সত্য, যখন $n=k$.

তৃতীয় ধাপ। প্রথম ধাপে উল্লিখিত হইয়াছে যে উপপাদ্যটি সত্য বলিয়া দেখা যায়, যখন $n=2$ অথবা $n=3$; সুতরাং দ্বিতীয় ধাপে যাহা প্রমাণ করা হইয়াছে, তাহা হইতে এখন বলা যায় যে উপপাদ্যটি অবশ্যই সত্য হইবে, যখন $n=3+1=4$; আবার, $n=4$ হইলে যদি উপপাদ্যটি সত্য হয় তবে ইহা অবশ্যই সত্য হইবে যখন $n=4+1=5$ এবং এইরূপ অনির্দিষ্টভাবে চলিবে।

$\therefore$ n এর সকল ধনাত্মক অখণ্ড মানের জন্য দ্বিপদ উপপাদ্যটি সত্য।

II. উপপাদ্যটির একটি বিকল্প প্রমাণ

দেখা যায় যে

$$(x+a_1)(x+a_2)=x^2+x(a_1+a_2)+a_1a_2.$$

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)=x^3+x^2(a_1+a_2+a_3)+ x(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)+a_1a_2a_3.$$

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4)=x^4+x^3(a_1+a_2+a_3+a_4) +x^2(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4) +x(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4) +a_1a_2a_3a_4.$$

ইহাকে নিম্ন প্রকারে লেখা যায়, যথা

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4)=x^4+s_1x^3+s_2x^2+s_3x+s_4,$$

যেখানে $s_1=a_1, a_2, a_3, a_4$ পদগুলির সমষ্টি,

$s_2=$ঐ পদগুলির দুই দুইটির গুণফলের সমষ্টি

$s_3=$ঐ পদগুলির তিন তিনটির গুণফলের সমষ্টি

$s_4=$ঐ পদগুলির চার চারটির গুণফলের সমষ্টি অর্থাৎ $a_1a_2a_3a_4$.

এখন এইগুণগুলির ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত বিধিগুলি অনুসৃত হইতে দেখা যায়, যথা

(1) যে দ্বিপদ উৎপাদকগুলি একত্রে গুণ করা হইতেছে তাহাদের সংখ্যা অপেক্ষা দক্ষিণ পক্ষের পদের সংখ্যা এক বেশী।

(2) প্রথম পদে x এর সূচক সংখ্যা দ্বিপদ উৎপাদকগুলির সংখ্যার সমান এবং পরবর্তী পদগুলির প্রত্যেকটিতে ঐ সূচক সংখ্যা উহার ঠিক পূর্ববর্তী পদের ঐ সূচক সংখ্যা অপেক্ষা এক কম।

(3) প্রথম পদের সহগ, এক ; দ্বিতীয় পদের সহগ দ্বিপদ উৎপাদকগুলির দ্বিতীয় পদসমূহের সমষ্টির সমান ; তৃতীয় পদের সহগ দ্বিপদ উৎপাদকগুলির দ্বিতীয় পদ সমূহের দুই দুইটির গুণফলের সমষ্টির সমান ; ইত্যাদি, ইত্যাদি ; শেষ পদটি হইল দ্বিপদ উৎপাদকগুলির দ্বিতীয় পদসমূহের গুণফল।

এখন প্রমাণ করা হইবে যে এই বিধিসমূহ সর্বদাই অনুসৃত হইবে, তা দ্বিপদ উৎপাদকগুলির সংখ্যা যাহাই হউক না কেন। ধরা যাক্, যখন n সংখ্যক উৎপাদক একত্রে গুণ করা হয় তখন ঐ বিধিসমূহ অনুসৃত হয় ; অর্থাৎ ধরা হইল যে

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\cdots \quad \cdots \quad \cdots(x+a_n) =x^n+s_1x^{n-1}+ s_2x^{n-2}+\cdots+s_{n-1}x+s_n,$$

যেখানে s_1 এ n টি পদ আছে, (যথা $a_1+a_2+a_3+\cdots\ \cdots+a_n$),
s_2 এ ${}^nc_2$ টি পদ আছে, (যথা $a_1a_2+a_1a_3+\cdots$),
s_3 এ ${}^nc_3$ টি পদ আছে, (যথা $a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+\cdots$),
এবং, সাধারণভাবে, s_r এ ${}^nC_r$ টি পদ আছে।

এই অভেদের উভয় পক্ষকে অপর একটি উৎপাদক, যথা $(x+a_{n+1})$, দ্বারা গুণ করা হইল। তাহা হইলে

$$(x+a_1)(x+a_2)\ \cdots\ \cdots\ (x+a_n)(x+a_{n+1})$$

$$=x^n+s_1x^{n-1}+s_2x^{n-2}+\cdots+s_{n-1}x+s_n$$

$$\times\qquad x+a_{n+1}$$

$$x^{n+1}+x^n(s_1+a_{n+1})+x^{n-1}(s_2+s_1a_{n+1})+\cdots\ \cdots$$

$$+x(s_n+a_{n+1}s_{n-1})+s_na_{n+1}$$

এখন $s_1+a_{n+1}=a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}$

$s_2+a_{n+1}s_1=s_2+a_{n+1}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$

$=a_1, a_2, \cdots a_n, a_{n+1}$ হইতে গৃহীত দুই দুইটির গুণফলের সমষ্টি

... ...

$s_na_{n+1}=a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, a_{n+1}$ প্রভৃতি সমুদয় পদের গুণফল।

সুতরাং দেখা গেল যে যদি n সংখ্যক দ্বিপদ উৎপাদকের একত্র গুণক্রিয়ার ক্ষেত্রে বিধিগুলি অনুসৃত হয়, তবে যখন $(n+1)$ সংখ্যক উৎপাদক একত্রে গুণ করা হইবে, তখনও ঐ বিধিগুলি অনুসৃত হইবে; কিন্তু যখন 4টি উৎপাদক একত্রে গুণ করা হইয়াছে তখন ঐ বিধিগুলি অনুসৃত হইতে দেখা গিয়াছে; সুতরাং যখন 5টি উৎপাদক একত্রে গুণ করা হইবে তখনও বিধিগুলি অনুসৃত হইবে, ইত্যাদি ইত্যাদি; সুতরাং যে কোন সংখ্যক দ্বিপদ উৎপাদকের ক্ষেত্রে বিধিগুলি অনুসৃত হয়।

বিশেষ ক্ষেত্রে, যদি ধরা হয় $a_1=a_2=a_3=\cdots\ \cdots=a_n=a$ (মনে করা যাক্) তবে তখন বাম পক্ষ $=(x+a)^n$;

আবার $s_1=a+a+a+\cdots n$ সংখ্যক পদ $=na={}^nC_1a$

$$s_2=a^2+a^2+a^2+\cdots{}^nC_2 \text{ সংখ্যক পদ}=\frac{n(n-1)}{2!}a^2={}^nC_2a^2$$

$$s_3=a^3+a^3+a^3+\cdots{}^nC_3 \text{ সংখ্যক পদ}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^3$$

$$={}^nC_3\,a^3, \text{ ইত্যাদি।}$$

সুতরাং যদি n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে

$$(x+a)^n=x^n+nx^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}x^{n-r}a^r+\cdots+a^n.$$

(ইহাই হইল ধনাত্মক অখণ্ড সূচকের জন্য দ্বিপদ উপপাদ্য।)

7·4. $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি : দ্বিপদ সহগ

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে সূচক n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে দ্বিপদ উপপাদ্যটি নিম্নরূপে বিবৃত করা হইয়াছে :

$$(x+a)^n=x^n+{}^nC_1x^{n-1}a+{}^nC_2x^{n-2}a^2+\cdots$$
$$\cdots+{}^nC_rx^{n-r}a^r+\cdots+{}^nC_na^n$$

(*i*) x এর পরিবর্তে 1 এবং aর পরিবর্তে x লিখিয়া দ্বিপদ উপপাদ্যের একটি আরও সরল রূপ পাওয়া যায়—যথা :

$$(1+x)^n=1+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+\cdots\quad\cdots+{}^nC_rx^r+\cdots\quad\cdots+{}^nC_nx^n$$

(*ii*) aর পরিবর্তে 1 লিখিলে অবশ্য পাওয়া যায়—

$$(x+1)^n=x^n+{}^nC_1x^{n-1}+{}^nC_2x^{n-2}+\cdots+{}^nC_rx^{n-r}+\cdots+{}^nC_n$$

(*i*) এবং (*ii*) হইতে যথাক্রমে x এর ঘাতের ঊর্ধ্ব এবং অধঃক্রমানুসারে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি দুইটি পাওয়া যায়। বিস্তৃতি দুইটি যে একই তাহা অতি সহজেই প্রমাণ করা যায় : (${}^nC_r={}^nC_{n-r}$ সম্পর্কটি ব্যবহার করিলে)।

আবার যে ক্ষেত্রে প্রথম পদটি এক তাহার উপর একটি দ্বিপদ রাশির বিস্তৃতিকে সর্বদা নির্ভরশীল করান যায়—এইরূপে—

$$(x+a)^n=x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n=x^n(1+y)^n,\text{ যেখানে } y=\frac{a}{x}.$$

$$(a+x)^n=a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n=a^n(1+z)^n,\text{ যেখানে } z=\frac{x}{a}.$$

ইহার পরিপ্রেক্ষিতে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিকে দ্বিপদ উপপাদ্যের প্রমাণ-রূপ বলিয়া ধরিয়া লওয়া যাইতে পারে। দ্বিপদ উপপাদ্যটি এই প্রমাণ আকারে (যেমন আরোহণ প্রণালীতে) প্রমাণ করিতে ছাত্রছাত্রীদের একটি সুন্দর অনুশীলন হইবে।

দ্বিপদ সহগ

দ্বিপদ রাশির সূচকটি জানা থাকিলে, ধরা যাক n, ${}^nC_r$ এর স্থলে C_r লেখা সুবিধাজনক, (C_r এর উপসর্গটিকে প্রশ্নে উহ্য রাখিয়া)। অতএব লেখা হয়—

$$(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_rx^r+\cdots+C_{n-1}x^{n-1}+C_nx^n.$$

এখানে $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$ কে $(1+x)^n$ এর **দ্বিপদ সহগ** বলা হয়।

ইহা হইতে দুইটি ফল সরাসরি পাওয়া যায় :—

(*i*) দ্বিপদ সহগগুলির সমষ্টি

অর্থাৎ $C_0+C_1+C_2+\cdots+C_n=2^n.$

[$(1+x)^n$এর বিস্তৃতিতে $x=1$ বসাইয়া]

(ii) বিজোড় স্থানীয় পদগুলির দ্বিপদ সহগগুলির সমষ্টি জোড় স্থানীয় পদগুলির সহগ সমষ্টির সমান এবং উহাদের প্রত্যেকটি $=2^{n-1}$;

অর্থাৎ $C_0+C_2+C_4+\cdots=C_1+C_3+C_5+\cdots=2^{n-1}$

[$(1+x)=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n$ এ $x=-1$ বসাইলে

$$0=C_0-C_1+C_2-C_3+C_4-\cdots\cdots$$

অর্থাৎ $C_0+C_2+C_4+\cdots\cdots=C_1+C_3+C_5+\cdots\cdots$

$$=\tfrac{1}{2}[(C_0+C_2+C_4+\cdots)+(C_1+C_3+C_5+\cdots)]$$

$=\frac{1}{2}$[দ্বিপদ সহগগুলির সমষ্টি]

$$=\tfrac{1}{2}.2^n=2^{n-1}\ ]$$

নিম্নের উদাহরণগুলিতে দ্বিপদ সহগগুলির মধ্যে কয়েকটি **প্রয়োজনীয় সম্বন্ধ** দেওয়া হইল।

প্রশ্নমালা VII(B)

$(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots\cdots+C_nx^n$ হইলে প্রমাণ কর—

1. $C_1+2C_2+3C_3+\cdots\cdots+nC_n=n.2^{n-1}$

[বামপক্ষ $={}^nC_1+2.{}^nC_2+3.{}^nC_3+\cdots\cdots+n.{}^nC_n$

$$=n+2.\frac{n(n-1)}{2!}+3.\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\cdots+n.\frac{n(n-1)\cdots2.1}{n!}$$

$$=n\left[1+\frac{(n-1)}{1!}+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}+\cdots\cdots+\frac{(n-1)(n-2)\cdots2.1}{(n-1)!}\right]$$

$$=n[1+{}^{n-1}C_1+{}^{n-1}C_2+\cdots\cdots+{}^{n-1}C_{n-1}]$$

$=n(1+1)^{n-1}$ [$(1+x)^{n-1}$ বিস্তৃতিতে $x=1$ বসাইয়া]

$=\boldsymbol{n.2^{n-1}}$]

2. $C_1-2C_2+3C_3-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}nC_n=0$

3. $C_0+\dfrac{C_1}{2}+\dfrac{C_2}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{C_n}{n+1}=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$

[বামপক্ষ $={}^nC_0+\frac{1}{2}.{}^nC_1+\frac{1}{3}.{}^nC_2+\cdots+\frac{1}{n+1}.{}^nC_n$

$$=1+\frac{n}{2!}+\frac{n(n-1)}{3!}+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots3.2.1}{(n+1)!}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[\frac{n+1}{1!}+\frac{(n+1)n}{2!}+\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{(n+1)n(n-1)\cdots3.2.1}{(n+1)!}\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[\left(1+{}^{n+1}C_1+{}^{n+1}C_2+\cdots\cdots+{}^{n+1}C_{n+1}\right)-1\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[\left(1+1\right)^{n+1}-1\right]=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\Big]$$

4. $C_0-\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{3}-\frac{C_3}{4}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{C_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}.$

5. $\frac{C_0}{1}+\frac{C_2}{3}+\frac{C_4}{5}+\frac{C_6}{7}+\cdots\cdots=\frac{2^n}{n+1}.$

6. (i) $C_0+5C_1+9C_2+\cdots\cdots+(4n+1)C_n=2^n(2n+1).$

(ii) $C_0+3C_1+5C_2+\cdots\cdots+(2n+1)C_n=2^n(n+1).$

7. $\frac{C_1}{C_0}+2\frac{C_2}{C_1}+3\frac{C_3}{C_2}+\cdots\cdots+n\frac{C_n}{C_{n-1}}=\frac{n(n+1)}{2}.$

[বামপক্ষ $=\frac{{}^nC_1}{{}^nC_0}+2.\frac{{}^nC_2}{{}^nC_1}+3.\frac{{}^nC_3}{{}^nC_2}+\cdots\cdots+n.\frac{{}^nC_n}{{}^nC_{n-1}}$

$$=n+2.\ \frac{n(n-1)}{2!}\times\frac{1!}{n}+3.\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\times\frac{2!}{n(n-1)}+\cdots$$

$$+(n-1).\ \frac{n(n-1)\cdots\cdots 2}{\lfloor n-1}\times\frac{\lfloor n-2}{n(n-1)\cdots 3}$$

$$+n.\ \frac{n(n-1)\cdots 2.1}{\lfloor n}\times\frac{\lfloor n-1}{n(n-1)\cdots 2}$$

$$=n+(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+2+1$$

$=n$ স্বাভাবিক সংখ্যায় সমষ্টি $=\frac{n(n+1)}{2}$]

8. $(C_0+C_1)(C_1+C_2)(C_2+C_3)\cdots\cdots(C_{n-1}+C_n)=$

$$C_1C_2C_3\cdots\cdots C_n.\frac{(n+1)^n}{n!}$$

[প্রকৃতপক্ষে প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\frac{C_0+C_1}{C_1}.\ \frac{C_1+C_2}{C_2}.\ \frac{C_2+C_3}{C_3}\cdots\cdots\frac{C_{n-1}+C_n}{C_n}=\frac{(n+1)^n}{n!}.$$

ব্যবহার কর : $\frac{C_r+C_{r+1}}{C_{r+1}}=\frac{C_r+{}^nC_{r+1}}{{}^nC_{r+1}}=\frac{{}^{n+1}C_{r+1}}{{}^nC_{r+1}}=\frac{n+1}{n-r}$]

9. $2C_0+2^2.\frac{C_1}{2}+2^3.\ \frac{C_2}{3}+\cdots\cdots+2^{n+1}\frac{C_n}{n+1}=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}.$

দ্রষ্টব্য : কোন অভেদে উভয় পক্ষের সমঘাতযুক্ত পদগুলির সহগগুলি সমান এই তথ্যটি পরবর্তী উদাহরণসমূহে কাজে লাগাইতে হইবে। কয়েকটি ক্ষেত্রে

ক্যাল্‌কুলাস ব্যবহারের ইঙ্গিত করা হইয়াছে কিন্তু উহা অপরিহার্য নহে।

10. (i) $C_0^2+C_1^2+C_2^2+\cdots\cdots+C_n^2=\dfrac{\lfloor 2n}{(\lfloor n)^2}$.

(ii) $C_0C_1+C_1C_2+C_2C_3+\cdots+C_{n-1}.C_n=\dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n-1\lfloor n+1}$,

(iii) $C_0C_r+C_1C_{r+1}+C_2C_{r+2}+\cdots\cdots+C_{n-r}C_n$

$$=\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n-r\ \lfloor n+r}$$

সমাধান—স্পষ্টতঃই পাওয়া যায়

$$(C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n)(C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n)$$
$$=(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n} \quad \cdots \quad \textbf{(A)}$$

x এর সকল মানেই (A) সম্বন্ধটি সত্য, অতএব ইহা একটি অভেদ। উভয় পক্ষের x^n এর সহগ সমান ধরা হয়।

(i) (A)র বাম পক্ষের x^nএর সহগ

$=C\ C_n+C_1C_{n-1}+C_2C_{n-2}+\cdots\cdots+C_nC_0$

$=C_0^2+C_1^2+C_2^2+\cdots\cdots+C_n^2$, যেহেতু $C_r=C_{n-r}$

(A)র ডান পক্ষের x^n এর সহগ অর্থাৎ $(1+x)^{2n}$ এর x^n এর সহগ

$$={}^{2n}C_n=\frac{(2n)\,!}{n\,!\ n\,!}.$$

সুতরাং ফল (i) পাওয়া গেল।

(ii) **(A)**র বাম পক্ষের x^{n-1} এর সহগ

$=C_0C_{n-1}+C_1C_{n-2}+C_2C_{n-3}+\cdots+C_{n-1}C_0$

$=C_0C_1+C_1C_2+C_2C_3+\cdots+C_{n-1}\ C_0$; যেহেতু $C_r=C_{n-r}$

(A)র ডান পক্ষের অর্থাৎ $(1+x)^{2n}$ এর x^{n-1} এর সহগ

$$={}^{2n}C_{n-1}=\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n+1\ \lfloor n-1} ;$$

সুতরাং ফল (ii) পাওয়া গেল।

(iii) অনুশীলনার্থ রাখা হইল।

11. (i) $C_0+2C_1+3C_2+\cdots\cdots+(n+1)C_n=(n+2)2^{n-1}$

(ii) $C_1^2+2C_2^2+3C_3^2+\cdots\cdots+nC_n^2=\dfrac{\lfloor 2n-1}{\lfloor n-1\ \lfloor n+1}$.

[সমাধান (i) বামপক্ষ $=(C_0+C_1+C_2+\cdots\cdots+C_n)+(C_1+2C_2+\cdots+nC_n)$

$$=2^n+n.2^{n-1} \quad [\text{ প্রশ্ন 1 দ্রষ্টব্য }]$$
$$=(n+2)2^{n-1}.$$

(ii) কিছু ধারণা (i) হইতে পাওয়া যাইবে।

দুইটি শ্রেণী বিবেচনা করা যাউক, যথা—

$$C_0x^n+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\cdots\cdots+C_{n-1}x+C_n=(x+1)$$

এবং $C_1x+2C_2x^2+3C_3x^3+\cdots\cdots+nC_nx^n$

$$=\left[nx+\frac{n(n-1)}{1!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2!}x^3+\cdots\cdots\right.$$
$$\left.+n.\frac{n(n-1)\cdots\cdots2.1}{n!}x^n\right]$$
$$=nx[1+{}^{n-1}C_1x+{}^{n-1}C_2x^2+\cdots\cdots+{}^{n-1}C_{n-1}x^{n-1}]$$
$$=nx(1+x)^{n-1}$$

এই শ্রেণী দুইটিকে গুণ করিয়া পাওয়া যায়

$$(C_0x^n+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\cdots\cdots+C_{n-1}x^n+C_n)$$
$$\times(C_1x+2C_2x^2+3C_3x^3+\cdots\cdots+nC_nx^n)$$
$$=nx(1+x)^{2n-1}.$$

ইহা একটি অভেদ। উভয়পক্ষের x^n এর সহগ সমান ধরিয়া (ii) সহজেই পাওয়া যাইবে।]

12. $C_0^2-C_1^2+C_2^2-C_3^2+\cdots\cdots+(-1)^nC_n^2$

$=0$, যদি n অযুগ্ম হয়;

$=(-1)^{n/2}\ {}^nC_{n/2}$, যদি n যুগ্ম হয়।

[দুইটি শ্রেণী বিবেচনা করা যাউক, যথা

$$(1-x)^n=C_0-C_1x+C_2x^2-\cdots\cdots+(-1)^nC_nx^n$$

এবং $(x+1)^n=C_0x^n+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\cdots\cdots+C_n$

শ্রেণী দুইটি গুণ করিয়া উভয় পক্ষের x^n এর সহগ সমান ধরিলে দেখা যাইবে যে $(1-x^2)^n$ বিস্তৃতির সকল পদেই x এর যুগ্ম ঘাত রহিয়াছে; সুতরাং (n অযুগ্ম হইলে) x^n এর সহগ শূন্য। সুতরাং...]

13. $C_0+2C_1x+3C_2x^2+\cdots+(n+1)C_nx^n$ শ্রেণীটির সমষ্টি নির্ণয় কর এবং ইহা হইতে সিদ্ধ কর যে,

$$C_0+2C_1+3C_2+\cdots\cdots+(n+1)C_n=(n+2).2^{n-1}$$

[**প্রথম প্রণালী :**

শ্রেণীটি $=(C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots\cdots+C_nx^n)+$
$(C_1x+2C_2x^2+\cdots\cdots+nC_nx^n)$

$=(1+x)^n+nx(1+x)^{n-1}$

$x=1$ বসাইয়া,

$C_0+2C_1+3C_2+\cdots+(n+1)C_n=(n+2).2^{n-1}$

***দ্বিতীয় প্রণালী :**

(ক্যালকুলাসের ব্যবহার)

$C_0x+C_1x^2+C_2x^3+\cdots\cdots+C_nx^{n+1}=x(1+x)^n$

x সম্পর্কে উভয় পক্ষের অন্তরকলন করিয়া (differentiating)

$C_0+2C_1x+3C_2x^2+\cdots\cdots+(n+1)C_nx^n$
$=(1+x)^n+nx(1+x)^{n-1}$]

*14. $C_1+2^2C_2x+3^2C_3x^2+4^2C_4x^3+\cdots\cdots+n^2C_nx^{n-1}$ শ্রেণীটির সমষ্টি নির্ণয় কর এবং

$C_1-2^2C_2+3^2C_3-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}n^2C_n$ এর মান ($n>2$) নির্ণয় কর।

[উঃ $n(1+x)^{n-2}(1+nx)$; 0]

*15. প্রমাণ কর :

$$C_1-\tfrac{1}{2}C_2+\tfrac{1}{3}C_3-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}C_n$$
$$=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

[**ক্যালকুলাসের ব্যবহার :**

$C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n=(1+x)^n$

$\therefore\ C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_nx^{n-1}=\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$

$x=-1$ হইতে $x=0$ পর্যন্ত সমাকলন (Integration) করিয়া

$C_1-\tfrac{1}{2}C_2+\tfrac{1}{3}C_3-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}C_n$

$=\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{(1+x)^n-1}{x}dx=\int_0^1\frac{y^n-1}{y-1}dy,$ যেখানে $1+x=y,$

(Improper Integral এর নিয়ম ব্যবহার আরও যুক্তিপূর্ণ)

$=\displaystyle\int_0^1(1+y+y^2+\ldots+y^{n-1})\,dy=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}$]

* চিহ্নিত প্রণালী প্রথম পাঠে বাদ দেওয়া যাইতে পারে।

16. $C_0 - 2C_1 + 3C_2 - \dots \dots + (-1)^n (n+1) C_n = 0.$

17. $C_0 C_r - C_1 C_{r-1} + C_2 C_{r-2} - \cdots \cdots + (-1)^r C_r C_0$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}r} \cdot \frac{n!}{(\frac{1}{2}r)!\ (n-\frac{1}{2}r)!}$$ যদি r যুগ্ম হয়,

r অযুগ্ম হইলে ইহার মান কত হইবে ?

18. $C_1 + 3C_3 + 5C_5 + \cdots \cdots = 2C_2 + 4C_4 + 6C_6 + \cdots = n.2^{n-2}$

19. $C_2 + 2C_3 + 3C_4 + \cdots \cdots + (n-1)C_n = 1 + (n-2)2^{n-1}.$

20. $C_0^2 + 2C_1^2 + 3C_2^2 + \cdots \cdots + (n+1)C_n^2$

$$= \frac{(n+2).\ \lfloor 2n-1}{\lfloor n\ \lfloor n-1}$$

21. $(1+x)^m (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$ এই অভেদটি ব্যবহার করিয়া Vandermonde এর উপপাদ্য : ${}^mC_r + {}^mC_{r-1} \cdot {}^nC_1 + {}^mC_{r-2} \cdot {}^nC_2 + \cdots\cdots + {}^nC_r = {}^{m+n}C_r$ প্রমাণ কর।

22. প্রমাণ কর

$$(C_0 + C_1 + C_2 + \cdots\cdots + C_n)^2 = 1 + {}^{2n}C_1 + {}^{2n}C_2 + \dots\dots + {}^{2n}C_{2n}.$$

23. $(1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots \cdots + C_n x^n$ হইলে a'র সকল মানের জন্য প্রমাণ কর

(i) $\frac{C_0}{a} - \frac{C_1}{a+1} + \frac{C_2}{a+2} - \cdots \cdots + (-1)^n \frac{C_n}{a+n}$

$$= \frac{n!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}.$$

(ii) $a - C_1(a-1) + C_2(a-2) - \cdots \cdots + (-1)^n (a-n) = 0.$

প্রশ্নমালা VII (C)

(বিবিধ প্রশ্ন)

[A]

1. $(1+x)^n$এর বিস্তৃতির দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ পদের সহগগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকিলে প্রমাণ কর যে $n=7$.

2. $(1+x)$ এর কোন ঘাতের বিস্তৃতিতে a, b, c পর পর তিনটি সহগ হইলে প্রমাণ কর যে ঐ ঘাতের সূচক $\frac{2ac+b(a+c)}{b^2-ac}$ এবং a যে পদের সহগ তাহার সংখ্যা $\frac{a(b+c)}{b^2-ac}$ হইবে

[ধরা যাক্ ঘাতের সূচকটি n
a, b, c যথাক্রমে $(r+1)$ তম, $(r+2)$ তম এবং $(r+3)$ তম পদের সহগ।

সুতরাং $a={}^{n}c_{r},\ b={}^{n}c_{r+1},\ c={}^{n}c_{r+2}$.

$$\therefore\ \frac{b}{a}=\frac{{}^{n}c_{r+1}}{{}^{n}c_{r}}=\frac{n-r}{r+1},\ \frac{c}{b}=\frac{n-r-1}{r+2}.$$

$n-r=y$ ধরিয়া $(r+1)\,b=ay$; $(r+2)\,c=by-b$

বা, $$\frac{(r+1)b}{(r+2)c+b}=\frac{a}{b},\ (r+1)b^2=(r+1+1)ac+ab$$

$$\therefore\ r+1=\frac{ac+ab}{b^2-ac}=\frac{a(b+c)}{b^2-ac}$$

অর্থাৎ a হইতেছে $\dfrac{a(b+c)}{b^2-ac}$ তম পদের সহগ।

এখন $$y=\frac{(r+1)b}{a}=\frac{b}{a}\times\frac{a(b+c)}{b^2-ac}=\frac{b^2+bc}{b^2-ac}$$

অর্থাৎ $$n-r=\frac{b^2+bc}{b^2-ac}$$

অর্থাৎ $$n-\left\{\frac{a(b+c)}{b^2-ac}-1\right\}=\frac{b^2+bc}{b^2-ac}$$

অর্থাৎ $$n=\frac{b^2+bc}{b^2-ac}+\frac{2ac-b^2+ab}{b^2-ac}=\frac{2ac+b(a+c)}{b^2-ac}$$

টীকা : $\dfrac{{}^{n}c_{r}}{{}^{n}c_{r-1}}=\dfrac{n-(r-1)}{r}$ স্মরণ রাখিলে ছাত্র-ছাত্রীগণ উপকৃত হইবে।

3. যদি a, b, c, d যথাক্রমে $(\alpha+\beta)^{n}$ বিস্তৃতির (n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে) তৃতীয়, চতুর্থ, পঞ্চম এবং ষষ্ঠ পদ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\frac{b^2-ac}{c^2-bd}=\frac{5a}{3c}.$$

ইহা $\dfrac{b^2-ac}{c^2-bd}=\dfrac{5ab}{3bc}$ প্রমাণ করার সামিল

যাহা $$\frac{\dfrac{b^2-ac}{ab}}{\dfrac{c^2-bd}{bc}}=\frac{5}{3}$$

অর্থাৎ $$\frac{\dfrac{b}{a}-\dfrac{c}{b}}{\dfrac{c}{b}-\dfrac{d}{c}}=\frac{5}{3}$$ প্রমাণ করার সামিল।

এখন উপরিলিখিত টীকা ব্যবহার কর।]

4. $(x+a)^n$ বিস্তৃতির তৃতীয়, চতুর্থ এবং পঞ্চম পদ যথাক্রমে 84, 280 এবং 560 হইলে, প্রমাণ কর যে $x=1$, $a=2$ এবং $n=7$.

5. যদি দ্বিপদ রাশির বিস্তৃতির দুইটি পর পর পদের সহগ সমান হয় তবে প্রমাণ কর যে উহাদের ঠিক পূর্বের এবং পরের সহগদ্বয়ও পরস্পর সমান।

6. r এবং n এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর যাহাতে $(1+x)^{2n}$ বিস্তৃতির $3r$তম এবং $(r+2)$ তম পদের সহগগুলি সমান হয়। [উঃ $n=2r$]

7. $(1+x)^{43}$ বিস্তৃতিতে $(2r+1)$ তম এবং $(r+2)$ তম পদের সহগগুলি সমান ; প্রমাণ কর যে $r=14$.

8. দেখাও যে $(1+x)^{2n}$ বিস্তৃতির মধ্যপদের সহগ $(1+x)^{2n-1}$ বিস্তৃতির মধ্যপদ-যুগলের সহগগুলির সমষ্টির সমান।

9. $(x+a)^n$ বিস্তৃতির অযুগ্ম পদগুলির সমষ্টি A এবং যুগ্ম পদগুলির সমষ্টি B হইলে, প্রমাণ কর যে $A^2-B^2=(x^2-a^2)^n$.

10. প্রমাণ কর যে $(1+x)^{n+1}$ বিস্তৃতির x^{r+1} এবং x^r এর সহগের অন্তর $(1+x)^n$ বিস্তৃতির x^{r+1} এবং x^{r-1} এর সহগের অন্তরের সমান।

11. x_1, x_2, x_3, x_4 যদি $(1+x)^n$ বিস্তৃতির যে কোন পর পর চারিটি সহগ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\frac{x_1}{x_1+x_2}+\frac{x_3}{x_3+x_4}=\frac{2x_2}{x_2+x_3}.$$

12. n যে কোন অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে দেখাও যে $(9+4\sqrt{5})^n$ এর অখণ্ড অংশ একটি অখণ্ড অযুগ্ম সংখ্যা হইবে।

13. যদি n একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা $(n>1)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $4^{2n}-15n-1$ সর্বদাই 225 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

[লিখ $4^{2n}=16^n=(1+15)^n=1+15n+\dfrac{n(n-1)}{2!}(15)^2+\cdots+(15)^n$;

সুতরাং ··· ···]

14. যদি n এর মান 3 অপেক্ষা বৃহত্তর যে কোন অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$1.2.{}^nC_r-2.3.{}^nC_{r-1}+3.4.{}^nC_{r-2}-\cdots+(-1)^r(r+1)(r+2)=2.{}^{n-3}C_r.$$

15. n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে, দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

16. $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^7.(2-x)^{10}$ বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটির মান নির্ণয় কর।

[উঃ −61,600]

17. $(1+x)^n$ বিস্তৃতিতে তিনটি পর পর পদের সহগগুলি $182:84:30$ অনুপাতে আছে। প্রমাণ কর যে, $n=18$.

18. $(3+2x)^{27}.(2-x)^{40}$ বিস্তৃতিতে যদি p এবং q যথাক্রমে x এবং x^2 এর সহগ হয় তবে, প্রমাণ কর যে, $9p=2q$.

19. $(1-x^2+x^4).(1-2x^2)^{13}$ বিস্তৃতিতে x^{12} এর সহগ নির্ণয় কর।

[উঃ 162,448]

20. $(1+x)^{2n}$ বিস্তৃতিতে C_r যদি x^r এর সহগ সূচিত করে, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{C_1}{2}+\frac{C_3}{4}+\frac{C_5}{6}+\cdots\ \cdots\ \cdots n$ পদ পর্যন্ত $=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}$.

21. যদি $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত এক প্রস্থ সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$a_0-{}^nC_1a_1+{}^nC_2a_2-\cdots\cdots+(-1)^n\ {}^nC_na_n=0.$$

7·5. n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে $(1+x)^n$ বা $(x+a)^n$ বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ নির্ণয়।

একটি সরল উদাহরণ দিয়া শুরু করা যাউক :

উদা. 1. $x=\frac{2}{3}$ হইলে, $(5+4x)^{12}$ বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ কোন্‌টি নির্ণয় কর।

সমাধান : t_r এবং t_{r+1} যথাক্রমে rতম এবং $(r+1)$ তম পদ সূচিত করিলে,

$$\frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{{}^{12}C_r5^{12-r}(4x)^r}{{}^{12}C_{r-1}5^{13-r}(4x)^{r-1}}=\frac{{}^{12}C_r}{{}^{12}C_{r-1}}\cdot\frac{4x}{5}$$

$$=\frac{12-(r-1)}{r}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{2}{3},\ \text{যেহেতু } x=\tfrac{2}{3}$$

$$=\frac{8(13-r)}{15r}$$

এখন $t_{r+1}>t_r$ হইবে যদি $\frac{8(13-r)}{15r}>1$ হয়।

অর্থাৎ যদি $104-8r>15r$ হয়

অর্থাৎ যদি $r<\frac{104}{23}=4\frac{12}{23}$ হয়।

অনুরূপভাবে $t_{r+1}<t_r$ হইবে যদি $r>4\frac{12}{23}$ হয়।

$\therefore$ $r=4$ বা 3 বা 2 বা 1 হইলে $t_{r+1}>t_r$ হইবে

অর্থাৎ $t_5>t_4>t_3>t_2>t_1$ হইবে।

আবার যদি $r=5$ বা 6 বা 7 ইত্যাদি হয়, তবে $t_{r+1}<t_r$ হইবে

অর্থাৎ $t_5>t_6>t_7>t_8>t_9 \cdots \quad \cdots$ হইবে।

$\therefore$ **পঞ্চম পদটি** হইতেছে বৃহত্তম পদ।

যাচাই করিয়া দেখা গেল 5ম পদ$=\dfrac{(11\times 5^9\times 2^{12})}{9}$

আরও সাধারণ ক্ষেত্রটি বিবেচনা করা যাউক :

উদা. 2. $(1+x)^n$ বিস্তৃতির কোন্ পদটি বৃহত্তম পদ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে $\dfrac{t_{r+1}}{t_r}=\dfrac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}}\cdot x=\dfrac{n-r+1}{r}x$

$\therefore$ $t_{r+1}>t_r$ হইবে যদি $\{(n+1)x-rx\}>r$ হয়

অর্থাৎ যদি $r<\dfrac{(n+1)x}{1+x}$ হয়

অনুরূপভাবে, $t_{r+1}<t_r$ হইবে যখনই, $r>\dfrac{(n+1)x}{1+x}$ হইবে

ক্ষেত্র 1. ধরা যাউক $\dfrac{(n+1)x}{1+x}=$একটি অখণ্ড সংখ্যা q

তাহা হইলে $t_{q+1}=t_q$ হইবে এবং t_q বা t_{q+1} অপর যে কোন পদ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

ক্ষেত্র 2. ধরা যাউক $\dfrac{(n+1)x}{1+x}=q+$একটা ধনাত্মক প্রকৃত ভগ্নাংশ।

তাহা হইলে $t_{r+1}>t_r$ হইবে, যখনই $r<q$ এবং যদি $r=q$ হয় ;

কিন্তু $t_{r+1}<t_r$ হইবে, যদি $r=q+1$ এবং যখনই $r>q+1$ হইবে।

$\therefore$ $t_{q+1}>t_q>t_{q-1}\cdots \cdots$ এবং $t_{q+1}>t_{q+2}>t_{q+3}\cdots \cdots$

$\therefore$ t_{q+1} হইতেছে বৃহত্তম পদ।

প্রশ্নমালা VII(D)

1. নিম্নের বিস্তৃতিগুলির কোন্ কোন্ পদ বৃহত্তম পদ নির্ণয় কর :

(i) $(1+2x)^9$, যদি $x=\frac{1}{3}$ হয় ; (ii) $(1+2x)^9$, যদি $x=3$ হয় ;

(iii) $(7+x)^{29}$, $x=3$ হইলে ; (iv) $(1+3x)^7$, $x=\frac{1}{4}$ হইলে ;

(v) $(ax-by)^{10}$, যদি $a=2, b=5, x=3, y=\frac{1}{2}$ হয়।

2. $(1+x)^{2n}$ বিস্তৃতির মধ্য পদটি বৃহত্তম পদ হইলে, প্রমাণ কর যে x এর মান $1-\frac{1}{n+1}$ এবং $1+\frac{1}{n}$ এর মধ্যবর্তী।

3. দেখাও যে x এর মান $\frac{n}{n+2}$ এবং $\frac{n+2}{n}$ এর মধ্যবর্তী হইলে $(1+x)^{2n+1}$ বিস্তৃতির বৃহত্তম পদটির সহগ ও বৃহত্তম হইবে।

টীকা। r এর যে মানের জন্য ${}^nC_r$ বৃহত্তম হয় তাহা হইতেছে $r=\frac{1}{2}n$, যখন n যুগ্ম ; এবং $r=\frac{1}{2}(n-1)$, বা $r=\frac{1}{2}(n+1)$, যখন n অযুগ্ম। ইহা সহজেই ${}^nC_{r-1} : {}^nC_r$ অনুপাতটি বিবেচনা করিয়া এবং উপরের উদাহরণগুলির সমাধানের যুক্তির দ্বারা প্রমাণ করা যায়।

4. নিম্নের বিস্তৃতিগুলির বৃহত্তম সহগ নির্ণয় কর :

(i) $(1+x)^{10}$; (ii) $(1+x)^{11}$; (iii) $(1+x)^{4m+3}$.

5. $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^{3n}$ বিস্তৃতির কোন পদের সহগ বৃহত্তম ?

উত্তরমালা

1. (i) 4র্থ, 5ম ; (ii) 9ম ; (iii) 9ম, 10ম ; (iv) 8র্থ ; (v) 8র্থ ;

4. (i) 252 ; (ii) 462 ; (iii) $\frac{(4m+3)!}{(2m+2)!\ (2m+1)!}$.

5. $(n+1)$ তম পদ।

৪

দ্বিপদ উপপাদ্য : সাধারণ আকার
(BINOMIAL THEOREM : GENERALISED FORM)
প্রয়োগসমূহ (APPLICATIONS)

৪·1. সূচনা (Introduction)

পূর্ববর্তী একটি অধ্যায়ে অসীম শ্রেণী সম্পর্কে ধারণার সূচনা করা হইয়াছে। বর্তমান অধ্যায়ে সাধারন আকারে দ্বিপদ উপপাদ্য বিনা প্রমাণে বিবৃত করা হইবে এবং দ্বাদশ অধ্যায়ে সূচক ও লগারিদম্ শ্রেণী বিবৃত হইবে। এইগুলি প্রমাণের জন্য উচ্চ কলন বা 'ক্যালকুলাসে' জ্ঞান থাকা একান্ত প্রয়োজন। সুতরাং ইহাদের রীতি-সম্মত প্রমাণ দিবার কোন চেষ্টা করা হইবে না। কিন্তু ইহাদের ব্যবহারিক প্রয়োগ সম্পর্কে অনায়াসে অনুশীলন করা যায়। সমগ্র অধ্যায়টিকে এই প্রয়োগ বিষয়েই নিবদ্ধ রাখা হইবে।

৪·2. অসীম দ্বিপদ শ্রেণী (Infinite Binomial Series)

1. m ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে এবং x এর যে কোন মানে সসীম শ্রেণী, যথা :

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots+x^m\cdots \quad (1)$$

এর একটি যোগফল আছে এবং উহা $(1+x)^m$; শ্রেণীটির শেষ $(m+1)$ তম পদে, কারণ ইহার পরবর্তী প্রত্যেক পদের সহগে $(m-m)$ এই উৎপাদক অর্থাৎ শূন্য থাকিবে, যেহেতু $(m+1)$ তম পদের সহগ হইল

$$\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-\overline{m-1})}{\lfloor m}.$$

2. m এর সকল **বাস্তব মানের জন্য**, অসীম শ্রেণী, যথা :

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots$$

$$\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-r+1)}{\lfloor r}x^r+\cdots\cdots \quad (2)$$

বা, $1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-r+1)}{\lfloor r}x^r$

হইল **অভিসারী**, যদি $-1<x<1$ (অর্থাৎ যদি $|x|<1$) হয়। অভিসারী যখন হয়, তখন শ্রেণীটির একটি **সমষ্টি** থাকে (অসীম পদ পর্যন্ত সমষ্টি বলিয়াও কথিত) এবং উহা $(1+x)^m$ এর ধনাত্মক মানের সহিত সমান। সুতরাং ইহা তখন লেখা যায় যে

$$(1+x)^m=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-r+1)}{\underline{|r}}x^r,\ (-1<x<1).$$

ইহাই হইল **দ্বিপদ উপপাদ্যের** সাধারণ রূপ। অসীম শ্রেণী (2) কে বলা হয় **দ্বিপদ শ্রেণী** (Binomial series)। ইহার সহিত আরও বলিতে হয় যে $x=1$ হইলে দ্বিপদ উপপাদ্যটি সত্য হইবে, **কেবল যখন** $m>-1$, এবং $x=-1$ হইলে উহা সত্য হইবে, **যখন কেবল** $m>0$.

প্রসঙ্গত ছাত্রছাত্রীদের স্মরণ করাইয়া দেওয়া যাইতেছে যে

"$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots$ এই অসীম শ্রেণীর অসীম পদ পর্যন্ত সমষ্টি হইল $(1+x)^m$," এই উক্তির তাৎপর্য হইল নিম্নরূপ, যথা :

শ্রেণীটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $=S_n$ হইলে, অসীম পদ পর্যন্ত সমষ্টি বলিতে বুঝায় S_n এর সীমাস্থ মান (limit of S_n), যখন $n\to\infty$.

$$\therefore (1+x)^m=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-r+1)}{\underline{|r}}x^r.$$

মন্তব্য :

1. যদিও সূচক m এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য দ্বিপদ উপপাদ্যটি বিবৃত করা হইয়াছে, তথাপি বর্তমান গ্রন্থে m এর কেবল মূলদ মানই উল্লিখিত হইবে ; m এর অমূলদ মানের বিষয় বিবেচনা করা হইবে না।

2. বিশেষ সতর্কতার সহিত ইহা লক্ষ্য রাখিতে হইবে যে $(1+x)^m$ এর (2) এর আকারে বিস্তৃতি পাওয়া যায়, কেবল যখন $-1<x<1$ (বা $|x|<1$) হয়, এবং যখন $x=\pm1$, তখন m এর মানেরও সীমাবদ্ধতা থাকিবে। যদি $x>1$ বা $x<-1$ হয়, তবে দ্বিপদ শ্রেণীর কোন **সমষ্টি নাই** (অর্থাৎ শ্রেণীটি অভিসারী নহে)।

3. নিম্নলিখিত পদ, যথা :

$$\frac{m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-r+1)}{r!}x^r \text{ কে}$$

শ্রেণীটির সাধারণ পদ বা $(r+1)$ তম পদও বলা হয়।

4. ^mC_r এর প্রচলিত অর্থ (অর্থাৎ m সংখ্যক বস্তু হইতে rটি করিয়া লইয়া সমবায়ের সংখ্যা) অনুসারে এই অঙ্কপাতন (notation) **ব্যবহার করা যায় না**, যদি m ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা না হয়। কিন্তু যদি নিম্নের সাঙ্কেতিক পদ্ধতি স্বীকার করিয়া লওয়া হয়, যথা :

$$\binom{m}{r}=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-r+1)}{r\,!}, \quad (r\geqslant 1),$$

তবে m ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা না হইলেও দ্বিপদ বিস্তৃতিকে নিম্ন আকারে লিখিতে পারা যায়, যথা :

$$1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\binom{m}{3}x^3+\cdots\cdots+\binom{m}{r}x^r+\cdots\cdots$$

5. ভবিষ্যৎ প্রসঙ্গের জন্য নিম্নলিখিত বিস্তৃতিগুলি সযত্নে স্মরণ রাখিতে হইবে :

(i) $(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-1)^r x^r + \cdots\cdots \; (\,|\,x\,|<1).$

(ii) $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^r + \cdots\cdots \; (\,|\,x\,|<1).$

(iii) $(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots\cdots+(-1)^r(r+1)x^r + \cdots\cdots \; (\,|\,x\,|<1).$

(iv) $(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots+(r+1)x^r + \cdots\cdots \; (\,|\,x\,|<1).$

(v) $(1+x)^{-3}=1-3x+6x^2-10x^3+\cdots\cdots + (-1)^r\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}x^r+\cdots \; (\,|\,x\,|<1).$

(vi) $(1-x)^{-3}=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots\cdots + \frac{(r+1)(r+2)}{1.2}x^r+\cdots\cdots \; (\,|\,x\,|<1).$

(vii) $(1+x)^{-n}=1-nx+\frac{n(n+1)}{2\,!}x^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{3\,!}x^3+\cdots\cdots + (-1)^r\frac{n(n+1)\cdot(n+r-1)}{r\,!}x^r+\cdots\cdots \; (\,|\,x\,|<1)$

(viii) $(1-x)^{-n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{2\,!}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{3\,!}x^3+\cdots\cdots \cdots+\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r\,!}x^r+\cdots\cdots \; (\,|\,x\,|<1).$

(ix) $(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\cdots$

$$\cdots+(-1)^r\frac{1.3.5.7\cdots\cdots(2r-1)}{2.4.6.8\cdots\cdots 2r}x^r+\cdots\cdots(|x|<1).$$

(x) $(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\cdots$

$$\cdots+\frac{1.3.5.7\cdots\cdots(2r-1)}{2.4.6.8\cdots\quad 2r}x^r+\cdots\cdots(|x|<1).$$

(xi) $(1+x)^{-(p/q)}$

$$=1-p\cdot\left(\frac{x}{q}\right)+\frac{p(p+q)}{\lfloor 2}\left(\frac{x}{q}\right)^2-\frac{p(p+q)(p+2q)}{\lfloor 3}\left(\frac{x}{q}\right)^3+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^r\frac{p(p+q)\cdots(p+\overline{r-1}q)}{\lfloor r}\left(\frac{x}{q}\right)^r+\cdots\cdots(|x|<1)$$

(xii) $(1-x)^{-(p/q)}=1+p\left(\frac{x}{q}\right)+\frac{p(p+q)}{\lfloor 2}\left(\frac{x}{q}\right)^2+\frac{p(p+q)(p+2q)}{\lfloor 3}\left(\frac{x}{q}\right)^3+$

$$\cdots\cdots+\frac{p(p+q)\cdots(p+\overline{r-1}q)}{\lfloor r}\left(\frac{x}{q}\right)^r+\cdots\cdots(|x|<1).$$

টীকা। 1. (xi) বা (xii)তে লক্ষ্য কর যে সহগগুলির লবসমূহের উৎপাদকগুলি A.P. তে আছে, যাহার প্রথম পদ p এবং সাধারণ অন্তর q ; পরে ঋণাত্মক খণ্ড সূচকের ক্ষেত্রে দ্বিপদ শ্রেণীকে চিনিতে ইহা সাহায্য করিবে : সূচকটি হইবে $-\frac{A.P \text{ র প্রথম পদ}}{\text{সাধারণ অন্তর}}$. [অনুচ্ছেদ 8·3 এর উদা. 5 দ্রষ্টব্য।]

2. উপরের ফলগুলি যাচাই করিয়া দেখিতে ছাত্রছাত্রীদের পরামর্শ দেওয়া যাইতেছে। নীচে দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ হিসাবে ইহাদের কতিপয়ের প্রমাণ দেওয়া হইল।

8·3. প্রয়োগসমূহ

উদা. 1. নিম্নের প্রতি ক্ষেত্রে $|x|<1$ ধরিয়া দ্বিপদ শ্রেণীগুলি লিখ :

$$(1+x)^{-3}, (1-x)^{-3}, (1+x)^{-\frac{1}{2}}, (1-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

(i) $(1+x)^{-3}=1+(-3)x+\frac{(-3)(-3-1)}{2!}x^2$

$$+\frac{(-3)(-3-1)(-3-2)}{3!}x^3+\cdots$$

$$\cdots+\frac{-3(-3-1)(-3-2)\cdots(-3-r+1)}{r!}x^r+\cdots$$

$$=1-3x+(-1)^2\frac{3.4}{1.2}x^2+(-1)^3\frac{3.4.5}{1.2.3}x^3+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^r.\frac{3.4.5\ldots r(r+1)(r+2)}{1.2.3.4.\cdots r}x^r+\cdots$$

$$=1-3x+6x^2-10x^3+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}x^r+\cdots$$

(ii) $$(1-x)^{-3}=1+(-3)(-x)+\frac{-3(-3-1)}{2\,!}(-x)^2$$

$$+\frac{-3(-3-1)(-3-2)}{3\,!}(-x)^3+\cdots$$

$$\cdots+\frac{-3(-3-1)(-3-2)\quad(-3-r+1)}{r\,!}(-x)^r\cdots$$

$$=1+3x+\frac{3.4}{1.2}x^2+\frac{3.4.5}{1.2.3}x^3+\cdots$$

$$+(-1)^{2r}\frac{3.4.5\cdots r(r+1)(r+2)}{r!}x^r+\cdots$$

$$=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots$$

$$+\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}x^r+\cdots$$

(iii) $$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1+(-\tfrac{1}{2})x+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2$$

$$+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots(-\frac{1}{2}-r+1)}{r!}x^r+\cdots$$

$$=1-\tfrac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}x^2-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1\,2.3}x^3+\cdots$$

$$+\frac{(-1)^r\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2r-1}{2}}{1.2\,3.\cdots r}x^r+\cdots$$

$$=1-\tfrac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^r.\frac{1.3.5.\cdots(2r-1)}{2.4.6.\cdots 2r}x^r+\cdots$$

(iv) $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$: সাধারণ পদটি প্রথমে প্রদর্শিত হইল : সাধারণ বা $(r+1)$ তম পদ

$$=\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots\cdots(-\frac{1}{2}-r+1)}{\lfloor r}(-x)^r$$

$$=(-1)^r.\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}\cdots\cdots\frac{2r-1}{2}}{1.2.3.\cdots\cdots r}.(-1)^r x^r$$

$$=(-1)^{2r}\frac{1.3.5.\cdots\cdots(2r-1)}{2.4.6.\cdots\quad 2r}x^r$$

$$=\frac{1.3.5.\cdots\cdots(2r-1)}{2.4.6.\cdots\cdots 2r}x^r.$$

সুতরাং দেখা যায় যে শ্রেণীটি (iii)এর শ্রেণীরই অনুরূপ হইবে, পার্থক্য কেবল এই যে এক্ষেত্রে সমুদয় পদ ধনাত্মক।

উদা. 2. $(x+a)^m$ এর বিস্তৃতি, যেখানে m হইল যে কোন বাস্তব সংখ্যা।

ক্ষেত্র 1. যদি $\left|\frac{x}{a}\right|<1$, অর্থাৎ যদি $|x|<|a|$

অর্থাৎ যদি $-|a|<x<|a|$ হয়, তবে

$$(x+a)^m=a^m\left(1+\frac{x}{a}\right)^m=a^m\left\{1+m\frac{x}{a}+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{x^2}{a^2}+\cdots\cdots\right\};$$

ক্ষেত্র 2. যদি $\left|\frac{x}{a}\right|>1$, অর্থাৎ যদি $\left|\frac{a}{x}\right|<1$ হয়, তবে

$$(x+a)^m=x^m\left(1+\frac{a}{x}\right)^m=x^m\left\{1+m\frac{a}{x}+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{a^2}{x^2}+\cdots\cdots\right\}.$$

প্রতিটি ক্ষেত্রে $(r+1)$তম পদটি লেখা প্রয়োজন।

টীকা। ক্ষেত্র 1এ বিস্তৃতিটি বৈধ (valid), যদি a^m বিদ্যমান হয় এবং ক্ষেত্র 2এ বিস্তৃতি বৈধ, যদি x^m বিদ্যমান হয়। প্রথমটি হইল $(x+a)^m$ এর x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমে সজ্জিত বিস্তৃতি এবং দ্বিতীয়টি হইল a এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমে সজ্জিত বিস্তৃতি।

উদা. 3. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর, যখন $x>1$.

এখানে $x>1$, অর্থাৎ $0<\frac{1}{x}<1$.

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{x}\left\{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{x^4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{x^6}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{x^5}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{x^7}+\cdots\cdots$$

সাধারণ পদ $=\frac{1}{x}(-1)^r\,\frac{1.3.5.\cdots\cdots(2r-1)}{2.4.6.\cdots\cdots 2r}\cdot\frac{1}{x^{2r}}$

$$=(-1)^r\frac{1.3.5\cdots\cdots(2r-1)}{2.4.6\cdots\cdots 2r}\cdot\frac{1}{x^{2r+1}}.$$

উদা. 4. $(1+2x)^{5/3}$ এর $(r+1)$ তম পদ নির্ণয় কর, প্রদত্ত $|x|<\frac{1}{2}$.

এখানে $|2x|<1$; সুতরাং বিস্তৃতিটি বৈধ হইবে।

$\therefore\quad (r+1)$ তম পদ $=\dfrac{\frac{5}{3}(\frac{5}{3}-1)(\frac{5}{3}-2)\cdots(\frac{5}{3}-r+1)}{\lfloor r}(2x)^r$

$$=\frac{5.2.(-1)(-4)(-7)\cdots(-\overline{3r-8})}{\lfloor r}\left(\tfrac{2}{3}x\right)^r$$

$$=(-1)^{r-2}\,5.2.\frac{1.4.7\cdots(3r-8)}{\lfloor r}\left(\tfrac{2}{3}x\right)^r,\ (r>2)$$

প্রথম পদ দুইটি হইবে 1 এবং $5.(\frac{2}{3}x)$.

উদা. 5. নিম্নের শ্রেণীটির অসীম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর :

$$1+\frac{10}{9}+\frac{10.16}{9.18}+\frac{10.16.22}{9.18.27}+\cdots\cdots$$

[**সাধারণ রীতি-বহির্ভূত পদ্ধতি (Informal approach) :** লবসমূহের উৎপাদকগুলি A.P.তে আছে, যাহার প্রথম পদ 10 এবং সাধারণ অন্তর 6 ; সুতরাং সূচক $=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3}$ লওয়া যায়। যেহেতু দ্বিতীয় পদ $=\frac{10}{9}$, অতএব x এমন লইতে হইবে যেন $-\frac{5}{3}x=\frac{10}{9}$ হয়, অর্থাৎ $x=-\frac{2}{3}$; সুতরাং শ্রেণীটির সমষ্টি হওয়া উচিত $(1-\frac{2}{3})^{-\frac{5}{3}}$.]

লক্ষ্য করা হইল যে লবসমূহের উৎপাদকগুলি A.P.তে আছে, যাহার সাধারণ অন্তর 6 ; ইহাদের প্রত্যেককে 6 দ্বারা ভাগ করা হইল। আবার হরগুলির

উৎপাদকগুলিও A.P.তে আছে, যাহার সাধারণ অন্তর 9 ; প্রত্যেক হরকে 9 দ্বারা ভাগ করা হইল। তাহা হইলে

$$\text{প্রদত্ত শ্রেণী} = 1 + \frac{\frac{10}{6}}{\frac{9}{9}}\cdot\frac{6}{9} + \frac{\frac{10}{6}\cdot\frac{16}{6}}{\frac{9}{9}\cdot\frac{18}{9}}\cdot\left(\frac{6}{9}\right)^2 + \frac{\frac{10}{6}\cdot\frac{16}{6}\cdot\frac{22}{6}}{\frac{9}{9}\cdot\frac{18}{9}\cdot\frac{27}{9}}\cdot\left(\frac{6}{9}\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{-5/3}{\lfloor 1}\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{(-5/3)(-5/3-1)}{\lfloor 2}\left(-\frac{2}{3}\right)^2$$

$$+ \frac{(-5/3)(-5/3-1)(-5/3-2)}{\lfloor 3}\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-5/3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-5/3} = (3)^{5/3} = \sqrt[3]{3^5} = 3\sqrt[3]{9}.$$

উদা. 6. ছয় দশমিক স্থান পর্যন্ত $\sqrt{2}$ এর মান নির্ণয় কর (দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে)।

যেহেতু $100 - 2 = 98 = 7^2.2$

$$\therefore\ 7\sqrt{2} = 10(1 - 0.02)^{\frac{1}{2}}$$

বা, $$\sqrt{2} = \frac{10}{7}\left[1 - \frac{1}{2}(0.02) - \frac{1}{8}(0.02)^2 - \frac{1}{16}(0.02)^3 - \cdots\right]$$

$$= \frac{10}{7}[1 - 0.01 - 0.00005 - 0.0000005 - \cdots]$$

$$= \frac{10}{7} \times 0.9899495 = \frac{9.899495}{7}$$

$$= 1.4142135\ldots$$

$= 1.414214$ (6 দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান)।

উদা. 7. যদি x বৃহৎ সংখ্যা হয়, তবে $\sqrt{(x^2+1)} - \sqrt{(x^2-1)}$ এর আসন্ন মান নির্ণয় কর।

$(x^2+1)^{\frac{1}{2}} = x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx x\left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4}\right)$, $\left[\frac{1}{x^6}\right.$ প্রভৃতি নগণ্য হিসাবে বাতিল করিয়া]

$$\approx x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3}$$

$$(x^2-1)^{\frac{1}{2}} \approx x - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3}$$

$\therefore\ \sqrt{(x^2+1)} - \sqrt{(x^2-1)} \approx \frac{1}{x}$, $\left[\frac{1}{x^5}\right.$ প্রভৃতিকে বাতিল করিয়া]।

উদা. 8. যদি q এর সহিত তুলনায় $p-q$ ক্ষুদ্র হয়, তবে $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$ এর আসন্ন মান নির্ণয় কর।

$$\frac{p}{q}=\left(1+\frac{p-q}{p+q}\right)\div\left(1-\frac{p-q}{p+q}\right);$$

$$\therefore\ \sqrt[n]{\frac{p}{q}}=\left(1+\frac{p-q}{p+q}\right)^{\frac{1}{n}}\div\left(1-\frac{p-q}{p+q}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$=\left\{1+\frac{p-q}{n(p+q)}\right\}\div\left\{1-\frac{p-q}{n(p+q)}\right\}$$

$$\therefore\ \sqrt[n]{\frac{p}{q}}=\frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q}.$$

অনুসিদ্ধান্ত। যদি $p-q=qx$ ধরা হয়, যেখানে x ক্ষুদ্র, তবে উপরের সম্পর্ক হইতে পাওয়া যায় :

$$\sqrt[n]{(1+x)}=\frac{2n+(n+1)x}{2n+(n-1)x}.$$

উদা. 9. $\sqrt{(1+2x)^7}$ এর বিস্তৃতিতে কোন্ পদটি প্রথম ঋণাত্মক হইবে ?

সাধারণ পদ [অর্থাৎ $(r+1)$ তম পদ] $=\dfrac{\frac{7}{2}(\frac{7}{2}-1)(\frac{7}{2}-2)\cdots(\frac{7}{2}-r+1)}{\lfloor r}\cdot 2^r x^r$

পদগুলি ধনাত্মক থাকিবে, যতক্ষণ $\frac{7}{2}+1>r$, অর্থাৎ $r<4\frac{1}{2}$ হইবে।

$\therefore$ পদটি প্রথম ঋণাত্মক হইবে যখন $r=5$ হইবে,

অর্থাৎ বিস্তৃতিতে প্রথম ঋণাত্মক পদটি হইল $(5+1)$ বা **ষষ্ঠ পদ**।

উদা. 10. $(1+x)^{-n}$ এর বিস্তৃতিতে সাংখ্যমান হিসাবে বৃহত্তম পদ নির্ণয় কর, যখন $x=\frac{2}{3}$ এবং $n=20$.

এখানে $\dfrac{t_{r+1}}{t_r}=\dfrac{n+r-1}{r}x$ (সাংখ্যমান হিসাবে)

$$=\frac{19+r}{r}\cdot\frac{2}{3}$$

$\therefore$ $t_{r+1}>t_r$, যতক্ষণ $38+2r>3r$, অর্থাৎ $r<38$

$\therefore$ $r=37$ পর্যন্ত r এর সকল মানের জন্য $t_{r+1}>t_r$; কিন্তু যদি $r=38$ হয়, তবে $t_{r+1}=t_r$ এবং যখন $r>38$, তখন $t_{r+2}<t_{r+1}$ ইত্যাদি।

$\therefore$ $t_{38}=t_{39}$ এবং এই দুইটিই হইল বৃহত্তম পদ **(সাংখ্যমান হিসাবে)**।

উদা. 11. দেখাও যে $\dfrac{(1+\frac{2}{3}x)^{-5}+\sqrt{4+2x}}{\sqrt{(4+x)^3}}\simeq\dfrac{1}{8}\left(3-\dfrac{95}{24}x\right)$,

(x^2, x^3 প্রভৃতি বাতিল করিয়া)

প্রদত্ত রাশি $\simeq\dfrac{(1-\frac{10}{3}x)+2(1+\frac{1}{4}x)}{8(1+\frac{3}{8}x)}$, [যেহেতু x^2 এবং x এর উচ্চতর ঘাতযুক্ত পদ বাতিল করা যায়, সুতরাং প্রতিটি দ্বিপদ বিস্তৃতির প্রথম দুইটি পদ লইলেই যথেষ্ট হইবে।]

$$=\tfrac{1}{8}(3-\tfrac{17}{6}x)(1+\tfrac{3}{8}x)^{-1}$$

$$=\tfrac{1}{8}(3-\tfrac{17}{6}x)(1-\tfrac{3}{8}x)$$

$$=\tfrac{1}{8}(3-\tfrac{95}{24}x),$$ [x^2 যুক্ত পদ বাতিল করিয়া]

উদা. 12. $\dfrac{(1-2x)^2}{(1+x)^3}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি $=(1-4x+4x^2)(1+x)^{-3}$

$$=(1-4x+4x^2)\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}x^r\Big)$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিতে x^r এর সহগ $=1\times(1+x)^{-3}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $-4\times(1+x)^{-3}$ এর বিস্তৃতিতে x^{r-1} এর সহগ $+4\times(1+x)^{-3}$ এর বিস্তৃতিতে x^{r-2} এর সহগ

$$=(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)}{2}-4(-1)^{r-1}.\frac{r(r+1)}{2}+4(-1)^{r-2}.\frac{(r-1)r}{2}$$

$$=\frac{(-1)^r}{2}\times(9r^2+3r+2).$$

উদা. 13. অসীম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর :

$$\frac{5}{3.6}+\frac{5.7}{3.6.9}+\frac{5.7.9}{3.6.9.12}+\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

লক্ষ্য করা হইল যে প্রতি পদে লবের উৎপাদক সংখ্যা, হরের উৎপাদক সংখ্যা অপেক্ষা একটি কম; এইজন্য প্রত্যেক পদের লবকে 3 (হরের উৎপাদক-সমূহ যে A.P.তে আছে, 3 তাহার সহিত অন্তর্গত করা হইল) দ্বারা গুণ করা

হইল ও সমগ্র শ্রেণীটিকে 3 দ্বারা ভাগ করিয়া শ্রেণীটির পূর্বতন মান অক্ষুণ্ণ রাখা হইল। সুতরাং

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{1}{3}\left[\frac{3.5}{3.6} + \frac{3.5.7}{3.6.9} + \frac{3.5.7.9}{3.6.9.12} + \cdots \quad \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{\frac{3}{3}\cdot\frac{6}{3}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{\frac{3}{3}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{9}{3}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots \quad \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left\{1 + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\right\} + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{\frac{3}{3}\cdot\frac{6}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{\frac{3}{3}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{9}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots \quad \cdots\right\}$$

$$-\left\{1 + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[1 + \left(-\tfrac{3}{2}\right)\left(-\tfrac{2}{3}\right) + \frac{-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}-1\right)}{\lfloor 2}\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right.$$

$$\left. + \frac{-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}-1\right)\left(-\frac{3}{2}-2\right)}{\lfloor 3}\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots \quad \cdots - \left\{1 + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} - 2\right] = \frac{1}{3}\left(3\sqrt{3} - 2\right).$$

প্রশ্নমালা VIII (A)

[প্রয়োজন বোধে যে কোন স্থানে বিস্তৃতির বৈধতা ধরিয়া লওয়া যাইবে।]

[A]

1. প্রথম 4টি পদ পর্যন্ত নিম্নলিখিত দ্বিপদ বিস্তৃতিগুলি নির্ণয় কর (প্রতি ক্ষেত্রে সাধারণ পদও দিতে হইবে) :

(*i*) $(1+x)^{-4}$, যদি $|x| < 1$; (*ii*) $(2+x)^{3}$, যদি $|x| < 2$;
(*iii*) $(9-6x)^{-3/2}$, যদি $|x| < \frac{3}{2}$;

(*iv*) $(4a-8x)^{-\frac{1}{2}}$, যদি $|x| < \frac{|a|}{2}$.

2. সরল আকারে লিখ :

(*i*) $(2^{10}-2^{7}x)^{-\frac{13}{2}}$ এর 14তম পদ, যেখানে $|x| < 8$.

(*ii*) $(3^{8}+6^{4}x)^{-\frac{11}{4}}$ এর 7ম পদ, যেখানে $|x| < \frac{81}{16}$.

(*iii*) $(1-2x^{3})^{\frac{11}{2}}$ এর 11তম পদ, যেখানে $|x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

3. যদি n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে $(1+x)^{2n}$এর মধ্যম পদ এবং $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ এর $(n+1)$ তম পদ অভিন্ন, যেখানে $|x|<\frac{1}{4}$.

4. প্রমাণ কর যে $(1-x)^{-m-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ, $(1-x)^{-r-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^m এর সহগের সমান, যেখানে প্রতি ক্ষেত্রে $|x|<1$.

5. নিম্নের প্রতি ক্ষেত্রে পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর :

(i) $\sqrt{98}$; (ii) $\sqrt[3]{998}$; (iii) $\sqrt[3]{1003}$; (iv) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{128}}$;

(v) $(630)^{-3/4}$; (vi) $\sqrt[5]{3128}$; (vii) $\sqrt[3]{599}$.

6. যদি x ক্ষুদ্র হয়, তবে নিম্নের প্রতি ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে বামপক্ষের আসন্ন মান হইল দক্ষিণ পক্ষ :

(i) $(1-x)^{-\frac{1}{2}}-(1+x)^{\frac{1}{2}}\simeq\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^3$.

(ii) $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\simeq1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3$.

(iii) $\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}\simeq1+\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}x^2+\frac{22}{81}x^3$.

(iv) $\sqrt{(1-3x+2x^2)}\simeq1-\dfrac{3x}{2}-\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{3x^3}{16}$.

7. যদি x এরূপ বৃহৎ হয় যে $\dfrac{1}{x^4}$কে নগণ্য ধরা যায়, তবে $\dfrac{x\sqrt{(x^2-2x)}}{(x+1)^2}$ এর আসন্ন মান নির্ণয় কর।

8. যদি b^2 এর তুলনায় ac ক্ষুদ্র হয় তবে দেখাও যে $ax^2+bx+c=0$ এর বীজ দুইটির আসন্ন মান হইল $-\dfrac{c}{b}-\dfrac{ac^2}{b^3}$ এবং $-\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{ac^2}{b^3}$.

[B]

1. প্রমাণ কর যে

$$\sqrt{8}=1+\frac{3}{4}+\frac{3.}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\cdots$$

2. প্রমাণ কর যে

$$\sqrt{\tfrac{2}{3}}=1-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots$$

3. প্রমাণ কর যে

$$7^n\{1+\frac{n}{7}+\frac{n(n-1)}{7.14}+\frac{n(n-1)(n-2)}{7.14.21}+\cdots\cdots$$
$$=4^n\{1+\frac{n}{2}+\frac{n(n+1)}{2.4}+\frac{n(n+1)(n+2)}{2.4.6}+\cdots\cdots\}.$$

4. প্রমাণ কর যে

$$1+\frac{2n}{3}+\frac{2n(2n+2)}{3.6}+\frac{2n(2n+2)(2n+4)}{3.6.9}+\cdots\cdots$$
$$=2^n\{1+\frac{n}{3}+\frac{n(n+1)}{3.6}+\frac{n(n+1)(n+2)}{3.6.9}+\cdots\cdots\}.$$

5. যদি n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হয়, তবে দেখাও যে $(5+2\sqrt{6})^n$ এর অখণ্ড অংশ অযুগ্ম।

[$I+F=(5+2\sqrt{6})^n=5^n+{}^nC_1 5^{n-1}.\, 2\sqrt{6}+{}^nC_2 5^{n-2}.\,(2\sqrt{6})^2+\cdots$;

এখন $5-2\sqrt{6}$ ধনাত্মক এবং 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, সুতরাং $(5-2\sqrt{6})^n$ হইল একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ, ধরা যাক F' ;

যেহেতু $F'=5^n-{}^nC_1 5^{n-1}.\, 2\sqrt{6}+{}^nC_2 5^{n-2}.\,(2\sqrt{6})^2-\cdots\cdots$,

$\therefore\;\; I+F+F'=2\{5^n+{}^nC_2 5^{n-2}(2\sqrt{6})^2+\cdots\cdots\}$

= একটি অখণ্ড যুগ্ম সংখ্যা।

কিন্তু I অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা এবং F, F' প্রত্যেকে ধনাত্মক প্রকৃত ভগ্নাংশ ; সুতরাং F ও F' এর সমষ্টি একটি অখণ্ড সংখ্যা এবং উহা অবশ্যই 1, যাহা অযুগ্ম ;

$\therefore$ I অবশ্যই একটি অযুগ্ম সংখ্যা।]

6. দেখাও যে $(8+3\sqrt{7})^n$ এর অখণ্ড অংশ অযুগ্ম, যদি n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হয়।

7. প্রমাণ কর যে $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ

1, 0, -1 হইবে, যদি n এর আকার যথাক্রমে $3m$, $3m-1$, $3m+1$ হয়।

8. $\dfrac{2+x+x^2}{(1+x)^3}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর।

9. নিম্নে শ্রেণীটির অসীম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর :

$$2+\frac{5}{\lfloor 2.3}+\frac{5.7}{\lfloor 3.3^2}+\frac{5.7.9}{\lfloor 4.3^3}+\cdots\cdots$$

[C]

1. যদি x এরূপ ক্ষুদ্র হয় যে ইহার বর্গ এবং উচ্চতর ঘাতগুলিকে নগণ্য হিসাবে বাতিল করা যায়, তবে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

(i) $\sqrt{4-x}\cdot\left(3-\frac{x}{2}\right)^{-1}$;   (ii) $\dfrac{(1+\frac{2}{3}x)^{-5}.(4+3x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(4+x)^3}}$

(iii) $\dfrac{\sqrt[3]{8+3x}-\sqrt[5]{1-x}}{(1+5x)^{3/5}+\left(4+\frac{x}{2}\right)^{1/2}}$;   (iv) $\dfrac{(1+x)^{3/4}+\sqrt{1+5x}}{(1-x)^2}$.

2. প্রমাণ কর যে

(i) $1+\frac{1}{4}+\frac{1.4}{4.8}+\frac{1.4.7}{4.8.12}+\cdots\cdots=\sqrt[3]{4}$.

(ii) $1+\frac{5}{8}+\frac{5.8}{8.12}+\frac{5.8.11}{8.12.16}+\cdots\cdots=4\sqrt[3]{2}-2$.

[**ইঙ্গিত** : উদাহরণ 13 দ্রষ্টব্য।]

3. নিম্নে প্রদত্ত প্রতিটির বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর ($|x|<1$) :

(i) $(1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots)^{\frac{2}{3}}$.

(ii) $(1-3x+6x^2-10x^3+\cdots\cdots)^{\frac{1}{6}}$.

(iii) $(1-2x+3x^2-4x^3+\cdots\cdots)^{-n}$.

4. যদি $y=2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots\cdots$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$x=\frac{1}{2}y-\frac{1.3}{2.4}y^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}y^3-\cdots\cdots$$

5. নিম্নের বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর :

(i) $(1-nx)^{-\frac{1}{n}}$;   (ii) $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$

6. দেখাও যে $\sqrt{2}=\frac{7}{5}\left\{1+\frac{1}{10^2}+\frac{1.3}{1.2}\cdot\frac{1}{10^4}+\frac{1.3.5}{1.2.3}\cdot\frac{1}{10^6}+\cdots\cdots\right\}$.

7. প্রমাণ কর যে $(1-x)^{1/2}$ এর বিস্তৃতির প্রথম $(r+1)$ সহগের সমষ্টি হইল

$$\frac{1.3.5\cdots\cdots(2r-1)}{2^r\,\underline{|r}}.$$

8. নিম্নের বিস্তৃতিগুলিতে সাংখ্যমান হিসাবে বৃহত্তম পদ নির্ণয় কর :

(i) $(1-x)^{-\frac{14}{9}}$, যখন $x=\frac{29}{30}$;   (ii) $(4+13x)^{\frac{2}{3}}$, যখন $x=-\frac{8}{19}$.

9. প্রমাণ কর যে $\sqrt{x}=1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1.3}{2^2\lfloor 2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2+\cdots \quad \cdots$

10. দেখাও যে $\frac{x}{\sqrt{x+1}}=\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\cdots \quad \cdots$

$\left(x>-\frac{1}{2}\right)$.

[D]

1. অসীম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর :

(i) $1-\frac{1}{8}+\frac{1.5}{8.16}-\frac{1.5.9}{8.16.24}+\cdots \quad \cdots$

(ii) $1+\frac{5}{8}+\frac{5.8}{8.12}+\frac{5.8.11}{8.12.16}+\cdots \quad \cdots$

(iii) $1-\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}-\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots \quad \cdots$

(iv) $1+\frac{3}{2.4}+\frac{1.3.3^2}{2^2.4^2.\lfloor 2}+\frac{1.3.5.3^3}{2^3.4^3.\lfloor 3}+\cdots \quad \cdots$

(v) $1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{3^2}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots \quad \cdots$.

2. $(1+\frac{3}{125})^{\frac{1}{3}}$ এর বিস্তৃতির সাহায্য লইয়া পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত $\sqrt[3]{2}$ এর মান নির্ণয় কর।

3. গোলকের তলের ক্ষেত্রফল S বর্গ সে.মি. এবং গোলকের ঘনফল V ঘন সে.মি. এর মধ্যে সম্পর্ক হইল $S^3=36\pi V^2$; যদি সাবানের একটি গোলক আকার বুদ্বুদের ঘনফল 10% বৃদ্ধি করা হয়, তবে দেখাও যে উহার তলের ক্ষেত্রফল প্রায় 6·56% বৃদ্ধি পায়।

4. $t\sqrt{\frac{g}{l}}=k=T\sqrt{\frac{G}{L}}$ হয় এবং যদি l, g এর মানগুলি হইতে যথাক্রমে L, G এর মানগুলির পার্থক্য সামান্যমাত্র হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\frac{T-t}{T}\simeq\frac{1}{2}\left(\frac{L-l}{L}-\frac{G-g}{G}\right).$$

5. নিম্নের বিস্তৃতি দুইটিতে x^3 এর সহগ নির্ণয় কর :

$$\frac{(1-x)^2(1+x^2)^{1/3}}{(1-3x)^{1/4}}; \quad \frac{(2-x)^3(1+3x)^{1/2}}{(1+2x^2)^{3/4}}.$$

6. দেখাও যে

(i) $\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}(\frac{1}{4})+\frac{1.3.5}{2.4.6}(\frac{1}{4})^2+\cdots \quad \cdots \quad =\frac{4}{3}(2-\sqrt{3})\sqrt{3}.$

(ii) $1+\frac{2}{6}+\frac{2.5}{6.12}+\frac{2.5.8}{6.12.18}+\cdots \quad \cdots \quad =\sqrt[3]{4}.$

উত্তরমালা

[A]

1. (i) $1-4x+10x^2-20x^3+\cdots\cdots$; $(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{3\,!}$.

(ii) $\frac{1}{8}\left[1-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x^2-\frac{5x^3}{4}+\cdots\cdots\right]$; $(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)}{2^{4+r}}x^r$.

(iii) $\frac{1}{27}\left[1+x+\frac{5x^2}{6}+\frac{35}{54}x^3+\cdots\cdots\right]$; $\frac{3.5.7\cdots\cdots(2r+1)}{\lfloor r}\cdot\frac{1}{3^{3+r}}\cdot x^r$.

(iv) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[1+\frac{x}{a}+\frac{3x^2}{2a^2}+\frac{5x^3}{2a^3}+\cdots\cdots\right]$; $\frac{1.3.5.7\cdots\cdots(2r-1)}{2\lfloor r}\cdot\frac{x^r}{a^{r+\frac{1}{2}}}$.

2. (i) $-1848x^{13}$; (ii) $-19712\frac{x^6}{3}$; (iii) $\frac{77}{256}x^{30}$.

5. (i) 9·89949 ; (ii) 9·99333 ; (iii) 10·00999 ;
(iv) 0·19842 ; (v) 0·00795 ; (vi) 5·00096 ; (vii) 9·99667.

7. $1-\frac{3}{x}+\frac{9}{2x^2}-\frac{13}{2x^3}$.

[B]

8. $(-1)^n(n^2+2n+2)$. 9. $3\sqrt{3}$.

[C]

1. (i) $\frac{2}{3}\left(1+\frac{x}{24}\right)$; (ii) $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}x$; (iii) $\frac{1}{3}-\frac{71}{360}x$;

(iv) $2+\frac{29}{4}x+\frac{297}{32}x^2$ (শেষ পদটি বাতিল করা যাইতে পারে)।

3. (i) $\frac{2.5.8.\cdots(3n-1)}{n\,!}\cdot\frac{1}{3^n}$; (ii) $(-1)^n\frac{1.3.5.7\cdots(2n-1)}{n\,!}\cdot\frac{1}{2^n}$;

(iii) $\lfloor 2n/(\lfloor n\lfloor n)$.

5. (i) $\frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)\cdots\{(r-1)n+1\}}{\lfloor r}$; (ii) $\lfloor 2r/(\lfloor r.\lfloor r)$.

8. (i) 17তম পদ ; (ii) 7ম পদ ;

[D]

1 (i) $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$; (ii) $4\sqrt[3]{2}-2$; (iii) $\sqrt{\frac{8}{27}}$; (iv) 2 ; (v) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. 1·25992. 5. $\frac{263}{384}$; 35.

9

লগারিদ্‌ম্ (LOGARITHM)

9·1. সূচনা।

$a^x=b$ এই আকারের সম্পর্ককে প্রকাশ করিবার সর্বাপেক্ষা উল্লেখযোগ্য ও কার্যকরী পদ্ধতিগুলির অন্যতম হইল, যাহাকে বলা হয় লগারিদ্‌মিক্ (logarithmic) আকার। লগারিদ্‌ম্-এর কার্যকারিতা অনেক। ইহার একটি হইল, পাটীগাণিতীয় হিসাব কার্যের যে পরিশ্রম তাহাকে লঘু করা—অধিকাংশে এই বিশেষ কার্যকারিতা সংশ্লিষ্ট আলোচনাই বর্তমান অধ্যায়ের অন্তর্গত বিষয়।

9·2. লগারিদ্‌ম্-এর সংজ্ঞা

I. যদি $a^x=b$ হয়, যেখানে b ধনাত্মক সংখ্যা এবং a ও এক ভিন্ন (অর্থাৎ $\neq 1$) যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা, তবে সূচক (exponent) x কে a নিধান (base) সম্পর্কে b এর লগারিদ্‌ম্ বলা হয় এবং লেখা হয় যে

$$x=\log_a b$$

এস্থলে সতর্কতার সহিত ইহা লক্ষ্য করিতে হইবে যে নিম্নের উক্তি দুইটির, যথা:

সূচক সংশ্লিষ্ট আকার : $a^x=b$ ⋯ ⋯ (1)

এবং লগারিদ্‌মিক্ আকার : $x=\log_a b$ ⋯ ⋯ (2), এর অর্থ একই।

II. (1) অথবা (2) এর b সংখ্যাটিকে নিধান a সম্পর্কে x এর অ্যান্টিলগারিদ্‌ম্ (antilogarithm) বলা হয় এবং লেখা হয় যে

$$b=\text{antilog}_a x$$

টীকা। 10 নিধান সম্পর্কে 3 এর অ্যাণ্টিলগারিদ্‌ম্ এর অর্থ হইল এমন একটি সংখ্যা যাহার 10 নিধান সম্পর্কে লগারিদ্‌ম্ হইবে 3.

উদা. 1. যেহেতু $10^3=1000$, (সূচকযুক্ত আকার)

সুতরাং লেখা যায় যে, $3=\log_{10} 1000$ (লগারিদ্‌মিক্ আকার)

ইহাও বিবৃত করা যায় যে, $\text{antilog}_{10} 3=1000$.

উদা. 2. $\log_2 8=3$ এই লগারিদ্‌মিক্ আকার হইতে পাওয়া যায় : $2^3=8$ এবং $\text{antilog}_2 3=8$

উদা 3. $\log_4 2$ সংখ্যাটি কত ?

ধরা যাক্ $\log_4 2=x$; তাহা হইলে $4^x=2$, বা, $2^{2x}=2$;

$\therefore 2x=1$, বা, $x=\frac{1}{2}$ **(নির্ণেয় সংখ্যা)**।

উদা 4. সেই সংখ্যাটি কত, যাহার 9 নিধান সম্পর্কে লগারিদম্ হইল $\frac{1}{2}$?

ধরা যাক, নির্ণেয় সংখ্যা $\equiv x$

তাহা হইলে, $\log_9 x=\frac{1}{2}$; $\therefore\ x=9^{\frac{1}{2}}=3.$

উদা. 5. Antilog$_5$ 3 নির্ণয় কর।

লক্ষ্য করিতে হইবে :

$10^3=1000\cdots(i)$ এবং $\text{antilog}_{10}\,3=1000\cdots(ii)$ এখন লক্ষ্য করা যাক্, (ii) হইতে কি প্রকারে (i) লেখা যায়।

ধর যাক্

$x\equiv\text{antilog}_5 3$

$\therefore\ x=5^3$

$=125.$

প্রশ্নমালা IX(A)

[উত্তর সংক্ষেপে প্রাপ্তব্য প্রশ্নসমূহ]

1. নিম্নের প্রত্যেকটি সূচক-সম্বলিত আকারে প্রদত্ত রাশিকে লগারিদ্মিক্ আকারে প্রকাশ কর :

(i) $10^2=100$; (ii) $(\frac{1}{4})^{-2}=16$; (iii) $8^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}$;

(iv) $p^q=r$; (v) $\sqrt{5^7}=125\sqrt{5}$; (vi) $\frac{1}{10}=0{\cdot}1.$

2. নিম্নে লগারিদ্মিক্ আকারে প্রদত্ত রাশিকে সূচক-যুক্ত আকারে প্রকাশ কর :

(i) $\log_{25}x=\frac{1}{2}$; (ii) $\log_2 64=6$; (iii) $\log_a 1=0$;

(iv) $\log_{10}{\cdot}001=-3$; (v) $\log_{\frac{1}{2}}4=-2$; (vi) $\log_a m=x.$

3. (a) নিম্নের লগারিদম্‌গুলির মান নির্ণয় কর :

(i) $\log_3 81$ (ii) $\log_2\sqrt{8}.$ (iii) $\log_a(a\sqrt{a}).$

(iv) $\log_{10}\sqrt[3]{10}$ (v) $\log_{10}{\cdot}001$ (vi) $\log_2\frac{1}{32}.$

(vii) $\log_{5\sqrt[3]{5}}125$ (viii) $\log_{9\sqrt[3]{3}}{\cdot}1$; (ix) $\log_{3\sqrt[3]{7}}2401.$

(b) $2\sqrt{3}$ নিধান সম্পর্কে 144 এর লগারিদম্ নির্ণয় কর।

(c) নিধান $\sec\alpha$ সম্পর্কে $\cos^3\alpha$ এর লগারিদম্ নির্ণয় কর।

4. নিম্নের প্রতি ক্ষেত্রে x নির্ণয় কর :

(i) $\log_{10}x=3.$ (ii) $\log_7 x=1.$ (iii) $\log_{16}x=\frac{1}{4}.$

(iv) $\log_{\frac{1}{3}}x=-4$; (v) $\log_{25}x=-\frac{1}{2}$; (vi) $\log_8 x=2.$

5. নিম্নলিখিত অ্যান্টিলগারিদম্‌গুলি নির্ণয় কর :

(i) $\text{antilog}_3\,2$; (ii) $\text{antilog}_{\frac{1}{100}}-\frac{1}{2}$; (iii) $\text{antilog}_8\,\frac{2}{3}.$

6. নিম্নের লগারিদম্গুলির নিধান নির্ণয় কর :

(i) $\log_x 9=2$; (ii) $\log_x \cdot01=-2$; (iii) $\log_a 2=-3$;
(iv) $\log_x 4=-\frac{1}{2}$; (v) $\log_x 12{\cdot}96=4$; (vi) $\log_a 324=4$.

7. সমাধান করিয়া ক্ষেত্র অনুসারে x বা y নির্ণয় কর :

(i) $\log_8(3x^2+2x-4)=0$; (ii) $\log_y \frac{9}{4}=-\frac{2}{3}$;
(iii) $\log_5(ax)=\log_5(a+x)$; (iv) $\log_y \frac{1}{27}=3$.

8. যদি $\log_a x=3$, $\log_a y=5$ হয়; তবে প্রমাণ কর যে $x^2y=a^{11}$.

9. যদি $\log_a x=5$, $\log_a y=2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\frac{x^2}{y}=a^8$.

9·3. লগারিদম্ এর সূত্রাবলী

I. $\log_a(m\times n)=\log_a m+\log_a n$

1 ভিন্ন অন্য যে কোন ধনাত্মক নিধান সম্পর্কে দুইটি ধনাত্মক সংখ্যা m এবং n এর গুণফলের লগারিদম্ হইল, সংখ্যাদ্বয় m এবং n এর একই নিধান সম্পর্কে লগারিদম্-এর যোগফলের সমান।

প্রমাণ : ধরা যাক্ $\log_a m=x$ এবং $\log_a n=y$

সংজ্ঞা অনুসারে, $a^x=m$ এবং $a^y=n$;

$\therefore\ m\times n=a^x\times a^y=a^{x+y}$,

সুতরাং $\log_a(m\times n)=x+y=\log_a m+\log_a n$.

সূত্রটির প্রসারণ : (i) $\log_a(m\times n\times p)=\log_a(m\times n)+\log_a p$

$=\log_a m+\log_a n+\log_a p$.

(ii) $\log_a(m\times n\times p\times\cdots\times k)$

$=\log_a m+\log_a n+\log_a p+\cdots+\log_a k$.

II. $\log_a\frac{m}{n}=\log_a m-\log_a n$

1 ভিন্ন অপর যে কোন ধনাত্মক নিধান সম্পর্কে দুইটি ধনাত্মক সংখ্যার ভাগফলের লগারিদম্ হইল, সংখ্যা দুইটির একই নিধান সম্পর্কে লগারিদম্ এর বিয়োগফলের সমান।

প্রমাণ। অনুশীলনী হিসাবে ছাত্রছাত্রীদের জন্য রাখিয়া দেওয়া হইল।

III. $\log_a m^n=n\log_a m$

1 ভিন্ন অপর যে কোন ধনাত্মক নিধান সম্পর্কে কোন ধনাত্মক সংখ্যা m এর nতম ঘাতের লগারিদম্ হইল, সংখ্যা m এর একই নিধান সম্পর্কে লগারিদম্ দ্বারা গুণিত n-এর সমান।

প্রমাণ : ধরা যাক, $\log_a m = x$

তাহা হইলে, $a^x = m$, বা $(a^x)^n = (m)^n$

বা, $a^{nx} = (m)^n$; $\therefore \log_a (m)^n = nx$

বা, $\log_a (m)^n = n \log_a m$

টীকা। এই সূত্রটি $m^{p/q}$, বা $\sqrt[q]{m^p}$ এর মত সংখ্যার লগারিদ্‌ম্‌ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে বিশেষ করিয়া প্রয়োজনীয়। যেমন, $\log_a \sqrt[q]{m^p} = \log_a (m)^{\frac{p}{q}} = p/q \log_a m$.

IV. $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$, যেখানে a যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা (কিন্তু $\neq 1$) যেহেতু $a^0 = 1 (a \neq 0)$ এবং $a^1 = a$, সুতরাং ইহা হইতে সূত্র দুইটি পাওয়া যায়।

এই প্রসঙ্গেই লক্ষণীয় যে : $\log_{10} 10 = 1$

টীকা : একই নিধান সম্পর্কে বিভিন্ন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্‌ সংশ্লিষ্ট যে কোন কার্যে নিধানটিকে উহ্য রাখা যাইতে পারে। পরবর্তী উদাহরণগুলিতে ইহা করা হইবে।

9·4. নিধান পরিবর্তন

যে কোন নিধান সম্পর্কে কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্‌ নিম্নে প্রদত্ত সম্বন্ধটির সাহায্যে অপর যে কোন অভীষ্ট নিধান সম্পর্কে ঐ একই সংখ্যার লগারিদ্‌ম্‌-এ প্রকাশ করা যায়, যথা :

$$\log_a m = \log_b m \times \log_a b, \quad \text{বা} \quad \log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}.$$

ধরা যাক $\log_a m = x$, $\log_b m = y$; তাহা হইলে $a^x = m = b^y$

বা, $b = a^{\frac{x}{y}}$; $\therefore \frac{x}{y} = \log_a b$, বা $x = y \log_a b$;

$$\therefore \log_a m = \log_b m \times \log_a b, \quad \text{বা} \quad \log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}.$$

অনুসিদ্ধান্ত। উপরের সম্বন্ধে $m = a$ ধরিলে, যেহেতু $\log_a a = 1$,

$$\log_b a \times \log_a b = 1, \text{ বা } \log_b a = \frac{1}{\log_a b}.$$

$\log_a b = x$ এবং $\log_b a = y$ ধরিয়া সূত্রটি সরাসরিও প্রমাণ করা যায়।

উদা. 1. সরল কর : $\log \frac{108}{5}$.

$$\log \frac{108}{5} = \log \frac{2^2 \times 3^3}{5} = \log (2^2 \times 3^3) - \log 5$$

$$= \log 2^2 + \log 3^3 - \log 5 = 2 \log 2 + 3 \log 3 - \log 5$$

উদা. 2. প্রমাণ কর যে $7 \log \frac{16}{15}+5 \log \frac{25}{24}+3 \log \frac{81}{80}=\log 2$.

$$7 \log \frac{16}{15}=7 \log \frac{2^4}{3\times 5}=7[\log 2^4-\log(3\times 5)]$$
$$=7[4 \log 2-\log 3-\log 5]$$
$$=28 \log 2-7 \log 3-7 \log 5$$

তদ্রূপ, $5 \log \frac{25}{24}=5 \log \frac{5^2}{2^3\times 3}=5[2 \log 5-3 \log 2-\log 3]$
$$=10 \log 5-15 \log 2-5 \log 3$$

এবং $3 \log \frac{81}{80}=3 \log \frac{3^4}{2^4\times 5}=3[4 \log 3-4 \log 2-\log 5]$
$$=12 \log 3-12 \log 2-3 \log 5$$

এখন যোগ করিয়া অভীষ্ট ফলটি পাওয়া যাইবে।

উদা. 3. যদি $a^2+b^2=7ab$ হয়, তবে দেখাও যে
$$\log\{\tfrac{1}{3}(a+b)\}=\tfrac{1}{2}(\log a+\log b)$$

দেওয়া আছে, $a^2+b^2=7ab$

বা, $a^2+b^2+2ab=9ab$, বা $(a+b)^2=9ab$

বা, $\left(\frac{a+b}{3}\right)^2=ab$; $\therefore \frac{a+b}{3}=\sqrt{ab}=(ab)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \log \frac{a+b}{3}=\log (ab)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log (ab)=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$.

উদা. 4. প্রমাণ কর যে $x^{\log y-\log z}\times y^{\log z-\log x}\times z^{\log x-\log y}=1$

ধরা যাক, $P\equiv x^{\log y-\log z}\times y^{\log z-\log x}\times z^{\log x-\log y}$;

$\therefore \log P=\log x^{\log y-\log z}+\log y^{\log z-\log x}+\log z^{\log x-\log y}$

[একই নিধান সম্পর্কে লগারিদম্‌গুলি লইয়া]

বা, $\log P=(\log y-\log z)\log x+(\log z-\log x)\log y$
$$+(\log x-\log y)\log z$$

$=0$; $\therefore P=1$ [সূত্র IV] ; সুতরাং ঈপ্সিত সম্পর্ক পাওয়া যায়।

উদা. 5. প্রদত্ত $\log 2=0{\cdot}3010$, $\log 3=0{\cdot}4771$, $\log 7=0{\cdot}8451$, মান নির্ণয় কর : (i) $\log 105$, (ii) $\log \sqrt[3]{72}$.

[নিধান 10 সম্পর্কে লগারিদম্‌গুলি হিসাব করিতে হইবে]

(i) $\log 105=\log(3.5.7)=\log 3+\log 5+\log 7$
$=\log 3+\log \frac{10}{2}+\log 7$
$=\log 3+\log 10-\log 2+\log 7$
$=0{\cdot}4771+1-0{\cdot}3010+0{\cdot}8451=2{\cdot}0212$

(ii) $\log \sqrt[3]{72}=\log(2^3.3^2)^{\frac{1}{3}}=\log(2.3^{\frac{2}{3}})=\log 2+\frac{2}{3}\log 3$
$=0{\cdot}3020+\frac{2}{3}\times 0{\cdot}4771=0{\cdot}6191.$

উদা. 6. যদি $y=a^{\frac{1}{1-\log_a x}}$, $z=a^{\frac{1}{1-\log_a y}}$, তবে প্রমাণ কর যে

$$x=a^{\frac{1}{1-\log_a z}}$$

যেহেতু, $y=a^{\frac{1}{1-\log_a x}}$, $\therefore\ \log_a y=\frac{1}{1-\log_a x}$,

অর্থাৎ $\log_a x=1-\frac{1}{\log_a y}$

যেহেতু, $z=a^{\frac{1}{1-\log_a y}}$, $\therefore\ \log_a z=\frac{1}{1-\log_a y}$,

অর্থাৎ $\log_a y=1-\frac{1}{\log_a z}$

$$\therefore\ \log_a x=1-\frac{1}{1-\frac{1}{\log_a z}}=1-\frac{\log_a z}{\log_a z-1}=\frac{-1}{\log_a z-1}$$

বা, $\log_a x=\frac{1}{1-\log_a z}$; $\therefore\ x=a^{\frac{1}{1-\log_a z}}$.

প্রশ্নমালা IX(B)

1. প্রমাণ কর যে $\log(1+2+3)=\log 1+\log 2+\log 3$. ইহা কি যে কোন তিনটি সংখ্যা m, n, p এর ক্ষেত্রে সত্য ?

2. প্রমাণ কর যে

(i) $\log\frac{75}{16}-2\log\frac{5}{9}+\log\frac{32}{243}=\log 2.$

(ii) $7\log\frac{10}{9}-2\log\frac{25}{24}+3\log\frac{81}{80}=\log 2.$

(iii) $16 \log \frac{16}{15}+12 \log \frac{25}{24}+7 \log \frac{81}{80}=\log 5.$

(iv) $\frac{\log \sqrt{27}+\log 8-\log \sqrt{1000}}{\log 1{\cdot}2}=\frac{3}{2}.$

(v) $\log 2+16 \log \frac{16}{15}+12 \log \frac{25}{24}+7 \log \frac{81}{80}=1.$

[সকল ক্ষেত্রে নিধান 10 সম্পর্কে]

(vi) $\log \frac{11}{15}+\log \frac{490}{297}-2 \log \frac{7}{9}=\log 2.$

(vii) $\log \frac{81}{8}-2 \log \frac{3}{2}+3 \log \frac{2}{3}+\log \frac{3}{4}=0.$

(viii) $\log (\frac{36}{25})^3+3 \log \frac{2}{9}-\log 2=2 \log \frac{16}{125}$

3. সরল কর : $\log_{10} \sqrt[7]{\frac{8^{1/5} \times 14^{1/3}}{\sqrt{72}+\sqrt[5]{60}}}.$

4. যদি $a^2+b^2=23ab$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\log \frac{a+b}{5}$

$=\frac{1}{2}(\log a+\log b).$

5. যদি $a^{3-x}b^{5x}=a^{x+5}.b^{3x}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $x \log \frac{b}{a}=\log a.$

6. প্রমাণ কর যে

(i) $\log_3 \log_2 \log_2 256=1.$ (ii) $\log_2 \log_{\sqrt{2}} \log_3 81=2$

(iii) $\log_2 [\log_2\{(\log_3 27^3)\}]=0.$

7. প্রমাণ কর যে $10^{\log_{10}N}=N$; $5^{\log_5 7}=7$; $e^{\log_e x}=x.$

8. লগারিদম্ নিরপেক্ষ আকারে প্রকাশ কর :

(i) $2 \log a-3 \log b=2$; (ii) $\log x=y \log 3+1$

[লগারিদম্ এর নিধান 10 লইয়া]

[উত্তর : (i) $a^2=100b^3$; (ii) $x=10.3^y$]

9. অখণ্ড সংখ্যারূপে প্রকাশ কর :

$\log_{243}(3^3)+\log_{243}(9^{\frac{5}{2}+\frac{7}{2}})+\log_{243}(27^{\frac{9}{3}+\frac{11}{3}+\frac{13}{3}})$

$+\log_{243}(81^{\frac{15}{4}+\frac{17}{4}+\frac{19}{4}+\frac{21}{4}}).$

[উত্তর : 24]

10. (a) প্রদত্ত $\log_{10}2=0{\cdot}3010$, $\log_{10}3=0{\cdot}4771$, $\log_{10}7=0{\cdot}8451$; দেখাও যে :

(i) $\log_{10}5=0{\cdot}6990$; (ii) $\log_{10}6=0{\cdot}7781$;

(iii) $\log_{10}\sqrt[3]{5}=0{\cdot}2330$; (iv) $\log_{10}45=1{\cdot}6532$;

(v) $\log_{10}108=2{\cdot}0333$; (vi) $\log_{10}70=1{\cdot}8451$;

(vii) $\log_{10} 2{\cdot}4=0{\cdot}3801$.

(b) প্রদত্ত $\log 2=0{\cdot}3010300$, $\log 3=0{\cdot}4771213$, $\log 7=0{\cdot}8450980$ এবং $\log 11=1{\cdot}0413927$; দেখাও যে :

(i) $\log 84=1{\cdot}9242793$; (ii) $\log 147=2{\cdot}1673173$;

(iii) $\log 294=2{\cdot}4683473$; (iv) $\log 21{\cdot}6=1{\cdot}3344539$;

(v) $\log 145{\cdot}53=2{\cdot}1629526$; (vi) $\log \sqrt{4{\cdot}5}=0{\cdot}3266063$;

(vii) $\log 80\frac{2}{11}=1{\cdot}9040759$.

(c) প্রদত্ত $\log 8=0{\cdot}9030900$ এবং $\log 6=0{\cdot}7781513$; দেখাও যে $\log 125=2{\cdot}0969100$ এবং $\log 75=1{\cdot}8750613$.

(d) নিধান 10 সম্পর্কে সকল লগারিদ্‌ম্ লইয়া প্রমাণ কর যে

$$\frac{1}{6}\sqrt{\frac{3\log 1728}{1+\frac{1}{2}\log 0{\cdot}36+\frac{1}{3}\log 8}}=\frac{1}{2}$$

11. (a) সংখ্যাগুলির অনুক্রম (sequence) যদি গুণোত্তর প্রগতিতে **থাকে**, তবে দেখাও যে উহাদের লগারিদ্‌ম্‌গুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকে।

(b) যদি $a, b, c, d, \cdots\cdots$ G.P.তে হয়, তবে দেখাও যে $\log_a x, \log_b x, \log_c x \cdots$ H.P.তে।

12. (i) প্রমাণ কর যে

$$(yz)^{\log y-\log z}\times(zx)^{\log z-\log x}\times(xy)^{\log x-\log y}=1.$$

(ii) যদি $\frac{\log a}{q-r}=\frac{\log b}{r-p}=\frac{\log c}{p-q}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $a^p b^q c^r=1$.

(iii) যদি $\frac{x(y+z-x)}{\log x}=\frac{y(z+x-y)}{\log y}=\frac{z(x+y-z)}{\log z}$ হয়, তবে দেখাও যে

$$y^z z^y=x^z z^x=x^y y^x.$$

[ইঙ্গিত : প্রদত্ত প্রত্যেক অনুপাত $=1/r$ ধর ; $\log x, \log y, \log z$ নির্ণয় কর। এখন দেখ যে $z\log y+y\log z=2kxyz$, অর্থাৎ, $\log(y^z.z^y)=2kxyz$; তদ্রূপ, $\log(x^z.z^x)=\log(x^y.y^x)=2kxyz$; সুতরাং ......]

13. যদি $xy^{l-1}=a$, $xy^{m-1}=b$, $xy^{n-1}=c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$(m-n)\log a+(n-l)\log b+(l-m)\log c=0.$$

14. (a) নিম্নলিখিত অভেদগুলি প্রমাণ কর (a, b, c, d প্রত্যেকে ধনাত্মক):

(i) $\log_b a \times \log_a b = 1$; (ii) $\log_b a \times \log_c b \times \log_a c = 1$;

(iii) $\log_a x \times \log_b y = \log_b x \times \log_a y$;

(iv) $\log_b a \times \log_c b \times \log_d c = \log_d a$.

(b) প্রদত্ত $\log_{10} 2 = 0{\cdot}3010$, $\log_{10} 3 = 0{\cdot}4771$; দেখাও যে

$\log_{12} 40 = 1{\cdot}485$ (3 দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান)

[ইঙ্গিত : $\log_{12} 40 = \dfrac{\log_{10} 40}{\log_{10} 12} = \dfrac{\log(2^2 \times 10)}{\log(2^2 \times 3)} = \dfrac{2\log_{10} 2 + \log_{10} 10}{2\log_{10} 2 + \log_{10} 3}$

$= \dfrac{2 \times 0{\cdot}3010 + 1}{2 \times 0{\cdot}3010 + 0{\cdot}4771} = \dfrac{1{\cdot}6020}{1{\cdot}0791} =$ ইত্যাদি।]

15. যদি $x^p = y^q = (xy)^{pq}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $p + q = 1$.

9·5. সাধারণ লগারিদ্‌ম্ (Common Logarithm)

সংখ্যাগত হিসাবসমূহে নিধান 10 সম্পর্কে লগারিদ্‌ম্ হিসাব করা হয়। এইরূপ লগারিদ্‌ম্‌কে **সাধারণ লগারিদ্‌ম্** বলা হয়। সাধারণত নিধান 10 উহ্য রাখা হয়। যেমন $\log_{10} 3$ বুঝাইতে লেখা হয় log 3.

9.6. পূর্ণক (Characteristic) এবং অংশক (Mantissa)

লক্ষ্য করা যায় যে

$10^{-3} = {\cdot}001$; $10^{-2} = {\cdot}01$; $10^{-1} = {\cdot}1$; $10^0 = 1$; $10^1 = 10$; $10^2 = 100$

$\therefore$ $\log {\cdot}001 = -3$; $\log {\cdot}01 = -2$; $\log {\cdot}1 = -1$; $\log 1 = 0$;

$\log 10 = 1$; $\log 100 = 2$.

এই প্রকারে দেখা যায় যে সংখ্যার মানের বৃদ্ধির সহিত সংখ্যাটির লগারিদ্‌ম্ এর মান বৃদ্ধি পায়। আবার 10 এবং 100 এর মধ্যে অবস্থিত সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ = 1 + একটি ধনাত্মক প্রকৃত ভগ্নাংশ, ·001 এবং ·01 এর মধ্যে অবস্থিত সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ = −3 + একটি ধনাত্মক প্রকৃত ভগ্নাংশ।

ধনাত্মক প্রকৃত ভগ্নাংশকে সর্বদা দশমিক আকারে প্রকাশ করা যায়।

বাস্তবত যাচাই করিয়া দেখা যায় যে $\log 34{\cdot}49 = 1 + {\cdot}5377$, $\log {\cdot}002 = -3 + {\cdot}3010$.

সুতরাং নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়, যথা :

কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্‌এ, পূর্ণ এবং ভগ্নাংশ, এই দুইটি অংশ থাকে; ইহাদের মধ্যে পূর্ণ অংশটি শূন্য অথবা যে কোন অখণ্ড সংখ্যা

(ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) হইতে পারে এবং ভগ্নাংশটি এক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ও সর্বদা ধনাত্মক দশমিক ভগ্নাংশ।

সংজ্ঞা : সাধারণ লগারিদম্ এর পূর্ণ অংশটিকে উহার **পূর্ণক** এবং দশমিক অংশটিকে যাহা সর্বদা ধনাত্মক, উহার **অংশক** বলা হয়।

ধরা যাক্ $\log 33{\cdot}9 = 1{\cdot}5289$, তাহা হইলে 1 হইল লগারিদম্‌টির পূর্ণক এবং ·5289 হইল উহার অংশক।

যদি $\log\ 0{\cdot}338 = -1 + {\cdot}5289$ হয়, তবে -1 হইল লগারিদম্‌টির পূর্ণক এবং ·5289 হইল উহার অংশক।

পূর্ণকের ঋণাত্মক চিহ্নটি সাধারণত পূর্ণক সংখ্যার শীর্ষে লিখিত হয়। যেমন লিখিত হইয়া থাকে : $\log 0{\cdot}338 = \bar{1}{\cdot}5289$; ইহার তাৎপর্য হইল এই যে পূর্ণকটি এ'স্থলে -1, কিন্তু অংশকটি হইল $+{\cdot}5289$;

লক্ষ্য করিতে হইবে যে $\bar{1}{\cdot}5289$ এবং $-1{\cdot}5289$ **এক নহে,** কারণ $\bar{1}{\cdot}5289 = -1 + {\cdot}5289$ এবং $-1{\cdot}5289 = -1 - {\cdot}5289$.

$\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ প্রভৃতিকে পাঠ করা হয় যথাক্রমে বার (bar) 1, বার 2, বার 3 ইত্যাদিরূপে।

9·7. পূর্ণক নির্ণয়ের নিয়ম

A. 1এর সমান অথবা 1 অপেক্ষা বৃহত্তর ধনাত্মক সংখ্যার লগারিদম্ :

যেহেতু $\log 1 = 0$ এবং $\log 10 = 1$, সুতরাং $\log N = 0 +$ একটি দশমিক অংশ, যদি N, 1 এবং 10 এর মধ্যে অবস্থিত হয়, অর্থাৎ যদি N এর অখণ্ড অংশে একটি অঙ্ক থাকে।

যেহেতু $\log 10 = 1$ এবং $\log 100 = 2$, সুতরাং $\log N = 1 +$ একটি দশমিক অংশ, যদি N, 10 এবং 100 এর মধ্যে অবস্থিত হয়, অর্থাৎ যদি N এর অখণ্ড অংশ দুই অঙ্কবিশিষ্ট হয়, ইত্যাদি।

সাধারণভাবে নিয়মটি হইল এই :

নিয়ম 1. কোন সংখ্যা $N>1$ হইলে, $\log N$ এর পূর্ণক ধনাত্মক এবং উহা N এর অখণ্ড অংশে অবস্থিত অঙ্ক সংখ্যা অপেক্ষা 1 ক্ষুদ্রতর।

উদা. 1. সংখ্যা N :	7283	347·5	48	3	7·893	23·85
$\log N$ এর পূর্ণক :	3	2	1	0	0	1

B. 0 এবং 1 এর মধ্যে অবস্থিত ধনাত্মক সংখ্যার লগারিদম্ :

এই শ্রেণীর সংখ্যা দশমিক চিহ্ন দিয়া শুরু হয়, সুতরাং উহাদের অখণ্ড অংশ 0 এবং প্রত্যেকটির ক্ষেত্রে দশমিক চিহ্নের পর হয় কোন শূন্য থাকে না অথবা এক বা একাধিক

শূন্য থাকে ; যথা : 0·3784, 0·025, 0·0007896 ইত্যাদি। এখন log 1 = 0 এবং log 0·1 = −1 বলিয়া

$\log N = -1 +$ একটি ধনাত্মক দশমিক ভগ্নাংশ, যদি N, ·1 এবং 1 এর মধ্যে অবস্থিত হয়, অর্থাৎ, যদি N এ দশমিক বিন্দুর পরই কোন শূন্য না থাকে।

যেহেতু log 0·1 = −1 এবং log 0·01 = −2, ∴ $\log N = -2 +$ একটি ধনাত্মক দশমিক ভগ্নাংশ, যদি N, ·01 এবং ·1 এর মধ্যে অবস্থিত হয়, অর্থাৎ, যদি N এ দশমিক বিন্দুর পরই একটি মাত্র শূন্য থাকে ; ইত্যাদি। সুতরাং

নিয়ম II. কোন ধনাত্মক সংখ্যা $N < 1$ হইলে (অর্থাৎ, দশমিক বিন্দু দিয়া শুরু এমন ধনাত্মক সংখ্যা হইলে), log N এর পূর্ণক ঋণাত্মক এবং উহার সাংখ্যমান, N এর দশমিক চিহ্নের পরই শূন্যের সংখ্যা অপেক্ষা 1 বৃহত্তর।

উদা.। সংখ্যা N :	0·3485	0·0038	0·0030708
log N এর পূর্ণক :	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$

টীকা : স্মরণ করা যাইতে পারে যে ঋণাত্মক সংখ্যা অথবা শূন্যের লগারিদম্ বিবেচনা করা হইতেছে না।

8·8. লগারিদম্-এর তালিকা (Table) : অংশক নির্ণয়

সংখ্যাটি পর্যবেক্ষণ দ্বারা উহার লগারিদম্ এর পূর্ণক যেরূপ নির্ণয় করা যায়, উহার অংশক কিন্তু সেইরূপ নির্ণয় করা যায় না। লগারিদম্ এর তালিকা বা লগ-তালিকা বলিয়া কথিত তালিকা হইতে ইহা নির্ণয় করিতে হয়।

A. তালিকার বিন্যাস (Arrangement of the Table) :

তালিকার অন্তিম বামপ্রান্তীয় স্তম্ভে 10 হইতে 99 পর্যন্ত সংখ্যাগুলিকে বড় হরফে মুদ্রিত দেখা যাইবে। সর্বাপেক্ষা উপরের সারিতে রহিয়াছে 0, 1, 2, 3,……, 8, 9 এই সংখ্যাগুলি। এইগুলির প্রত্যেকটির নীচে দেখা যাইবে **চারি-অঙ্কের** (কোন কোন তালিকায় চারিটির অধিক অঙ্কের) সংখ্যাসমূহ। এইগুলিই হইল অংশক— কেবল উহাদের শুরুতে দশমিক চিহ্ন উহ্য রাখা হইয়াছে। **ধরিয়াই লইতে হইবে যে প্রত্যেকটি অংশকের ঠিক পূর্বে দশমিক বিন্দু আছে।** এই পর্যন্তই হইল তালিকাটির মূল অংশ। তালিকার দক্ষিণ পার্শ্বে একটি উপ-তালিকা (side table) আছে—**ইহাকে মধ্যক পার্থক্যের তালিকা (Mean Difference Table)** বলা হয় ; ইহার তাৎপর্য পরে ব্যাখ্যা করা হইবে।

যে তালিকা হইতে চারি অঙ্কের অংশক পাওয়া যায় তাহাকে চারি-অঙ্কের লগ্-তালিকা (Four-Figure log-table) বলা হয়। সূক্ষ্মতর হিসাবের জন্য পাঁচ-অঙ্কের অথবা সাত-অঙ্কের তালিকাও ব্যবহৃত হয়। চারি-অঙ্কের তালিকার দ্বারাই আশু উদ্দেশ্য পূর্ণ হইবে।

B. নিম্নলিখিত নিয়মটি প্রায়ই সাহায্যে আসিবে।

নিয়ম III. যে সমস্ত সংখ্যায় একই সার্থক অঙ্কসমূহ একই ক্রমে সজ্জিত থাকে, তাহাদের লগারিদম্ এর অংশক একই—এই অংশক এবং সংখ্যাটির দশমিক চিহ্ন অথবা নিরর্থক শূন্যগুলিকে অগ্রাহ্য করিয়া প্রাপ্ত সমগ্র সংখ্যাটির লগ্ এর অংশক একই।

প্রমাণ। ধরা যাক, M এবং N এইরূপ যে কোন দুইটি সংখ্যা যাহাদের প্রত্যেকটিতে একই সার্থক অঙ্কসমূহ একই অনুক্রমে আছে এবং উভয়ের মধ্যে পার্থক্য কেবল দশমিক বিন্দুর অবস্থানে ; তাহা হইলে ইহা লিখিতে পারা সম্ভব যে $M=10^m \times N$, যেখানে m ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে কোন অখণ্ড সংখ্যা। এখন ইহা জানা আছে বলিয়া যদি ধরিয়া লওয়া যায় যে $\log N=n+\cdot x$, যেখানে n হইল পূর্ণক এবং $\cdot x$ হইল অংশক, তবে

$$\log M=\log (10^m \times N)=m+\log N=(m+n)+\cdot x$$

যেহেতু m এবং n উভয়ে অখণ্ড সংখ্যা, সুতরাং $(m+n)$ অখণ্ড সংখ্যা এবং M এর লগারিদম্ এর অংশক $\cdot x$, অর্থাৎ N এর লগারিদম্ এর অংশক এর সহিত অভিন্ন।

সুতরাং log 7·835, বা, log 783·5, বা, log 7835000, বা, log ·0007835 নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমে পর্যবেক্ষণ দ্বারা প্রতিক্ষেত্রে পূর্ণক নির্ণয় করা হয়। ইহাদের প্রত্যেক ক্ষেত্রে পূর্ণক পৃথক্ হইবে। কিন্তু **নিয়ম III** অনুসারে সবগুলির অংশক একই হইবে এবং উহারা log 7835 এর অংশকের সমান। সুতরাং লগ্-তালিকার সাহায্যে log 7835 এর অংশক ·8941 নির্ণয় করা হইল ; তাহা হইলে log 7·835 = 0·8941, log 783·5 = 2·8941, log 7835000 = 6·8941, log ·0007835 = $\bar{4}$·8941

C. অংশক নির্ণয়ের জন্য লগ্-তালিকা কিরূপে ব্যবহার করিতে হয়।

7835 এর লগ্ এর অংশক নির্ণয়ের জন্য প্রথমতঃ লগ্-তালিকার অন্তিম বাম-প্রান্তিক স্তম্ভে 78 সংখ্যাটি অনুসন্ধান দ্বারা বাহির করা হইল ; এখন ইহার দক্ষিণে

অনুভূমিক রেখা বরাবর দৃষ্টিপাত করিতে করিতে সেই স্তম্ভ পর্যন্ত যাইতে হইবে, যাহার শীর্ষে উচ্চতম সারিতে 3 আছে। দেখা গেল, এই স্থানে লিখিত রহিয়াছে 8938 সংখ্যাটি (চারি-অঙ্কের তালিকা অনুসারে)। এক্ষণে চতুর্থ অঙ্ক 5 এর নিমিত্ত মধ্যক-পার্থক্য তালিকার প্রতি দৃষ্টি দিতে হইবে—উহার যে স্তম্ভের শীর্ষে 5 আছে তাহা যে অনুভূমিক সারির বাম প্রান্তে 78 আছে তাহাকে যে স্থলে ছেদ করিয়াছে সেইস্থলে দেখা যাইবে, 3 রহিয়াছে। তাহা হইলে log 7835 এর অংশক হইবে

$$\begin{array}{r} \cdot 8938 \\ +3 \\ \hline \cdot 8941 \end{array};\quad \text{সুতরাং } \log 7835 = 3\cdot 8941.$$

এই পুস্তকের শেষে চারি-অঙ্ক ও পাঁচ-অঙ্ক লগ-তালিকা যুক্ত হইল। ছাত্রছাত্রীরা তাহাদের হিসাব নিরূপণে উহাদের যে কোন একটির সাহায্য লইতে পারে।

D. যখন সংখ্যাটিতে পাঁচটি বা তদধিক অঙ্ক থাকিবে ঃ

যখন সংখ্যাটিতে সার্থক অঙ্ক সংখ্যা চারিটির অধিক হইবে, তখন স্থূল হিসাবের ক্ষেত্রে সংখ্যাটির 4টি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় করিয়া লওয়া যায়। সূক্ষ্মতর ফলের জন্য নিম্নলিখিত উদাহরণে এবং (E) অংশে প্রদত্ত পদ্ধতি অনসৃত হয়।

উদা. চারি-অঙ্ক লগ্-তালিকার সাহায্যে log 4688·9 এর মান নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{lr|l} & \log 4\cdot 68 = 0\cdot 6702 & \\ 8 \text{ এর জন্য গড় অন্তর} = & 7 & \\ 9\ \text{,,}\ \text{,,}\ \text{,,}\quad = & & 8 \\ \hline & \therefore \log 4\cdot 6889 = 0\cdot 6710 & \end{array}$$

$$\therefore \log 4688\cdot 9 = 3\cdot 6710.$$

E. ইনটারপোলেসন্ (Interpolation) পদ্ধতি

এই পদ্ধতি গণিতের একটি গুরুত্বপূর্ণ তথ্যের উপর প্রতিষ্ঠিত—ইহাকে সমানুপাতিক অংশ সম্পর্কীয় তথ্য (Principle of proportional parts) বলা হয়। তথ্যটি নিম্নে বিনা প্রমাণসহ বিবৃত হইল ঃ

কোন পরিবর্তনশীল রাশি x এর নিয়মিত ও পরস্পর ক্ষুদ্র পার্থক্যসম্পন্ন বিভিন্ন মানের জন্য উহার উপর নির্ভরশীল অপর একটি রাশির মানসমূহ যদি তালিকাভুক্ত করা হয়, তবে x এর অতি ক্ষুদ্র পরিবর্তনের ক্ষেত্রে তালিকাভুক্ত রাশির অনুরূপ ক্ষুদ্র পরিবর্তন x এর ঐ পরিবর্তনের সহিত সমানুপাতী।

উদা. : প্রদত্ত log 34938 = 4·5432980 এবং log 34939 = 4·5433105 ; ইনটারপোলেসন পদ্ধতিতে 7 দশমিক স্থান পর্যন্ত log 349387 এর আসন্ন শুদ্ধ মান নির্ণয় কর।

$$\log 34939 = 4{\cdot}5433105$$
$$\log 34938 = 4{\cdot}5432980$$

1 এর জন্য পার্থক্য = 0·0000125

∴ ·7 এর জন্য পার্থক্য = 0·00000875

∴ log 34938·7 = 4·5433068

∴ log 349387 = 5·5433068

সাধারণত এইভাবে লিখিত হয় :

1 এর জন্য অন্তর = 125

∴ ·7 „ „ „ = 87·5

log 34938 = 4·5432980

·7 এর জন্য অন্তর = 87|5

∴ log 34938·7 = 4·5433068

9·9. অ্যান্টিলগারিদম্ (Antilogarithm)

প্রদত্ত কোন সংখ্যার লগারিদম্ নির্ণয়ের সহিত ইহার বিপরীত প্রক্রিয়াটি অনুষ্ঠানেরও প্রয়োজন হয়, অর্থাৎ কোন সংখ্যার লগারিদম্ প্রদত্ত (অথবা নির্ণীত) হইলে উহা হইতে **অ্যান্টিলগারিদম্** বলিয়া কথিত সংখ্যাটিকে নির্ণয় করিতে হয়। এই উদ্দেশ্যে **অ্যান্টিলগারিদম্** এর তালিকা ব্যবহার করা হয়—ইহার বিন্যাস ব্যবস্থাও লগারিদম্ এর তালিকার অনুরূপ।

উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক্, antilog 1·9058 নির্ণয় করিতে হইবে, **অর্থাৎ** সেই সংখ্যাটি নির্ণয় করিতে হইবে যাহার লগারিদম্ হইল 1·9058 ; প্রথমে পূর্ণকটিকে না ধরিয়া কেবল অংশক ·9058 কে লইয়া অ্যান্টিলগারিদম্ তালিকা দেখিতে হইবে। উহাতে বামপ্রান্তীয় অন্তিম স্তম্ভে ·90 কে অনুসন্ধান দ্বারা বাহির করিয়া ইহার দক্ষিণ দিকে অনুভূমিক রেখা বরাবর দৃষ্টিপাত করিতে করিতে এমন স্তম্ভ পর্যন্ত যাইতে হইবে যাহার শীর্ষে 5 আছে ; দেখা যাইবে, সংযোগ স্থলে 8035 সংখ্যা রহিয়াছে। এখন মধ্যক-পার্থক্যের তালিকায় 8 শীর্ষক স্তম্ভ এবং ·90 এর সারির সংযোগস্থলে **15** সংখ্যাকে পাওয়া যাইবে। প্রাপ্ত সংখ্যা দুইটির যোগফল হইল 8050 ; প্রদত্ত পূর্ণক **1** নির্দেশ করে যে যোগফলটির অখণ্ড অংশে দুইটি অঙ্ক থাকিবে। সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যা হইল **80·50, অর্থাৎ**, antilog 1·9058 = **80·50.**

নিম্নের মানগুলি নির্ণয় কর :

antilog 0·2403 ; antilog $\bar{1}$·6334 ; antilog 12·8934.

যদি প্রদত্ত অংশকে চারিটির অধিক অঙ্ক থাকে, তবে **মূল মান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে** হয় অতিরিক্ত অঙ্কগুলি অগ্রাহ্য করিতে হইবে অথবা 4 দশমিক স্থান পর্যন্ত অংশকের আসন্ন মান নির্ণয় করিয়া লইতে হইবে ; কিন্তু **সূক্ষ্মতর এবং অধিকতর সঠিক মানের** জন্য নিম্নের উদাহরণে প্রদত্ত পদ্ধতি অনুসৃত হয় :

উদা.। log N = 2·92479 **হইলে** N **নির্ণয় কর।**

N = antilog 2·92479

পূর্ণক অগ্রাহ্য করিয়া, antilog 924 = 8395		
মধ্যক পার্থক্য : 7 এর জন্য =	14	
মধ্যক পার্থক্য : 9 „ „ =	17	
Antilog 92479 = 8411		

এখন পূর্ণক 2 নির্দেশ করিতেছে যে N এর অখণ্ড অংশে 3টি অঙ্ক থাকিবে। সুতরাং

N = antilog 2·92479 = 841·1.

টীকা। লগারিদম্ এর অংশক সর্বদা ধনাত্মক, কিন্তু পূর্ণকটি ধনাত্মক, ঋণাত্মক অথবা শূন্য হইতে পারে। লগ্ তালিকা হইতে অংশক এবং পর্যবেক্ষণ দ্বারা পূর্ণক নির্ণয়ের পর log 0·0721 এর মান দেখা যায় $\bar{2}$·8581 ; ইহার অর্থ, পূর্ণক ঋণাত্মক (= −2), কিন্তু অংশক ধনাত্মক (= +·8581), সুতরাং log 0·0721 = −2 +·8581 = −$\bar{1}$·1419 অর্থাৎ **লগারিদম্‌টির প্রকৃত মান** হইল ইহাই। কিন্তু লগ্ বা অ্যান্টিলগ্-তালিকা ব্যবহারের ক্ষেত্রে ঋণাত্মক দশমিক অংশসহ ঐ প্রকৃত মান অচল, এবং সেইজন্য দশমিক অংশটিকে উক্ত তালিকাগুলি ব্যবহারের পূর্বে ধনাত্মক করিয়া লওয়া উচিত। যেমন, log N এর মান যদি −2·5673 হয়, তবে N নির্ণয়ের জন্য অ্যান্টিলগ্ তালিকা ব্যবহারের পূর্বে মানটিকে নিম্নে প্রদত্ত পদ্ধতিতে পরিবর্তিত করিতে হইবে :

$$\log N = -2{\cdot}5673 = -3 + 3 - 2{\cdot}5673 = -3 + {\cdot}4327 = \bar{3}{\cdot}4327.$$

দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণসমূহ

উদা. 1. মান নির্ণয় কর (লগারিদম্ এর সাহায্যে) :

$$\frac{11}{17} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{21} \times \frac{9}{29} \times \frac{36}{61} \times \frac{22}{71}.$$

ধরা যাক্, নির্ণেয় মান = x

$\therefore \log x = (\log 11 - \log 17) + (\log 7 - \log 9) + (\log 2 - \log 21)$
$+ (\log 9 - \log 29) + (\log 36 - \log 61) + (\log 22 - \log 71)$

$\log 11 = 1{\cdot}0414$	$\log 17 = 1{\cdot}2304$
$\log 7 = 0{\cdot}8451$	$\log 9 = 0{\cdot}9542$
$\log 2 = 0{\cdot}3010$	$\log 21 = 1{\cdot}3222$
$\log 9 = 0{\cdot}9542$	$\log 29 = 1{\cdot}4624$
$\log 36 = 1{\cdot}5563$	$\log 61 = 1{\cdot}7853$
$\log 22 = 1{\cdot}3424$	$\log 71 = 1{\cdot}8513$
$6{\cdot}0404$	$8{\cdot}6058$

$\therefore \log x = 6{\cdot}0404 - 8{\cdot}6058 (= -3 + 9{\cdot}0404) = \bar{3}{\cdot}4346$

$\therefore x = \text{antilog } \bar{3}{\cdot}4346 = {\cdot}\mathbf{002720}.$

উদা. 2. লগারিদম্ এর সাহায্যে মান নির্ণয় কর : $\dfrac{0{\cdot}4932 \times 653{\cdot}7}{0{\cdot}07213 \times 8456}$

ধরা যাক $x = \dfrac{{\cdot}4932 \times 653{\cdot}7}{0{\cdot}07213 \times 8456} = \dfrac{N}{D}$ (মনে করা হইল) ;

$\therefore \log x = \underbrace{(\log {\cdot}4932 + \log 653{\cdot}7)}_{\log N} - \underbrace{(\log 0{\cdot}07213 + \log 8456)}_{\log D}$

log N	log D
$\log {\cdot}4932 = \bar{1}{\cdot}6930$	$\log 0{\cdot}07213 = \bar{2}{\cdot}8581$
$+\log 653{\cdot}7 = 2{\cdot}8154$	$+\log 8456 = 3{\cdot}9272$
$= 2{\cdot}5084$	$= 2{\cdot}7853$

$\therefore \log x = 2{\cdot}5084 - 2{\cdot}7853 = \bar{1}{\cdot}7231$

$\therefore x = \text{antilog } \bar{1}{\cdot}7231 = \mathbf{0{\cdot}5285}$

টীকা। antilog লওয়ার পূর্বে দশমিক অংশকে (যদি ধনাত্মক না হয়) ধনাত্মক করিয়া লওয়ার বিষয়ে সতর্ক থাকিতে হইবে—অখণ্ড অংশের উপযুক্ত পরিবর্তনের মধ্য দিয়া ইহা করিতে হইবে।

উদা. 3. লগারিদম্ এর সাহায্য লইয়া মান নির্ণয় কর :

$$x = \frac{(78{\cdot}41)^3 \sqrt{142{\cdot}3}}{\sqrt[4]{{\cdot}1562}} = \frac{N}{D} \text{ (মনে করা যাক)}$$

log N	log D
$3 \log 78{\cdot}41 = 3 \times 1{\cdot}8944 = 5{\cdot}6832$	$\frac{1}{4} \log {\cdot}1562 = \frac{1}{4} \times \bar{1}{\cdot}1937$
$+\frac{1}{2} \log 142{\cdot}3 = \frac{1}{2} \times 2{\cdot}1532 = 1{\cdot}0766$	$= \frac{1}{4}(-4 + 3{\cdot}1937)$
$6{\cdot}7598$	$= \bar{1}{\cdot}7984$;
$\log D = \bar{1}{\cdot}7984$	
$\log x = \log N - \log D = 6{\cdot}9614$	

$\therefore x = \text{antilog } 6{\cdot}9614 = \mathbf{91,49,000}$ (প্রায়)।

উদ্ঘাটন (Involution) ও মূলাকর্ষণ (Evolution)

উদা. 4. 0·01865 এর (*i*) ঘন এবং (*ii*) ঘনমূল নির্ণয় কর।

(*i*) ধরা যাক, $x=(0{\cdot}01865)^3$; $\therefore$ $\log x=3\log 0{\cdot}01865$

$$=3\times\bar{2}{\cdot}2706=\bar{6}{\cdot}8118\ ;$$

$$\therefore\ x=\text{antilog}\ \bar{6}{\cdot}8118=\mathbf{0{\cdot}000006483.}$$

(*ii*) ধরা যাক, $y=\sqrt[3]{0{\cdot}01865}$

$$\therefore\ \log y=\tfrac{1}{3}\log{\cdot}01865=\tfrac{1}{3}\times\bar{2}{\cdot}2706=\tfrac{1}{3}(-3+1{\cdot}2706)=\bar{1}{\cdot}4235\ ;$$

$$\therefore\ y=\text{antilog}\ \bar{1}{\cdot}4235=\mathbf{0{\cdot}2652.}$$

উদা. 5. লগ্-তালিকা ব্যবহার করিয়া মান নির্ণয় কর :

$$(i)\ \sqrt[18]{1129}\ ;\ (ii)\ \sqrt[7]{\left(\frac{1}{1{\cdot}235}\right)}$$

(*i*) ধরা যাক, $\sqrt[18]{1129}=x$ অর্থাৎ, $x=(1129)^{\frac{1}{18}}$

$$\therefore\ \log x=\tfrac{1}{18}\log 1129=\tfrac{1}{18}\times 3{\cdot}0527=0{\cdot}1696\ ;$$

$$\therefore\ x=\text{antilog}\ 0{\cdot}1696=\mathbf{1{\cdot}478.}$$

ii) ধরা যাক, $x=\sqrt[7]{\left(\frac{1}{1{\cdot}235}\right)}=\left(\frac{1}{1{\cdot}235}\right)^{\frac{1}{7}}$

$$\therefore\ \log x=\log\left(\frac{1}{1{\cdot}235}\right)^{\frac{1}{7}}=\tfrac{1}{7}\log\left(\frac{1}{1{\cdot}235}\right)$$

$$=\tfrac{1}{7}(\log 1-\log 1{\cdot}235)=\tfrac{1}{7}(0-0{\cdot}0917)=-\frac{0{\cdot}0917}{7}$$

$$=-0{\cdot}0131=-1+1-0{\cdot}0131=\bar{1}{\cdot}9869\ ;$$

$$\therefore\ x=\text{antilog}\ \bar{1}{\cdot}9869=\mathbf{0{\cdot}9703.}$$

উদা. 6. 7^{20} সংখ্যাটিতে অঙ্কের সংখ্যা নির্ণয় কর।

ধরা যাক, $x=7^{20}$; $\therefore$ $\log x=\log 7^{20}=20\log 7=20\times 0{\cdot}8451$

$$=16{\cdot}9020\ ;$$

যেহেতু $\log 7^{20}$ এর পূর্ণক 16, সুতরাং 7^{20} তে নির্ণেয় অঙ্কের সংখ্যা $=16+1=\mathbf{17}$.

উদা. 7. সমাধান কর : $(1+i)^{15}=\dfrac{2{\cdot}654\times 1{\cdot}838}{2{\cdot}083}$.

$15\log(1+i)=\log 2{\cdot}654+\log 1{\cdot}838-\log 2{\cdot}083=0{\cdot}3696,$

$$\begin{array}{rr} & \log 2{\cdot}654=0{\cdot}4239 \\ (+) & \log 1{\cdot}838=0{\cdot}2644 \\ \hline & 0{\cdot}6883 \\ (-) & \log 2{\cdot}083=0{\cdot}3187 \\ \hline & 0{\cdot}3696 \end{array}$$

বা, $\log(1+i)=\frac{1}{15}\times 0{\cdot}3696$
$=0{\cdot}0246,$

বা, $1+i=\text{antilog } 0{\cdot}0246=1{\cdot}058,$

বা, $i=0{\cdot}058.$

উদা. 8. সমাধান কর : $3^{x-1}=4.5^{1-3x}$.

$(x-1)\log 3=\log 4+(1-3x)\log 5$

বা, $x(\log 3+3\log 5)=\log 4+\log 5+\log 3=\log 60,$

বা, $x\log 375=\log 60$

$\therefore\quad x=\dfrac{\log 60}{\log 375}=\dfrac{1{\cdot}7782}{2{\cdot}5740}=\mathbf{0{\cdot}6910}$

$\dfrac{1{\cdot}7782}{2{\cdot}5740}$ এর মান নির্ণয়ের জন্য পুনরায় লগারিদম্ এর সাহায্য লওয়া যায়,

যেমন :

$$\begin{array}{lr} & \log 1{\cdot}77=0{\cdot}2480 \\ \text{মধ্যক পার্থক্য : 8এর জন্য} = & 20 \\ \text{,, \ ,, : 2 ,, ,,} = & 5 \\ \hline & \log 1{\cdot}7782=0{\cdot}2501 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & \log 1{\cdot}7782=0{\cdot}2501 \\ (-) & \log 2{\cdot}5740=0{\cdot}4106 \\ \hline & \bar{1}{\cdot}8395; \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} & \log 2{\cdot}57=0{\cdot}4099 \\ \text{মধ্যক পার্থক্য : 4 এর জন্য} = & 7 \\ \hline & \log 2{\cdot}574\ =0{\cdot}4106 \end{array}$$

$\therefore\ \log 2{\cdot}5740=0{\cdot}4106$

$\therefore\ \text{antilog } \bar{1}{\cdot}8395=\mathbf{0{\cdot}6910}$
= নির্ণেয় মান।

প্রশ্নমালা IX(C)

1. (*i*) প্রদত্ত $\log 2=0{\cdot}30103$; মানগুলি লিখ : $\log 200$, $\log 0{\cdot}0002$;

(ii) প্রদত্ত $\log 4350=3{\cdot}6384893$; $\log 0{\cdot}435$ এর মান লিখ।

2. প্রদত্ত $\log 2=0{\cdot}3010300$, $\log 3=0{\cdot}4771213$, $\log 7=0{\cdot}8450980$,

নিম্নের সংখ্যাগুলির লগারিদম্ নির্ণয় কর :

(*i*) $0{\cdot}0000945$; (*ii*) $0{\cdot}001715$; (*iii*) $(0{\cdot}0125)^{\frac{1}{5}}$

(*iv*) $(0{\cdot}405)^{\frac{1}{6}}$; (*v*) $(0{\cdot}0625)^{\frac{1}{16}}$; (*vi*) $(0{\cdot}0025)^{\frac{11}{9}}$.

3. প্রদত্ত $\log 6 = 0.7781513$ এবং $\log 8 = 0.9030900$, $\log 36$ নির্ণয় কর।

4. প্রদত্ত $\log 9 = 0.954242$ এবং $\log 5 = 0.698970$, $\log 6$ নির্ণয় কর।

5. (*a*) প্রদত্ত $\log \frac{1}{2} = \bar{1}.6989700$, $\log \frac{1}{3} = \bar{1}.5228787$; নিম্নের সংখ্যাগুলির লগারিদম্ নির্ণয় কর :

$$\sqrt{3},\ \sqrt{2},\ \tfrac{2}{3}\sqrt[3]{(0.05)} \text{ এবং } \tfrac{12}{25}\sqrt[4]{(1.6)^3} \times \sqrt[3]{(21.6)^4}.$$

(*b*) লগ্-তালিকার সাহায্যে মান নির্ণয় কর :

$$\log \{(2.7)^3 \times (0.81)^{\frac{4}{5}} \div (90)^{\frac{5}{4}}\}.$$

6. প্রদত্ত $\log 2 = 0.3010300$:

(*a*) নিম্নের সংখ্যাগুলির প্রত্যেকটিতে অঙ্কসংখ্যা নির্ণয় কর :

(*i*) 2^{64}, (*ii*) 5^{25}.

(*b*) 2^{40} এর অন্যোন্যকে দশমিক বিন্দুর পরও প্রথম সার্থক অঙ্কের পূর্বে কতগুলি শূন্য আছে, তাহা নির্ণয় কর।

7. লগ্-তালিকার সাহায্যে মান নির্ণয় কর :

(*i*) $42.8 \times 3.26 \times 8.10$; (*ii*) 42.97×0.00258 ;

(*iii*) 0.8176×13.64 ; (*iv*) $84.5 \times 0.1357 \times 1.163$;

(*v*) $0.2543 \div 0.09027$; (*vi*) $0.001834 \div 0.04316$;

(*vii*) $0.678 \times 9.01 \div 0.0234$; (*viii*) $\dfrac{9.753 \times 10.34 \times 0.9252}{1.453 \times 3.143}$;

(*ix*) $\sqrt[3]{6857}$; $\sqrt[3]{.06857}$; (*x*) $\sqrt[9]{10}$;

(*xi*) $(789.45)^{\frac{1}{8}}$; (*xii*) $\sqrt[3]{45.37} \times (0.7692)^4$;

(*xiii*) $\dfrac{1}{(1.045)^{20}}$; (*xiv*) $\sqrt[7]{\left(\dfrac{1}{36.21}\right)}$;

(*xv*) $\dfrac{\sqrt[5]{2.415}}{(0.824)^4}$; (*xvi*) $\dfrac{(63.28)^3 \times (.00843)^2 \times (.4623)}{(412.3) \times (2.184)^5}$;

(*xvii*) $\sqrt[3]{\dfrac{5.52 \times 2610}{7.36 \times 3.142}}$; (*xviii*) $\dfrac{\sqrt[3]{0.4165} \times \sqrt[5]{0.8264}}{\sqrt[3]{0.6438} \times \sqrt[8]{0.0186}}$;

(*xix*) $\dfrac{\sqrt[3]{19.41} \times 4.62 \times (1.783)^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[7]{14.36}}$;

(*xx*) $\sqrt[5]{\left(\frac{(\cdot32)^8\times(625)^4}{(\cdot00432)^2\times(\cdot3125)^3\times25}\right)}$; (*xxi*) $\frac{400\times(1\cdot04)^{30}}{(1\cdot04)^{30}-1}$;

(*xxii*) $30\ [(1+0\cdot035)^{15}-1]$; (*xxiii*) $1275\ \{1-(1\cdot0575)^{-15}\}$.

8. (*a*) প্রদত্ত log 659·31 = 2·8190897 এবং log 6·5932 = 0·8190962, interpolation পদ্ধতিতে log 6593·17 এবং log 0·0000659317 এর মান নির্ণয় কর।

(*b*) log 25·819 = 1·4119394 এবং 1 এর জন্য পার্থক্য 168 হইলে log 258·196 এর মান নির্ণয় কর।

(*c*) প্রদত্ত log 964·61 = 2·9843518 এবং log 9646·2 = 3·9843563 ; যে সংখ্যার লগারিদম্ 0·9843545 তাহা নির্ণয় কর।

(*d*) প্রদত্ত log 390·97 = 2·5921434 এবং log 3909·8 = 3·5921545 ; antilog $\bar{4}$·5921506 নির্ণয় কর।

(*e*) 3,49,388 এর পঞ্চম মূলের 3 দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন শুদ্ধ মান নির্ণয় কর। (প্রদত্ত log 34,938 = 4·5432980, log 34,939 = 4·5433105 ; log 12,842 = 4·1086327, log 12,843 = 4·1086665.

9. সমাধান কর : (*i*) $\left(\frac{1}{\cdot4}\right)^x=6\cdot25$; (*ii*) $2^x=100$;

(*iii*) $3^x=2$; (*iv*) $5^{x-\frac{1}{3}}=400$;

(*v*) $4^{2x-1}=5^{x+2}$; (*vi*) $(1+x)^3=1\cdot586(1+x)^{-10}$;

(*vii*) $(1-x)^{12}=0\cdot5187$; (*viii*) $(\frac{21}{20})^n=2$;

(*ix*) $(\frac{9}{10})^n=\frac{1}{2}$.

[যেখানে প্রয়োজন, log 3 = ·4771213, log 7 = ·8450980 এবং log 2 = ·3010300 ধর।]

10. (*a*) যদি $2^x=3^y$ এবং $2^{y+1}=3^{x-1}$ হয়, তবে লগ-তালিকার সাহায্যে x এবং y এর দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন শুদ্ধ মান নির্ণয় কর।

(*b*) সমাধান কর : $2^x . 7^y=80000$ এবং $3^y=500$, যদি প্রদত্ত থাকে যে log 2 = 0·30103, log 3 = 0·47712 এবং log 7 = 0·84510.

[x এবং y এর 4 দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন শুদ্ধ মান নির্ণয় করিতে হইবে।]

11. সমাধান কর : $5.3^x - 3.2^y = 30000$;

$$3.3^x + 6.2^y = 20000 ;$$

[প্রদত্ত log 2 = ·30103, log 3 = ·47712, log 13 = 1·11394.]

12. মান নির্ণয় কর : $\frac{1}{\cdot 05}\left\{\frac{1}{(1\cdot 05)^{18}} - \frac{1}{(1\cdot 05)^{20}}\right\}$.

[প্রদত্ত log 105 = 2·0211893, log 5303214 = 6·7245391,
log 3768894 = 6·576214.]

13. প্রদত্ত log 2592 = 3·413634 এবং log 432 = 2·635483 ; log 2 এবং log 3 নির্ণয় কর।

14. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে লগ্-তালিকার সাহায্যে x এর 2 দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান নির্ণয় কর :

(a) $6^{3-4x}.4^{x+5} = 8$.

(b) $7^{3x+2} + 4^{x+2} = 7^{3x+1} + 2^{2x+6}$.

(c) $5^{5-3x} + 4^{\frac{1}{2}x+3} = 5^{7-3x} - 2^{x+5}$.

উত্তরমালা

1. (i) 2·30103, $\bar{4}$·30103 = −3·69897 ; (ii) $\bar{1}$·6384893 = −0·3615107 ;

2. (i) $\bar{5}$·9754319 = −4·0245681 ; (ii) $\bar{3}$·2342640 = −2·7657360 ; (iii) $\bar{1}$·6193820 = −0·3806180 ; (iv) $\bar{1}$·9345759 = −0·0654241 ; (v) $\bar{1}$·8279829 = −0·1720171 ; (vi) $\bar{4}$·8197044 = −3·1802956 ;

3. 1·5563026. 4. 0·7781513.

5. (a) 0·2385606, 0·1505150, $\bar{1}$·2902321 = −0·7097679, 1·6136031 ; (b) −1·2218. 6. (a) (i) 20, (ii) 18 ; (b) 12.

7. (i) 1130 ; (ii) 0·1109 ; (iii) 11·15 ; (iv) 13·34 ; (v) 2·817 ; (vi) 0·04249 ; (vii) 261 ; (viii) 20·43 ; (ix) 19·00 ; 0·4093 ; (x) 1·2915 ; (xi) 2·302 ; (xii) 1·248 ; (xiii) 0·415 ; (xiv) 0·5988 ; (xv) 2·588 ; (xvi) 0·0004059 ; (xvii) 8·541 ; (xviii) 1·37 ; (xix) 8·018 ; (xx) 259·5 ; (xxi) 578·9 ; (xxii) 20·19 ; (xxiii) 722·8 ; 8. (a) 3·8190943, −4·1809057 ; (b) 2·4119495 ; (c) 9·64616 ; (d) 0·000390976 ; (e) 12·843,

9. (i) 2 : (ii) 6·643 ; (iii) 0·631 ; (iv) 4·723 ; (v) 3·958 ; (vi) 0·036 ; (vii) 0·875 ; (viii) 14·2 ; (ix) 6·9.

10. (a) $x = 2·71, y = 1·71$; (b) $x = 0·4070, y = 5·6568$.

11. $x = 7·94, y = 8·002$. 12. 3·06864.

13. 0·30103, 0·47712. 14. (a) 1·77 ; (b) 0·03 ; (c) 1·21.

পরীক্ষামূলক প্রশ্নাবলী (TEST PAPERS)

(সময় ঃ এক ঘণ্টা)

1. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলিকে লগারিদম্-মুক্ত আকারে প্রকাশ কর :

$10^{3\log_{10}c}$; $a^{3\log_a b+\log_a c}$; $a^{4\log_a k-3\log_a h}$;

$b^{\frac{1}{2}\log_b k-\frac{3}{2}\log_b h}$; $a^{a^{\log_a \log_a x}}$; $c^{(2c)^{\log_c \log_c y}}$.

2. প্রমাণ কর যে $\log_y x.\log_z y.\log_x z=1$.

3. যদি $\log_{10}a^2b^5=2+3\log_{10}2$ এবং $\log_{10}a^4b^3=4-\log_{10}2$ হয়, তবে a এবং b এর মান নির্ণয় কর।

4. প্রমাণ কর যে

$$\log_a bc.\log_b ca.\log_c ab=2+\log_a(bc)+\log_b(ca)+\log_c(ab).$$

5. সমাধান কর : $\log(x^3+5)=3\log(x+2)$.

6. লগ্-তালিকার সাহায্যে মান নির্ণয় কর :

(i) $\log_7 10$; (ii) $\log_4 5$; (iii) $\log_{\cdot 3} 4{\cdot}79$

7. কোন A.P.র pতম, qতম এবং rতম পদগুলি যথাক্রমে $1/a$, $1/b$ এবং $1/c$ হইলে প্রমাণ কর যে

$$(q-r)bc+(r-p)ca+(p-q)ab=0.$$

যদি a, b, c কোন গুণোত্তর শ্রেণীরও যথাক্রমে pতম, qতম, rতম পদ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$a(b-c)\log a+b(c-a)\log b+c(a-b)\log c=0$, যেখানে যে কোন ধনাত্মক নিধান সম্পর্কে লগারিদম্গুলি লওয়া হইয়াছে।

8. লগ্-তালিকার সাহায্য না লইয়া দেখাও যে $\log_{10}3$, $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\log_{10}2$ এর সহিত প্রায় সমান।

উত্তরমালা

1. c^3 ; b^3c ; k^4/h^3 ; $\sqrt{(k/h^3)}$; x ; y^2. 3. $a=5, b=2$.

5. $x=-1\pm\frac{1}{3}\sqrt{2}$. 6. (i) 1·183 ; (ii) 1·161 ; (iii) 2·699

10

চক্রবৃদ্ধি

(COMPOUND INTEREST)

10·1. সূচনা

যখন কোন ব্যক্তি অথবা সংস্থা **আসল বা মূলধন** (Principal) বলিয়া কথিত কোন অর্থ গ্রহণ করিয়া আপন আপন প্রয়োজনে নিয়োগ করেন, তখন উক্ত ব্যক্তি বা সংস্থা উহার জন্য যে অর্থ প্রদান করেন তাহাকে সুদ বা সরল কুসীদ (Interest) বলা হয়। সাধারণত সুদ নির্দিষ্টভাবে উল্লিখিত সমান সময়ের ব্যবধানে প্রদত্ত হয়, যেমন প্রতি বৎসরান্তে (annually), প্রতি ছয় মাস অন্তে (half-yearly) অথবা প্রতি তিন মাস অন্তে (quarterly)। আসল ও সুদের সমষ্টিকে **সবৃদ্ধিমূল** (**amount**) বলে। প্রতি একক সময়ের জন্য ধার্য সুদ এবং আসল এর অনুপাতকে বলা হয় **সুদের হার** (**rate of interest**)। অন্যভাবে উল্লিখিত না হইলে এক বৎসরকে সময়ের একক ধরা হয়। সুদের হারকে সচরাচর শতকরা হারে প্রকাশ করা হইয়া থাকে। যেমন, আসল 200 টাকা এবং ইহার এক বৎসরের সুদ 4 টাকা হইলে সুদের হার হইবে $\frac{4}{200}\times 100$ বা 2% প্রতি বৎসর (*p.a.* অর্থাৎ *per annum*)। **সরল কুসীদ বা সুদ** (*S. I.* **অর্থাৎ simple interest**) হইল, যে সময় ব্যাপিয়া মূল আসল নিয়োগ করা হয় সেই সময়ের জন্য উক্ত আসলের হিসাবকৃত সুদ। তাহা হইলে $r\%$ *p. a.* সুদের হার n বৎসরের জন্য আসল P এর সুদ $I=P.n.(r/100)$ এবং **সবৃদ্ধিমূল** A (আসল + সুদ) $=P\{1+(nr)/100\}$।

এখন ধরা যাক্, সময়ের বিশেষভাবে উল্লিখিত সংখ্যক সমব্যবধানগুলির প্রথমটির অন্তে দেয় সুদকে মূল আসলের সহিত যুক্ত করা হইল ও এই বর্ধিত আসলকে সময়ের দ্বিতীয় ব্যবধানের জন্য দ্বিতীয় আসল বা মূলধন হিসাবে গণ্য করা হইল, এবং এই প্রক্রিয়াটি কোন প্রদত্ত সময় ব্যাপিয়া বজায় রাখা হইল। এইরূপ ক্ষেত্রে বলা হয় যে সুদকে মূলধনে পরিণত করা হইয়াছে (the interest has been compounded)। সময়ের প্রদত্ত সংখ্যক ব্যবধানগুলির শেষে মূল আসলের যে পরিমাণ বৃদ্ধি ঘটে তাহাকে ঐ সময়ের **চক্রবৃদ্ধি** (**Compound interest**) বলা হয়।

ধরিয়া লওয়া হইল যে ছাত্রছাত্রীরা ইতিপূর্বে সরল কুসীদ সংক্রান্ত প্রশ্নগুলির সহিত পরিচিত হইয়াছে। সুতরাং বর্তমান অধ্যায়ে কেবল চক্রবৃদ্ধি সম্পর্কিত প্রশ্নগুলি

বিশদভাবে আলোচনা করা হইবে। চক্রবৃদ্ধির তত্ত্ব জনসংখ্যার বৃদ্ধি, পরিসম্পৎ (assets) মূল্যের অবচয় (depreciation) প্রভৃতি সংশ্লিষ্ট অন্যান্য প্রশ্নসমূহ সমাধানেও প্রয়োগ করা হয়। এইরূপ প্রশ্নগুলি এই অধ্যায়ের অন্তর্ভুক্ত করা হইল।

10·2. চক্রবৃদ্ধি

কোন নির্দিষ্ট সময়ের জন্য **মূলধন** বলিয়া কথিত কোন অর্থ লগ্নী করা হইলে এবং ঐ নির্দিষ্ট সময়কে উল্লিখিত সংখ্যক ও **পরিবর্তন সাধনের কাল (conversion periods)** বা **সুদ গণনার কাল (interest periods)** বলিয়া অভিহিত। সমানকালের ব্যবধানে বিভক্ত করিলে যদি প্রত্যেকটি সমানকালের প্রারম্ভে যে অর্থ নিযুক্ত থাকে তাহার জন্য ঐ কালটির অন্তে যে সুদ দেয় হয় তাহাকে দেয় হওয়ামাত্রই **মূলধনে** পরিণত করা হয় (compounded), তবে বলা হয় যে প্রথমোক্ত অর্থকে **চক্রবৃদ্ধি সুদে** (*C. I.* **অর্থাৎ compound interest**) লগ্নী করা হইয়াছে। উল্লিখিত সংখ্যক সমানকালগুলির অন্তে মূল আসলের বা মূলধনের যে পরিমাণ বৃদ্ধি হয় তাহাকে প্রদত্ত লগ্নীকালের **চক্রবৃদ্ধি** (*C. I.*) বলা হয়।

সাধারণত পরিবর্তন সাধনের কালগুলি তিন মাসের, অথবা ছয় মাসের বা এক বৎসরের হইয়া থাকে ; এইরূপ ক্ষেত্রে যথাক্রমে বলা হয় যে সুদ প্রতি তিন মাস অন্তে অথবা প্রতি ছয় মাস অন্তে (অর্ধ-বৎসরান্তে) অথবা প্রতি বৎসরান্তে মূলধনে পরিণত হয় ; বিশেষক্ষেত্রে পরিবর্তন সাধনের কাল সংক্ষিপ্ততর হইতে পারে।

যদি পরিবর্তন সাধনের কালের কোন উল্লেখ না থাকে, তবে ধরিয়া লওয়া উচিত যে সুদ **বৎসরান্তে দেয়, অর্থাৎ**, পরিবর্তন সাধনের কাল 1 বৎসর।

উদা. : বার্ষিক 6% হারে 1000 টাকার 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর, যদি প্রতি অর্ধ-বৎসরান্তে সুদ দেয় হয় (অর্থাৎ যদি পরিবর্তনসাধনের কাল অর্ধ-বৎসর হয়)।

এখানে $i=1$টি পরিবর্তন সাধনের কালের (অর্থাৎ অর্ধ-বৎসরের) 1 টাকার সুদ

$$=\frac{1}{2}\times\frac{6}{100}=0·03 \text{ টাকা।}$$

2 বৎসরের মধ্যে সর্বশুদ্ধ চারিটি পরিবর্তন সাধনের কাল আছে।

মূল মূলধন = 1000 টাকা।

প্রথম পরিবর্তন সাধনের কালের

শেষে দেয় সুদ = 30 টা. ··· ··· (1000 × 0·03)

দ্বিতীয় মূলধন = 1030 টা.

দ্বিতীয় পরিবর্তন সাধনের কালের

শেষে দেয় সুদ = 30·90 টা. ··· (1030 × 0·03)

তৃতীয় মূলধন = 1060·90 টা.

তৃতীয় পরিবর্তন সাধনের কালের

শেষে দেয় সুদ = 31·83 টা. ··· (1060·90 × 0·03)

চতুর্থ মূলধন = 1092·73 টা.

চতুর্থ পরিবর্তন সাধনের কালের

শেষে দেয় সুদ = 32·78 টা. ··· (1092·73 × 0·03)

চূড়ান্ত সমূল চক্রবৃদ্ধি = 1125·51 টা.

∴ দুই বৎসর পরে চক্রবৃদ্ধি = 1125·51 টা. − 1000 টা. = 125 টা. 51প.

10·3. গুরুত্বপূর্ণ প্রতীকসমূহ (Important symbols)

চক্রবৃদ্ধি প্রসঙ্গে নিম্নবর্ণিত দুইটি গুরুত্বপূর্ণ প্রতীক i এবং r, প্রায়ই ব্যবহৃত হয়:

r ≡ সুদের বার্ষিক শতকরা হার

i ≡ একটি পরিবর্তন সাধনের কালের জন্য একক টাকার সুদ।

স্পষ্টত

(i) পরিবর্তন সাধনের কাল 1 বৎসর হইলে $i = \frac{r}{100}$.

(ii) যখন সুদ দেয় হয়

প্রতি অর্ধ-বৎসরান্তে তখন পরিবর্তন সাধানের কাল = $\frac{1}{2}$ বৎসর, সুতরাং $i = \frac{r}{100 \times 2}$.

প্রতি তিন মাসান্তে, তখন পরিবর্তন সাধনের কাল = $\frac{1}{4}$ বৎসর, সুতরাং $i = \frac{r}{100 \times 4}$.

প্রতি বৎসরে k বার, তখন পরিবর্তন সাধনের কাল = $\frac{1}{k}$ বৎসর, সুতরাং $i = \frac{r}{100 \times k}$.

লক্ষণীয়ঃ যখন সুদের হার বার্ষিক $4\frac{1}{2}\%$ এবং

(1) সুদ বৎসরান্তে দেয়, তখন $i = \frac{4·5}{100} = ·045$

(2) সুদ অর্ধ-বৎসরান্তে দেয়, তখন $i = \frac{·045}{2} = ·0225$

(3) সুদ এক চতুর্থ বৎসরান্তে দেয়, তখন $i = \frac{·045}{4} = ·01125$, ইত্যাদি

10·4. চক্রবৃদ্ধির সূত্র

সুদের হার i (অর্থাৎ, একটি পরিবর্তন সাধনের কালের জন্য 1 টাকার সুদ = i) হইলে n সংখ্যক পরিবর্তন সাধনের কালের জন্য মূলধন P এর সমূলচক্রবৃদ্ধি A নির্ণয়ের সূত্র বাহির করিতে হইবে।

$$
\begin{aligned}
\text{প্রারম্ভিক মূলধন} &= P\\
\text{প্রথম পরিবর্তন সাধনের কালের সুদ} &= P.\,i\\
\hline
\text{দ্বিতীয় মূলধন} &= P(1+i)\\
\text{দ্বিতীয় পরিবর্তন সাধনের কালের সুদ} &= P(1+i).i\\
\hline
\text{তৃতীয় মূলধন} &= P(1+i)+P(1+i).i\\
&= P(1+i)(1+i)\\
&= P(1+i)^2\\
\text{তৃতীয় পরিবর্তন সাধনের কালের সুদ} &= P(1+i)^2.i\\
\hline
\text{চতুর্থ মূলধন} &= P(1+i)^3,\ \text{ইত্যাদি}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ nটি পরিবর্তন সাধনের কালের শেষে সমূলচক্রবৃদ্ধি $A=P\ (1+i)^n$ ......(1)

এবং nটি " " " " চক্রবৃদ্ধি $I=A-P=P\{1+i)^n-1\}$ ...(2)

অনুসিদ্ধান্ত : (1) সূত্রকে লগারিদ্‌মিক্ আকারে প্রকাশ করা যায়, যথা :

$$\log A=\log P+n\log(1+i)\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (1a)$$

উদা. 1. ধরা হইল, A, P, n প্রদত্ত ; i নির্ণয় করিতে হইবে।

(1) হইতে, $1+i=\sqrt[n]{\frac{A}{P}}$ বা, $\log(1+i)=\frac{\log A-\log P}{n}$

$$\therefore\quad (1+i)=\text{antilog}\left\{\frac{\log A-\log P}{n}\right\}\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\quad (3)$$

উদা. 2. ধরা হইল, A, P এবং i প্রদত্ত ; n নির্ণয় করিতে হইবে।

(1) হইতে, $(1+i)^n=\frac{A}{P}$ বা, $n\log(1+i)=\log A-\log P$

$$\text{বা,}\quad n=\frac{\log A-\log P}{\log(1+i)}\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\quad (4)$$

লক্ষণীয় : যদি কোন অর্থ চক্রবৃদ্ধিহারে 10 বৎসরের জন্য লগ্নী করা হয়

$n=$ পরিবর্তন সাধনের কালের সংখ্যা $=10$, যখন সুদ দেয় হয় **বৎসরান্তে;**

$=10\times2=20$, " " " " **অর্ধ-বৎসরান্তে;**

$=10\times4=40$, " " " **এক-চতুর্থ বৎসরান্তে;**

ইত্যাদি।

দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণসমূহ

উদা. 1. চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর যখন

(i) বার্ষিক 4% হারে 2500 টাকা তিন বৎসরের জন্য লগ্নী করা হয় এবং সুদ 3 মাস অন্তর দেয় হয় ;

(ii) বার্ষিক 3% হারে 7350 টাকা দশ বৎসরের জন্য লগ্নী করা হয় এবং সুদ 6 মাস অন্তর দেয় হয়।

(i) এখানে $P=2500$ টাকা ; $i=\frac{4}{100}\times\frac{1}{4}=0\cdot01$

$n=$ পরিবর্তন সাধনের কালের সংখ্যা $=3\times4=12$

সূত্র (1) হইতে, $A=P(1+i)^n=2500(1\cdot01)^{12}$ টাকা ;

$\therefore\ \log A=\log 2500+12\log 1\cdot01$

$=3\cdot3979+12\times0\cdot0043=3\cdot4495$;

$\therefore\ A=\text{antilog } 3\cdot4495=2815$ টাকা (প্রায়) ;

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি $=2815$ টাকা $-$ 2500 টাকা $=315$ টাকা।

(ii) এখানে $P=7350$ টাকা ; $i=\frac{3}{100}\times\frac{1}{2}=0\cdot015,\ n=10\times2=20$;

$\therefore$ সূত্র (1) হইতে, $A=P(1+i)^n=7350(1\cdot015)^{20}$;

$\therefore\ \log A=\log 7350+20\log 1\cdot015=3\cdot8663+20\times0\cdot0064$

$=3\cdot9943$;

$\therefore\ A=\text{antilog } 3\cdot9943=9870$ টাকা (প্রায়) ;

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি $=9870$ টাকা $-$ 7350 টাকা $=2520$ টাকা।

উদা. 2. সুদ বৎসরান্তে দেয় হইলে বার্ষিক 5% হারে 2 টাকার কত বৎসরের সমূল চক্রবৃদ্ধি 15 টাকা হইবে ?

এখানে $A=15,\ P=2,\ i=0\cdot05,\ n=?$

(1) সূত্রের সাহায্যে, $15=2(1\cdot05)^n$; $\therefore\ \log 15=\log 2+n\log 1\cdot05$;

$$\therefore\ n=\frac{\log 15-\log 2}{\log 1\cdot05}=\frac{1\cdot1761-0\cdot3010}{0\cdot0212}=\frac{0\cdot8751}{0\cdot0212}$$

$=41\cdot3$ বৎসর (প্রায়)।

উদা. 3. চক্রবৃদ্ধির হার বার্ষিক 5% হইলে কত সময়ে কোন টাকা দ্বিগুণ হইবে ?

ধরা যাক্ $P,\ n=$ যথাক্রমে আসল এবং বৎসরের সংখ্যা

তাহা হইলে $A=2P$, এবং এখানে $i=0\cdot05$;

$A=P(1+i)^n$ সূত্র হইতে, $2P=P(1+0\cdot05)^n=P(1\cdot05)^n$;

$\therefore\ (1\cdot05)^n=2$; $\quad\therefore\ n\log 1\cdot05=\log 2$,

বা, $n=\dfrac{\log 2}{\log 1\cdot05}=\dfrac{0\cdot3010}{0\cdot0212}=14\cdot2$ (প্রায়)

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $=14\cdot2$ বৎসর (প্রায়)।

উদা. 4. সুদ বৎসরান্তে দেয় হইলে ও মূলধনে পরিণত হইলে সুদের হার কি হইবে যদি কোন টাকা 10 বৎসরে তিনগুণ হয় ?

মূলধন যদি P হয়, তবে সমূলচক্রবৃদ্ধি $A=3P$ এবং $n=10$;

$\therefore\ 3P=P(1+i)^{10}$ বা, $(1+i)^{10}=3$ বা, $10\log(1+i)=\log 3$

বা, $\log(1+i)=\frac{1}{10}\times\log 3=\frac{1}{10}\times 0{\cdot}4771=0{\cdot}04771$;

$\therefore\ (1+i)=\text{antilog } 0{\cdot}04771=1{\cdot}116$ বা, $i={\cdot}116$;

$\therefore\ r=100\,i=11{\cdot}6$; সুতরাং নির্ণেয় হার $=11{\cdot}6\%$ ***p.a.*** (প্রায়)।

বর্তমান মূল্য (Present value) এবং বাট্টা বা বাটা (Discount)

নির্দিষ্ট সময় অন্তে দেয় নির্দিষ্ট টাকা Aর বর্তমান মূল্য (*P.V.* অর্থাৎ Present Value) হইল এমন টাকা (ধরা যাক, P) যাহা ঐ নির্দিষ্ট সময় পরে বৃদ্ধি পাইয়া ঐ A টাকা হয়।

সূত্র $A=P(1+i)^n$ হইতে, **বর্তমান মূল্য** $P=\dfrac{A}{(1+i)^n}=A(1+i)^{-n}$

$A-P$ অন্তরফলকে তখন প্রকৃত বাটা (*T.D.* অর্থাৎ True Discount) বলা হয়।

$$\therefore\ T.D.=A-P=A-\frac{A}{(1+i)^n}=A\{1-(1+i)^{-n}\}.$$

উদা. 5. সুদ যদি প্রতি 6 মাস অন্তে দেয় হয় এবং চক্রবৃদ্ধির হার বার্ষিক 5% হয়, তবে 2 বৎসর পরে দেয় 1000 টাকার বর্তমান মূল্য নির্ণয় কর এবং পরে প্রকৃত বাটা নির্ণয় কর।

অথবা, সুদ প্রতি 6 মাস অন্তে দেয় ও চক্রবৃদ্ধির হার বার্ষিক 5% হইলে কত টাকা 2 বৎসর পরে 1000 টাকা হইবে ?

এখানে $i=$একটি পরিবর্তন সাধনের কালের জন্য একক টাকার সুদ, যাহা প্রতি $\frac{1}{2}$ বৎসর অন্তে দেয়

$$=\frac{r}{100\times 2}=\frac{5}{100\times 2}=0{\cdot}025,\ A=1000 \text{ টা. এবং } n=2\times 2=4\ ;$$

$\therefore\ P=\dfrac{A}{(1+i)^n}=\dfrac{1000 \text{ টা.}}{(1{\cdot}025)^4}$ | $\therefore\ \log P=\log 1000-4\log 1{\cdot}025$ $=3-4\times 0{\cdot}0107=2{\cdot}9572$;

$\therefore\ P=\text{antilog } 2{\cdot}9572=$ **906 টা. 10 প.** (প্রায়)।

$\therefore\ T.D.=A-P=1000$ টা. $-\ 906{\cdot}10$ টা. $=$ **93 টা. 90 প.**

উদা. 6. সুদ তিন মাস অন্তর দেয় এবং চক্রবৃদ্ধির হার বার্ষিক 8% হইলে কি সময়ে 1200 টাকার চক্রবৃদ্ধি 124 টা. 60 প. হইবে ?

ধরা যাক্, n = নির্ণেয় বৎসরের সংখ্যা

এখানে $P=1200$ টা., $i=\dfrac{8}{100\times4}=0{\cdot}02$

$\therefore\ C.I.=A-P=P\{(1+i)^n-1\}=1200\{(1+0{\cdot}02)^{4n}-1\}$ টা.

$\therefore\ 124{\cdot}60$ টা. $=1200\{(1{\cdot}02)^{4n}-1)$ টা.

বা, $\dfrac{124{\cdot}60}{1200}+1=(1{\cdot}02)^{4n}$ বা, $\dfrac{1324{\cdot}60}{1200}=(1{\cdot}02)^{4n}$;

উভয় পক্ষের log লইয়া, $\log 1324{\cdot}60-\log 1200=4n\log 1{\cdot}02$

$\log 1324{\cdot}60=3{\cdot}1221$

$\log 1200 \quad =3{\cdot}0792$

$(-) \qquad =0{\cdot}0429$

$4\times\log\ 1{\cdot}02=4\times0{\cdot}0086$

$=0{\cdot}0344$

$n=\dfrac{\log 1324{\cdot}60-\log 1200}{4\times\log 1{\cdot}02}$

$=\dfrac{0{\cdot}0429}{0{\cdot}0344}$

$=\dfrac{429}{344}=1$ বৎসর 3 মাস (প্রায়)।

উদা. 7. সুদের হার কি হইলে 6345 টাকার 7 বৎসরে সমূল চক্রবৃদ্ধি 7288 টাকা হইবে ? (সুদ বৎসরান্তে দেয়)

ধরা যাক্, i = একক টাকার 1 বৎসরে সুদ

এখানে $P=6345$ টা. ; $A=7288$ টা., এবং $n=7$

$A=P(1+i)^n$ সূত্র প্রয়োগ করিলে, $7288=6345(1+i)^7$

বা, $\log 7288=\log 6345+7\log(1+i)$

বা, $7\log(1+i)=\log\ 7288-\log 6345=3{\cdot}8626-3{\cdot}8024=0{\cdot}0602$

বা, $\log\ (1+i)=\dfrac{0{\cdot}0602}{7}=0{\cdot}0086$;

$\therefore\ (1+i)=\text{antilog}\ 0{\cdot}0086=1{\cdot}020$;

$\therefore\ i=0{\cdot}020$; $\therefore\ r=100i=100\times0{\cdot}020=2$;

$\therefore$ নির্ণেয় হার $=2\%$ ***p.a.***

উদা. 8. চক্রবৃদ্ধিতে লগ্নী করা কোন টাকার দ্বিতীয় বৎসর অন্তে সমূলচক্রবৃদ্ধি 10,816 টাকা এবং তৃতীয় বৎসর অন্তে উহা 11,248·64 টাকা হইলে সুদের হার এবং লগ্নীকৃত টাকার পরিমাণ নির্ণয় কর।

$P(1+i)^3 = 11{,}248{\cdot}64$ টা. $\cdots(i)$

এবং $P(1+i)^2 = 10{,}816$ টা. $\cdots(ii)$

(i) কে (ii) দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$1+i = \frac{11{,}248{\cdot}64}{10{,}816}$$

$$\therefore\ i = \frac{11{,}248{\cdot}64}{10{,}816} - 1 = \frac{432{\cdot}64}{10816} = \frac{43264}{10816 \times 100} = \frac{1}{25} = 0{\cdot}04\ ;$$

$\therefore\ r = 100\ i = 0{\cdot}04 \times 100 = 4$; $\therefore$ নির্ণেয় হার $= 4\%$ ***p.a.***

(ii) হইতে, $P = 10{,}816$ টা. $\times \dfrac{1}{(1+i)^2} = 10{,}816$ টা. $\times \dfrac{25}{26} \times \dfrac{25}{26}$

$= \mathbf{10{,}000}$ **টাকা**

লক্ষ্য কর :

স্পষ্টত, 10,816 টাকার 1 বৎসরের সুদ $= 11{,}248{\cdot}64$ টা. $- 10{,}816$ টা.

$= 432{\cdot}64$ টাকা।

ধরা যাক্, y, $z \equiv$ যথাক্রমে প্রথম বৎসর পরে মূলধন এবং প্রারম্ভিক মূলধন ;

মূলধন	সুদ
10,816 টা.	432·64 টা.
100 টা.	r

$$\therefore\ r = \frac{432{\cdot}64 \times 100}{10{,}816} = 4$$

সমূলচক্রবৃদ্ধি	মূলধন
11,248·64 টা.	10,816 টা.
10,816 টা.	y

$$\therefore\ y = \frac{10816 \times 10{,}816}{11{,}248{\cdot}64}$$

সমূলচক্রবৃদ্ধি	মূলধন
11,248·64 টা.	10,816 টা.
y	z

$$\therefore\ z = \frac{10{,}816 \times 10816 \times 10{,}816}{11{,}248{\cdot}64 \times 11{,}248{\cdot}64}\text{ টা.}$$

উদা. 9. বার্ষিক 5% হারে কোন টাকার 3 বৎসরের সুদ ও চক্রবৃদ্ধির পার্থক্য 228 টা. 75 প. ; বার্ষিক 5% হারে ঐ টাকার 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর।

ধরা যাক্, $P \equiv$ নির্ণেয় টাকার পরিমাণ। এখানে $i = 5/100 = 0{\cdot}05$, $n = 3$;

$\therefore$ P এর 3 বৎসরের $C.I. = P(1+0{\cdot}05)^3 - P = P \times 0{\cdot}157625$,

এবং P এর 3 বৎসরের $S.I. = P \times 3 \times 0{\cdot}05 = P \times 0{\cdot}15$;

$\therefore\ C.I. - S.I. = P \times 0{\cdot}007625$

বা, $228{\cdot}75$ টা. $= P \times 0{\cdot}007625$;

$$\therefore \quad P = \frac{228 \cdot 75}{0 \cdot 007625} \text{ টা.} = 30{,}000 \text{ টা.} ;$$

$\therefore$ নির্ণেয় $C.I. = 30{,}000\{(1{\cdot}05)^2 - 1\}$ টা. $= 30{,}000 \times 0{\cdot}1025$ টা.

$= 3075$ টাকা।

উদা. 10. এক ব্যক্তি তাঁহার উইলে 18,000 টাকা সম্পর্কে এইরূপ নির্দেশ দিয়াছিলেন যে উহা তাঁহার 9, 12 এবং 15 বৎসর বয়স্ক তিন পুত্রের মধ্যে এইরূপভাবে বন্টন করিয়া দিতে হইবে যেন তাহাদের প্রত্যেকে 25 বৎসর বয়সে একই পরিমাণ টাকার অধিকারী হয়। যদি চক্রবৃদ্ধির হার বাৎসরিক $3\frac{1}{2}\%$ হয় তবে প্রত্যেক পুত্র 25 বৎসর বয়সে কত টাকা পাইবে ?

ধরা যাক্, 25 বৎসর বয়সে প্রত্যেক পুত্রের অংশ $= A$ টাকা

এবং বন্টনের সময় উহাদের অংশ যথাক্রমে x টা., y টা., z টা. ;

সুতরাং $x + y + z = 18{,}000$

এবং যথাক্রমে 16, 13, এবং 10 বৎসর পরে x টা., y টা. এবং z টাকার প্রত্যেকের সমূলচক্রবৃদ্ধি $= A$ টা.

এখানে $i = \frac{3\frac{1}{2}}{100} = 0{\cdot}035$; সুতরাং $A = P(1+i)$ সূত্র হইতে,

$$A = x(1{\cdot}035)^{16}, \quad A = y(1{\cdot}035)^{13}, \quad A = z(1{\cdot}035)^{10} ;$$

$$\therefore \quad x = A(1{\cdot}035)^{-16}, \quad y = A(1{\cdot}035)^{-13}, \quad z = A(1{\cdot}035)^{-10} ;$$

এখন যেহেতু $x + y + z = 18{,}000$,

সুতরাং $A\{(1{\cdot}035)^{-16} + (1{\cdot}035)^{-13} + (1{\cdot}035)^{-10}\} = 18{,}000.$

ধরা যাক্, $a = (1{\cdot}035)^{-16}$; $\therefore \log a = -16 \cdot \log 1{\cdot}035 = -16 \times {\cdot}0149$

$= -{\cdot}2384 = -1 + 1 - {\cdot}2384 = \bar{1}{\cdot}7616 = \log {\cdot}5776$;

$\therefore \quad a = {\cdot}5776.$

তদ্রূপ, $(1{\cdot}035)^{-13} = {\cdot}6401$ এবং $(1{\cdot}035)^{-10} = {\cdot}7096$;

$\therefore \quad A({\cdot}5776 + {\cdot}6401 + {\cdot}7096) = 18{,}000,$

বা, $A \times 1{\cdot}9273 = 18{,}000$, বা, $A = \frac{18{,}000}{1{\cdot}9273} = 9340$ টা. (প্রায়)।

সংশ্লিষ্ট প্রশ্নসমূহ (Allied problems)

সুদকে মূলধনে পরিণত করার (compounding) তত্ত্বকে জনসংখ্যার বৃদ্ধি, পরিসম্পৎ (assets) এর অবচয় (depreciation) এবং অনুরূপ অন্যান্য ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যায়, কারণ এইসব ক্ষেত্রে বৃদ্ধি বা হ্রাস নির্দিষ্ট হারে নিয়মিত ব্যবধানে সমরূপে ঘটিতে দেখা যায়। চক্রবৃদ্ধি সংক্রান্ত প্রশ্নগুলির সমাধানের অনুরূপ পদ্ধতিগুলি এক্ষেত্রসমূহেও অবলম্বন করা যায়।

(*a*) নিয়মিত ব্যবধানে সমরূপে বৃদ্ধিসংক্রান্ত প্রশ্ন (Problems of Uniform Periodical Growth)

উদা. 11. যদি কোন সহরের লোকসংখ্যা প্রতি বৎসর ঐ বৎসরের প্রারম্ভিক লোকসংখ্যার 1·8% বৃদ্ধি পায়, তবে কত বৎসরে লোকসংখ্যার সামগ্রিক বৃদ্ধি 30% হইবে ?

ধরা যাক্, n = নির্ণেয় বৎসরের সংখ্যা এবং প্রারম্ভিক লোকসংখ্যা $P=100$.

সুতরাং $A=130$; এখানে i = প্রতি এককে বাৎসরিক বৃদ্ধির হার

$=1\cdot8/100=0\cdot018$.

$\therefore\ A=P(1+i)^n$ সূত্র হইতে, $130=100(1\cdot018)^n$

বা, $13=10(1\cdot018)^n$;

$\therefore\ \log 13=\log 10+n\log 1\cdot018$;

$$\therefore\ n=\frac{\log 13-\log 10}{\log 1\cdot018}=\frac{1\cdot1139-1}{0\cdot0077}=\frac{0\cdot1139}{0\cdot0077}=15 \text{ বৎসর (প্রায়)।}$$

(*b*) পরিসম্পৎ-এর অবচয়সংক্রান্ত প্রশ্ন (Problems relating to Depreciation of Assets)

যন্ত্রপাতি, অট্টালিকাসমূহ প্রভৃতি সম্পত্তি বা পরিসম্পৎগত দ্রব্যাদির মূল্যের (Value) বৎসরের পর বৎসর ক্ষয়ক্ষতি (wear and tear) জনিত হ্রাস বা অবচয় ঘটিয়া থাকে। প্রত্যেক বৎসরের প্রারম্ভে একটি নির্দিষ্ট শতকরা হার অনুসারে ঐ মূল্যের একটি অংশ কাটিয়া দেওয়াই (to write off) হইল রীতি। ইহাকে **অবচয় পদ্ধতি** (method of depreciation) বলা হয়। সক্রিয় বা কার্যকরী জীবনের (useful life) শেষে পরিসম্পৎ-এর মূল্যকে **গুরুত্বহীন মূল্য** (Scrap Value) বলা হয়।

অবচয় পদ্ধতি (Method of Depreciation or Diminishing Values)

এক্ষেত্রে প্রত্যেক বৎসরের শেষে পরিসম্পৎ (assets) এর ঐ বৎসরের প্রারম্ভিক মূল্যের একটি নির্দিষ্ট শতকরা অংশ কাটিয়া দেওয়া হয় (is written off) বা হ্রাস করা হয়।

ধরা যাক্, প্রারম্ভিক মূল্য $=P$ এবং একক মূল্যের উপর হ্রাসের হার $=i$

এক বৎসরের শেষে হ্রাসের পরিমাণ $=Pi$ (amount written off বা অবচয়)

$\therefore$ ঐ বৎসরের শেষে পরিসম্পৎ-এর মূল্য $=P-Pi=P(1-i)$

পরবর্তী বৎসরের হ্রাস বা অবচয় $= P(1-i)i$

$\therefore$ দুই বৎসরের শেষে মূল্য $= P(1-i) - P(1-i)i = P(1-i)^2$, ইত্যাদি।

সুতরাং, পরিসম্পৎ-এর n বৎসরের সক্রিয় বা কার্যকরী জীবনের শেষে (at the end of the useful life) উহার গুরুত্বহীন মূল্য (scrap value)

$$S = P(1-i)^n.$$

টীকা। যে সমস্ত ক্ষেত্রে নিয়মিত ব্যবধানে সমহারে এইরূপ হ্রাস সংঘটিত হয় সেই সকল ক্ষেত্রে এই সূত্র প্রয়োগ করা উচিত।

উদা. 12. একটি যন্ত্রের ক্রম-হ্রাসপ্রাপ্ত স্থিতি মূল্যের (on reducing balance) 10% হারে অবচয় হয়। উহার প্রারম্ভিক মূল্য ছিল 10,000 টাকা এবং অন্তিম গুরুত্বহীন মূল্য (scrap value) হইল 3750 টাকা। যন্ত্রটির কার্যকরী জীবনকাল (effective life) নির্ণয় কর।

লক্ষ্য করা হইল যে অবচয়ের হার $= 10\% = 0{\cdot}1$ প্রতি বৎসর প্রতি একক মূল্যে,

সুতরাং $i = 0{\cdot}1$ এবং এখানে $S = 3750$ টা., $P = 10{,}000$ টা.;

$\therefore$ $S = P(1-i)^n$ সূত্রের সাহায্য লইয়া, $3750 = 10{,}000(1-0{\cdot}1)^n$

বা, $3 = 8(0{\cdot}9)^n$; $\therefore \log 3 = \log 8 + n \log 0{\cdot}9$

বা, $0{\cdot}4771 = 0{\cdot}9031 + n \times \bar{1}{\cdot}9542$ বা, $-0{\cdot}4260 = n(-0{\cdot}0458)$.

$$\therefore \quad n = \frac{0{\cdot}4260}{0{\cdot}0458} = 9{\cdot}3 \text{ বৎসর (প্রায়)।}$$

প্রশ্নমালা X

[A]

1. চক্রবৃদ্ধির হার শতকরা 5 এবং সুদ বৎসরান্তে দেয় হইলে 20 বৎসর পরে 100 টাকার সমূলচক্রবৃদ্ধি কত হইবে?

2. বৎসরান্তে সুদ আসলে পরিণত হইলে নিম্নক্ষেত্রে চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর:

(i) 9% বার্ষিক হারে 3000 টাকার 4 বৎসরের;

(ii) 3% বার্ষিক হারে 7646 টাকার 4 বৎসরের।

3. এক ব্যক্তি তাঁহার 10, 12 এবং 14 বৎসর বয়স্ক তিন পুত্রের জন্য যথাক্রমে 10,000 টা., 8000 টা. এবং 6000 টাকার দানপত্র লিখিয়া দিয়াছিলেন। ঐ অর্থ যথাক্রমে 3%, 6% এবং 10% চক্রবৃদ্ধি হারে লগ্নী করা হইল। পুত্রগণ প্রত্যেকে 21 বৎসর বয়সে সুদসহ ঐ অর্থের অধিকারী হইবে। প্রত্যেকে তখন কত পাইবে তাহা 5-অঙ্কবিশিষ্ট লগ্-তালিকার সাহায্যে নির্ণয় কর।

4. যদি 7% সরল সুদের হারে এবং সুদ প্রতি অর্ধ-বৎসরান্তে দেয় এই শর্তে 7% চক্রবৃদ্ধি হারে 12,675 টাকা কর্জের উপর 3 বৎসরের সুদ গণনা করা হয় তবে উভয় প্রকার সুদের পার্থক্য কত হইবে ?

5. কত টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি

(i) 4% বার্ষিক চক্রবৃদ্ধির হারে 18 বৎসরে 10,000 টাকা হইবে ?

[প্রদত্ত log 104 = 2·0170333, log 493·629 = 2·6934006]

(ii) $5\frac{1}{2}$% বার্ষিক চক্রবৃদ্ধির হারে 15 বৎসরে 5000 টাকা হইবে ?

(iii) 6% বার্ষিক চক্রবৃদ্ধির হারে দুই বৎসরে 1030 টাকা হইবে, যদি সুদ প্রতি অর্ধ-বৎসর অন্তে দেয় হয় ?

6. দেখাও যে প্রায় 14 বৎসরে $6\frac{1}{4}$% বার্ষিক চক্রবৃদ্ধির হারে 1500 টাকার সমূলচক্রবৃদ্ধি 3500 টা. হইবে।

7. 4% *C.I.* গণনা করিলে 2 বৎসর পরে দেয় 3000 টাকার বর্তমান মূল্য কি হইবে, যদি সুদ (*a*) বৎসরান্তে, (*b*) অর্ধ-বৎসরান্তে দেয় হয় ?

8. সরল সুদে 956 টাকার 3 বৎসরের সমূলবৃদ্ধি 1099·40 টাকা ; চক্রবৃদ্ধির হারে ও সুদ বৎসরান্তে দেয় হইলে কত টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 1481 টা. 97 প. হইবে, যদি উহা 3 বৎসরের জন্য লগ্নী করা হয় এবং যদি উভয় ক্ষেত্রে প্রতি বৎসরের সুদের হার একই থাকে ?

9. *C.I.* এর হারে কত টাকার প্রথম বৎসরান্তে 650 টা. এবং দ্বিতীয় বৎসরান্তে 676 টা. সমূলচক্রবৃদ্ধি হইবে ?

10. সুদ বৎসরান্তে দেয় এইরূপ চক্রবৃদ্ধিতে লগ্নী করার ফলে কোন টাকার দ্বিতীয় বৎসর অন্তে 2704 টা. এবং তৃতীয় বৎসর অন্তে 2812 টা. 16 প. সমূলচক্রবৃদ্ধি হইল। সুদের হার এবং প্রাথমিক মূলধন নির্ণয় কর।

11. 6% বার্ষিক হারে কোন টাকার 2 বৎসরের *S.I.* এবং *C.I.* এর পার্থক্য 13 টা. 50 প. হইলে ঐ টাকার পরিমাণ নির্ণয় কর।

12. 6% বার্ষিক হারে 3 বৎসরের জন্য লগ্নীকৃত কোন টাকার সরল সুদ ও চক্রবৃদ্ধির অন্তর 110 টা. 16 প. ; ঐ টাকার পরিমাণ কত ?

13. 8% বার্ষিক হারে চক্রবৃদ্ধিতে কোন টাকা ধার দেওয়া হইল। যদি প্রথম বৎসরের সুদ অপেক্ষা দ্বিতীয় বৎসরের সুদ 32 টা. বেশী হয়, তবে প্রারম্ভিক মূলধন নির্ণয় কর।

14. কত বৎসরে কোন টাকা বার্ষিক শতকরা 5 হারে চক্রবৃদ্ধিতে তিনগুণ হইবে ?

[প্রদত্ত log 2 = 0·3010300, log 3 = 0·4771213, log 7 = 0·8450980]

15. 4% বার্ষিক হারে চক্রবৃদ্ধিতে কোন টাকা কি সময়ে তিনগুণ হইবে, তাহা বৎসরের সংখ্যায় ও বৎসরের অংশে নির্ণয় কর।

16. অর্ধ-বৎসর অন্তে সুদ দেয় এইরূপ 5% চক্রবৃদ্ধিতে কোন টাকা কি সময়ে দ্বিগুণ হইবে ?

17. সুদের হার বার্ষিক শতকরা কত হইলে কোন টাকা চক্রবৃদ্ধিতে 17 বৎসরে দ্বিগুণে পরিণত হইবে ?

18. বৎসরান্তে সুদ দেয় এই প্রকার চক্রবৃদ্ধিতে 1575 টাকার 4 বৎসরের সমূল-চক্রবৃদ্ধি 2142 টা. 75 প.। বার্ষিক শতকরা সুদের হার নির্ণয় কর।

19. এক-চতুর্থ বৎসর অন্তে সুদ দেয় এইরূপ চক্রবৃদ্ধিতে কিছু টাকা (*a*) 25 বৎসরে, (*b*) 20 বৎসরে তিনগুণে পরিণত হয়। বার্ষিক শতকরা সুদের হার নির্ণয় কর।

20. অর্ধ-বৎসরান্তে সুদ দেয় এইরূপ 5% চক্রবৃদ্ধি হারে কোন ব্যক্তি যদি সুদ পাইতে থাকেন তবে তিনি কি হারে বাস্তবিকপক্ষে সুদ পাইতেছেন ?

21. এস. সেন এক মহাজনের নিকট হইতে 6000 টাকা কর্জ করিলেন, কিন্তু 4 বৎসরের মধ্যে কোন টাকাই প্রত্যর্পণ করিলেন না। ফলে মহাজন তাঁহার নিকট এখন 7,500 টাকা দাবি করিলেন। অর্থ কর্জ দেওয়ার জন্য দ্বিতীয় ব্যক্তি বার্ষিক শতকরা কি হারের চক্রবৃদ্ধি দাবি করিলেন ?

22. সি. পি. মুখার্জী পুত্র অমিত ও কন্যা আরতির মধ্যে বণ্টনের নিমিত্ত মোট 20,000 টাকার দানপত্র লিখিয়া দিয়াছিলেন। বণ্টনের শর্ত ছিল, 5 বৎসর অন্তে আরতির অংশ বৃদ্ধি পাইয়া একটি নির্দিষ্ট অঙ্কে পৌঁছাইবে এবং অমিতের অংশ ঐ একই অঙ্কে পৌঁছাইবে 7 বৎসর অন্তে। ঐ সময় বার্ষিক চক্রবৃদ্ধির হার 4% হইলে প্রত্যেকে নির্দিষ্ট সময় অন্তে কত টাকা পাইয়াছিল, নির্ণয় কর।

23. এক ব্যক্তি তাঁহার 10 বৎসর এবং 15 বৎসর বয়স্ক দুই পুত্রের মধ্যে বণ্টনের জন্য 2500 টাকার দানপত্র লিখিয়া দিয়াছিলেন। নির্দেশ ছিল যে, বণ্টন এইভাবে করিতে হইবে যেন 30 বৎসর বয়স হইবার পর উভয় পুত্রই সমান অর্থ লাভ করে। ঐ সময় বার্ষিক চক্রবৃদ্ধির হার 5% ছিল বলিয়া ধরিয়া কনিষ্ঠতর পুত্রের 10 বৎসর বয়সে কত টাকার ব্যবস্থা হইয়াছিল তাহা নির্ণয় কর।

[ইঙ্গিত : 10 বৎসর এবং 15 বৎসর বয়সে উভয়ের অংশ যথাক্রমে x টা. এবং y টা. ধরা হইল। তাহা হইলে $x+y=2500$ এবং $x(1\cdot05)^{20}=y(1\cdot05)^{15}$.]

[B]

1. ক্রম-ক্ষীয়মাণ স্থিতিমূল্যের (on reducing balance) উপর 20% হারে একটি যন্ত্রের মূল্যের অবচয় হয়। যন্ত্রটির প্রারম্ভিক মূল্য 1,00,000 টাকা এবং উহার অন্তিম গুরুত্বহীন মূল্য (scrap value) 30,000 টাকা ছিল। যন্ত্রটির কার্যকরী জীবনকাল নির্ণয় কর।

2. একটি যন্ত্রের কার্যকরী জীবনকাল 10 বৎসর বলিয়া নিরূপিত হইল এবং উহার ক্রয়মূল্য পড়িল 10,000 টাকা। জীবনকাল অন্তে ইহার গুরুত্বহীন মূল্য (scrap value) নির্ণয় কর, যদি ক্রম-ক্ষীয়মাণ স্থিতিমূল্যের দফাগুলির উপর বার্ষিক 10% হারে অবচয় ধার্য করা হয়।

3. একটি যন্ত্রের কোন বৎসরের প্রারম্ভিক মূল্যের উপর 10% হারে অবচয় ঘটে। যন্ত্রটি 5810 টাকায় ক্রয় করা হইয়াছিল এবং পরিশেষে পরিত্যক্ত লোহালক্কড় হিসাবে 2250 টাকার বিক্রয় করা হইয়াছিল। যন্ত্রটি কত বৎসর ব্যবহৃত হইয়াছিল ?

যদি বার্ষিক 8·5% হারে অবচয় ধার্য করা হয়, তবে 8 বৎসর অন্তে যন্ত্রটির মূল্য কত হইবে ?

4. প্রত্যেক বৎসরের শেষে অবচয় ধার্য করার পর কোন যন্ত্রের মূল্য, ঐ বৎসরের প্রারম্ভে যন্ত্রটির যে মূল্য ছিল তাহার 90% হইয়াছিল। যন্ত্রটির ক্রয়মূল্য ছিল 12,000 টাকা এবং গুরুত্বহীন মূল্য (scrap value) 200 টাকা হইয়াছিল। যন্ত্রটি কতকাল ব্যবহৃত হইয়াছিল ?

5. কোন কারখানার একটি যন্ত্রের মূল্য 24,537 টাকা বলিয়া নিরূপিত হইল এবং স্থির করা হইল, প্রত্যেক বৎসরের শেষে ঐ বৎসরের প্রারম্ভিক মূল্যের উপর 18% অবচয় ধার্য করিয়া নিরূপিত মূল্য হ্রাস করা হইবে। উহার মূল্য কখন (*i*) 20,000 টাকা, (*ii*) প্রারম্ভিক মূল্যের এক-দশমাংশ হইবে ?

6. প্রত্যেক বৎসরের শেষে ঐ বৎসরের প্রারম্ভিক মূল্যের উপর 10% হারে কোন যন্ত্রের মূল্যের অবনতি ঘটে এবং এইভাবে চতুর্থ বৎসর পরে উহার মূল্য হইল 1,31,220 টাকা। উহার প্রারম্ভিক মূল্য নির্ণয় কর।

7. প্রথম 10 বৎসরের প্রত্যেক বৎসরের শেষে কোন যন্ত্রের ঐ বৎসরের উহার প্রারম্ভিক মূল্যের এক-দশমাংশ ক্ষয়-ক্ষতি ধরা হয় এবং পরবর্তী 5 বৎসরের প্রত্যেক বৎসরে উহা এক-পঞ্চমাংশ ধরা হয়। 15 বৎসর পরে যন্ত্রটির গুরুত্বহীন মূল্য (scrap value) নির্ণয় কর।

8. কোন বৎসরের প্রারম্ভে কোন সহরের যে লোকসংখ্যা থাকে, ঐ বৎসরের শেষে যদি তাহা 2% বৃদ্ধি পায় এবং ইহা প্রতি বৎসর ঘটে, তবে কত বৎসরে সহরটির লোকসংখ্যার সামগ্রিক বৃদ্ধি 40% হইবে ?

9. একটি আধার হইতে বায়ু অপসরণে নিযুক্ত কোন বায়ু-নিষ্কাশন যন্ত্র প্রত্যেক ঘা (stroke)-এর পর আধারস্থিত বায়ুর এক-দশমাংশ নিষ্কাশিত করে। দ্বাদশ ঘা-এর পর মূল বায়ুর কত অংশ আধারে অবশিষ্ট থাকিবে, তাহা নির্ণয় কর।

10. কোন রাজ্যের লোকসংখ্যার বাৎসরিক বৃদ্ধি প্রতি হাজারে 25 এবং অধিবাসীদের বর্তমান সংখ্যা 26,24,000 ; 3 বৎসর পরে লোকসংখ্যা কত হইবে ? এক বৎসর পূর্বে উহা কত ছিল ?

উত্তরমালা

[A]

1. 265·50 টা. 2. (*i*) 1,234 টা. (প্রায়) ; (*ii*) 956 টা. (প্রায়) ।
3. 13,843 টা., 13,517 টা., 11,691 টা. 4. 233 টা. 25 প.
5. (*i*) 4936 টা. 29 প. (*ii*) 2244 টা. (প্রায়) ; (*iii*) 888 টা. 80 প. (প্রায়) ।
7. (*a*) 2774 টা. (*b*) 2771 টা. 8. 1280 টা. 9. 625 টা.
10. 4% প্রতিবৎসর ; 2500 টা. 11. 3750 টা. 12. 10,000 টা. 13. 5000 টা.
14. 22·5 বৎসর (প্রায়) । 15. 28·06 বৎসর (প্রায়) । 16. 14·1 বৎসর (প্রায়) ।
17. 4·2%. 18. 8% (প্রায়) । 19. (*a*) 4·5% ; (*b*) 5·6% (প্রায়) ।
20. 5·0625% প্রতিবৎসর 21. 5·7% 22. 12,640 টা. (প্রায়), 4 অঙ্ক-বিশিষ্ট লগ্-তালিকা অনুসারে, বা, 12,643 টা. (প্রায়), 5 অঙ্কের লগ-তালিকা অনুসারে। 23. 1,098·42 টা.

[B]

1. 5·4 বৎসর (প্রায়) । 2. 3483 টা. 3. 9 বৎসর (প্রায়) ; 2854 টা.
4. 38·8 বৎসর (প্রায়) । 5. (*i*) 1·03 বৎসর ; (*ii*) 11·6 বৎসর । 6. 2,00,000 টা.
7. প্রাথমিক মূল্যের 24·7% (প্রায়) 8. 17 বৎসর (প্রায়) ।
9. প্রারম্ভিক মূল্যের 0·2821%. 10. 2,826,000 ; 25,60,000.

11
বার্ষিক অথবা বার্ষিক বৃত্তি
(ANNUITIES)

11·1. সূচনা ঃ সংজ্ঞাসমূহ

1. সময়ের নিয়মিত ও সমান ব্যবধানে সম-আকারে প্রদত্ত অর্থ-পরিমাণগুলির অনুক্রম (sequence)-কে **বার্ষিক** বা **বার্ষিক বৃত্তি** (**Annuity**) বলা হয় ; সময়ের নিয়মিত ব্যবধান এক বৎসর অথবা আরও অল্প সময় হইতে পারে। যে সামগ্রিক সময়ের জন্য বৃত্তি স্থায়ী হয় তাহাকে **নিরূপিত কাল** বা **মেয়াদ** (**Status or Term**) বলা হয়—ইহা নির্দিষ্ট কতিপয় বৎসর হইতে পারে, যেক্ষেত্রে বার্ষিকটিকে বলা হয় **নিয়মিত বার্ষিক** বা **বার্ষিক বৃত্তি** (**Annuity certain**) ; অথবা মেয়াদের পরিমাণ এমন কতিপয় ঘটনা সংঘটনের উপর নির্ভর করিতে পারে যাহাদের সম্বন্ধে পূর্ব হইতে কোনরূপ ধারণা করা যায় না—এক্ষেত্রে বার্ষিকটিকে **সম্ভাব্য বার্ষিক বৃত্তি** (**Annuity contingent**) বলা হয়। **আজীবন বার্ষিক বৃত্তি** (**Life-annuity**) হইল সম্ভাব্য বার্ষিক বৃত্তির একটি উদাহরণ—এক্ষেত্রে মেয়াদ কোন ব্যক্তির সমগ্র জীবনব্যাপী হইতে পারে।

2. **চিরস্থায়ী কিস্তি** (**A perpetuity**) বা **চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তি** (**Perpetual annuity**) হইল এইরূপ বার্ষিক বৃত্তি যাহার মেয়াদ অসীম কাল পর্যন্ত বিস্তৃত। ইহার অর্থ, অর্থপ্রদানের কিস্তির সংখ্যা এই ক্ষেত্রে সসীম নহে (প্রত্যেক-বার অর্থপ্রদানের পরে আবার একবার অর্থপ্রদান করিতে হয় অর্থাৎ প্রত্যেক কিস্তির পর আর একটি কিস্তি থাকে—কোন কিস্তিই শেষ কিস্তি নহে)।

3. পর পর দুইবার অর্থপ্রদানের (অর্থাৎ দুইটি কিস্তির) অন্তর্বর্তী সময়ের ব্যবধানকে **অর্থপ্রদানের পর্যায়কাল** (**Payment period**) বা **অর্থপ্রদানের অবকাশ** বা **বিরাম** বা **বিরতি** (**Payment interval**) বলে।

4. এক বৎসরে দেয় সমগ্র অর্থপরিমাণকে **বার্ষিক খাজনা** (**Annual rent**) বলে।

উদা. ঃ "10 বৎসরের জন্য অর্ধ-বৎসর পরে পরে দেয় 200 টাকার বার্ষিক বৃত্তি" বলিলে বুঝিতে হইবে যে এক্ষেত্রে পর্যায়কাল বা বিরতি হইল 6 মাস, নিরূপিত কাল বা মেয়াদ হইল 10 বৎসর এবং বার্ষিক খাজনা 400 টাকা।

এইস্থলে একটি রীতি প্রচলিত আছে—বার্ষিক বৃত্তি বৎসরান্তেই দেয় হউক আর অপেক্ষাকৃত অল্পতর সময়ের ব্যবধানেই দেয় হউক, এক বৎসরে দেয় সমগ্র টাকার পরিমাণ দ্বারাই উহা পরিমাপ করা হয়। সুতরাং উদাহরণটিতে, অর্ধ-বৎসরান্তে দেয় বার্ষিক বৃত্তি হইল 400 টাকার।

5. সাধারণত প্রত্যেক পর্যায়কাল বা বিরতির শেষে অর্থপ্রদান করা হয়। বার্ষিক বৃত্তিটিকে তখন **অবিলম্বিত বা প্রত্যক্ষ (Immediate)** অথবা **সাধারণ (Ordinary)** বার্ষিক বৃত্তি বলা হয়।

কিন্তু যদি প্রথম পর্যায়কাল বা বিরতির শেষে অর্থপ্রদানের পরিবর্তে উহার প্রারম্ভে অর্থপ্রদান করা হয় এবং ইহার পর সম-সময়ের ব্যবধানে পরবর্তী কিস্তিগুলি প্রদান করা হইতে থাকে তখন ঐ বার্ষিক বৃত্তিকে **দেয় বার্ষিক বৃত্তি (Annuity due)** বলা হয়।

টীকা। বিশেষভাবে উল্লিখিত না হইলে পর্যায়কাল বা বিরতির শেষে অর্থ-প্রদানই (**অবিলম্বিত বার্ষিক বৃত্তি**) সর্বদা বিবেচনা করা হইবে।

6. যদি কোন বার্ষিক বৃত্তির ক্ষেত্রে অর্থপ্রদান কোন নির্দিষ্ট সময়ের জন্য স্থগিত রাখা হয় তবে উহাকে **বিলম্বিত বার্ষিক বৃত্তি (Deferred annuity)** বলা হয়। সুতরাং এইরূপ বার্ষিক বৃত্তির ক্ষেত্রে স্থগিত সময়ের মেয়াদ শেষ না হওয়া পর্যন্ত প্রথম কিস্তি প্রদান করা হয় না।

কোন সাধারণ বার্ষিক বৃত্তি (বিরাম—এক বৎসর) n বৎসরের স্থগিত আছে—এই কথার অর্থ হইল যে $(n+1)$তম বৎসরের শেষে প্রথম কিস্তি প্রদত্ত হইবে।

বিলম্বিত চিরস্থায়ী কিস্তি (Deferred perpetuity)র ক্ষেত্রে স্থগিত কালের অন্তে অর্থপ্রদান শুরু হইবে এবং পরে অনির্দিষ্ট কালের জন্য উহা চলিতে থাকিবে।

11·2. নিয়মিত বার্ষিক বৃত্তির মোট অঙ্ক (Amount of an Annuity certain)

সংজ্ঞা। কতিপয় সংখ্যক পর্যায়কালের জন্য বার্ষিক বৃত্তি প্রদান যদি স্থগিত থাকে তবে বলা হয় যে উহা ঐ সময়ের জন্য **নিবৃত্ত (forborne)** আছে।

স্থগিত কালের জন্য প্রত্যেকটি স্থগিত কিস্তির চক্রবৃদ্ধি সহ স্থগিত সমগ্র কিস্তিগুলির সমষ্টিকে **বার্ষিক বৃত্তির মোট অঙ্ক (Amount of the Annuity)** বলা হয়।

ধরা যাক্, একটি তহবিল সৃষ্টি করা হইল, যেখানে নিয়মিত ব্যবধানে প্রদত্ত সমুদয় কিস্তির অর্থ চক্রবৃদ্ধি-সহ সঞ্চিত হইতে দেওয়া হইল। বার্ষিক বৃত্তিটির মেয়াদ

(অথবা নিরূপিত কাল) অন্তে যে সমগ্র অর্থ প্রাপ্য হইবে তাহাই বার্ষিক বৃত্তির মোট অঙ্ক।

অঙ্কপাতন (Notations) : যে বার্ষিক বৃত্তির (নিয়মিত) নিয়মিত ব্যবধানে প্রদত্ত কিস্তি এক টাকা এবং উহা n সংখ্যক ব্যবধানের জন্য দেয়, তাহার মোট অঙ্ককে নির্দেশ করা হয় $S_{\overline{n}|}$ (**S কোণ n—এইরূপ পড়িতে হয়**) প্রতীক দ্বারা।

যদি প্রতি ব্যবধানের জন্য সুদের হার i হয়, তবে মোট অঙ্ককে নির্দেশ করা যায় $S_{\overline{n}|i}$(**i হারে S কোণ n—এইরূপ পড়িতে হইবে**) প্রতীক দ্বারা।

বার্ষিক খাজনা P হইলে বার্ষিক বৃত্তির মোট অঙ্ককে $S_{\overline{n}|}P$ বা $S_{\overline{n}|i}P$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

প্রতি বৎসর P হিসাবে কোন অবিলম্বিত বা সাধারণ বার্ষিক বৃত্তিতে অর্থপ্রদান যদি n বৎসর স্থগিত থাকে তবে চক্রবৃদ্ধি স্বীকার করিয়া লওয়া হইলে (প্রতি বৎসরান্তে সুদ আসলে পরিণত হইবে) বার্ষিক বৃত্তির মোট অঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the amount of an immediate annuity P per year left unpaid for n years, allowing compound interest (to be compounded annually.]

ধরা যাক্, $i=$একক টাকার এক বৎসরের সুদ। যেহেতু বার্ষিক বৃত্তি প্রদান n বৎসর অপ্রদত্ত অবস্থায় আছে ; সুতরাং P এর প্রথম বৎসরের শেষে দেয় প্রথম কিস্তি $(n-1)$ বৎসরের জন্য সঞ্চিত থাকিবে এবং উহার সমূল চক্রবৃদ্ধি হইবে $P(1+i)^{n-1}$; দ্বিতীয় কিস্তি $(n-2)$ বৎসরের জন্য সঞ্চিত হইবে এবং উহার সমূল চক্রবৃদ্ধি হইবে $P(1+i)^{n-2}$, অনুরূপে তৃতীয় কিস্তিতে সমূল চক্রবৃদ্ধি হইবে $P(1+i)^{n-3}$; এইরূপ হইতে থাকিবে যতক্ষণ না শেষ কিস্তি আসে, যাহার সমূল চক্রবৃদ্ধি হইবে কেবল P. কারণ, ধরা হইয়াছে, ইহা nতম বৎসরের শেষে দেওয়া হইবে। সুতরাং,

মোট অঙ্ক A (অর্থাৎ $S_{\overline{n}|i}P$)$=$এই n সংখ্যক সমূল চক্রবৃদ্ধির সমষ্টি

$=P(1+i)^{n-1}+P(1+i)^{n-2}+\cdots+P$; ইহা একটি G.P. যাহার

প্রথম পদ$=P(1+i)^{n-1}$, সা.অনুপাত$=(1+i)^{-1}$ এবং পদের সংখ্যা n ;

সুতরাং $A=\dfrac{P(1+i)^{n-1}\{1-(1+i)^{-1\times n}\}}{1-(1+i)^{-1}}$

$$=\frac{P(1+i)(1+i)^{n-1}\{1-(1+i)^{-n}\}}{1+i-1}=\frac{P\{(1+i)^n-1\}}{i}.$$

অতএব, বৎসরান্তে দেয় এবং n বৎসরের জন্য অপ্রদত্ত বার্ষিক বৃত্তি P এর মোট অঙ্ক A হইলে,

$$A(=S_{\overline{n}|}P)=\frac{P}{i}\{(1+i)^n-1\},$$

যেখানে $i=1$ টাকার 1 বৎসরের সুদ।

যদি বৎসরে p বার অর্থপ্রদান করা হয়, বার্ষিক খাজনা P হয় (অর্থাৎ নিয়মিত ব্যবধানে প্রদত্ত কিস্তি P/p টা.) এবং $i=$একক টাকার প্রতি বৎসরের সুদ, তবে n বৎসরের জন্য বার্ষিক বৃত্তির মোট অঙ্ক A হইল :

$$A=\left(s^{(p)}_{\overline{n}|}P\right)=\frac{\frac{P}{p}}{\frac{i}{p}}\left\{\left(1+\frac{i}{p}\right)^{np}-1\right\} \text{ বা, } A=\frac{P}{i}\left\{\left(1+\frac{i}{p}\right)^{np}-1\right\}.$$

উদা. : এক ব্যক্তি নগদ 1000 টা. এবং ইহার পর 10 বৎসর ধরিয়া প্রতি বৎসরের শেষে 1000 টা. করিয়া এমন একটি প্রতিষ্ঠানে অর্থ বিনিয়োগ করিলেন, যাহা বাৎসরিক 5% হারে চক্রবৃদ্ধি প্রদান করে ; 10 বৎসরের শেষে তাঁহার কত টাকা সঞ্চিত হইবে ?

সঞ্চয় $A=$ (i) 1000 টাকার 10 বৎসরের সমূল চক্রবৃদ্ধি + (ii) 1000 টা. সাধারণ বার্ষিক বৃত্তির 10 বৎসর পরে মোট অঙ্ক।

ধরা যাক, $x=(1{\cdot}05)^{10}$

$\therefore \log x=10 \log 1{\cdot}05$
$=10\times 0{\cdot}0212$
$=0{\cdot}2120$

$\therefore x=\text{antilog } 0{\cdot}2120$
$=1{\cdot}629.$

$\therefore A=1000(1+i)^{10}+S_{\overline{10}|i}1000(i=0{\cdot}05)$

$=1000(1{\cdot}05)^{10}+\frac{1000}{0{\cdot}05}\{(1{\cdot}05)^{10}-1\}$

$=1000\times 1{\cdot}629+\frac{100000}{5}\times 0{\cdot}629$

$=1{,}629+12{,}580$

$=14{,}209$ টাকা।

11·3. বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য (Present value of an Annuity)

সংজ্ঞা। **বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য** হইল, ঐ বৃত্তির খাতে দেয় ভবিষ্যতের সকল কিস্তির বর্তমান মূল্যসমূহের সমষ্টি। সুতরাং ইহা হইল সেই পরিমাণ অর্থ যাহা বর্তমান সময়ে বার্ষিক বৃত্তিটির সহিত তুল্যমূল্য।

ধরা যাক্, বার্ষিক বৃত্তি পাইবেন এইরূপ এক ব্যক্তি ভবিষ্যতের কিস্তিসমূহের পরিবর্তে বর্তমান সময়েই এককালীন থোক্ টাকা পাইতে ইচ্ছুক ; তাহা হইলে তাঁহাকে এখন যত পরিমাণ টাকা দেওয়া উচিত তাহাই বার্ষিক বৃত্তিটির বর্তমান মূল্য।

অঙ্কপাতন (Notations) : 1 টাকার অথবা একক অর্থের সাধারণ বার্ষিক বৃত্তির মেয়াদ n সংখ্যক পর্যায়কালে বিভক্ত হইলে উহাকে $a_{\overline{n}|}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং যদি প্রতি পর্যায়কালের প্রতি একক অর্থের সুদের হার i হয় তবে বর্তমান মূল্যকে $a_{\overline{n}|i}$ দ্বারা নির্দেশ করা যাইতে পারে, কারণ হারটির উল্লেখ এখানে বাঞ্ছনীয়। প্রতি পর্যায়কালের কিস্তি মূল্য যদি P হয়, তবে বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য V কে $a_{\overline{n}|}P$, বা, $a_{\overline{n}|i}P$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

***n* বৎসরের মেয়াদী সাধারণ বার্ষিক বৃত্তি *P* এর বর্তমান মূল্য নির্ণয় করিতে হইবে, যদি চক্রবৃদ্ধি (প্রতি বৎসরান্তে সুদ আসলে পরিণত হইবে) স্বীকার করা হয়।**

[To find the present value of an immediate annuity of P which will continue for n years, allowing compound interest (to be compounded annually).]

ধরা যাক, $V(=a_{\overline{n}|}P)=n$ সংখ্যক কিস্তির বর্তমান মূল্যসমূহের সমষ্টি, যেখানে প্রত্যেক কিস্তিমূল্য P,

$i=$একক অর্থের প্রতি বৎসরের সুদ এবং $1/(1+i)=v$; তাহা হইলে এখন হইতে 1 বৎসর পরে দেয় প্রথম কিস্তি P এর বর্তমানমূল্য

$$=\frac{P}{1+i}=Pv,$$

এখন হইতে 2 বৎসর পরে দেয় দ্বিতীয় কিস্তি P এর বর্তমান মূল্য

$$=\frac{P}{(1+i)^2}=Pv^2,$$

এখন হইতে 3 বৎসর পরে দেয় তৃতীয় কিস্তি P এর বর্তমান মূল্য

$$=\frac{P}{(1+i)^3}=Pv^3,$$

... ...

এখন হইতে n বৎসর পরে দেয় শেষ কিস্তি P এর বর্তমান মূল্য

$$=\frac{P}{(1+i)^n}=Pv^n\ ;$$

$$\therefore\ V=P(v+v^2+v^3+\cdots+v^n)$$
$$=Pv(1+v+v^2+\cdots+v^{n-1})$$

[একটি $G.P.$ যাহার সা. অনু. v]

$$=Pv\frac{1-v^n}{1-v}=\frac{P}{1+i}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-\frac{1}{1+i}}=\frac{P}{i}\{1-(1+i)^{-n}\}$$

$$=\frac{P}{i}\left\{1-\frac{1}{(1+i)^n}\right\}=\frac{P}{i}\left\{\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}\right\}.$$

সুতরাং n বৎসর স্থায়ী বার্ষিক বৃত্তি P এর বর্তমান মূল্য হইল

$$V = a_{\overline{n}|} P = \frac{P}{i}\left\{1-(1+i)^{-n}\right\} = \frac{P}{i}\left\{1-\frac{1}{(1+i)^n}\right\}$$

$$= \frac{P}{i}\left\{\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}\right\},$$

যেখানে i=একক টাকার প্রতি 1 বৎসরের সুদ।

যদি বৎসরে p বার অর্থ প্রদত্ত হয় এবং বার্ষিক খাজনা হয় P (অর্থাৎ নিয়মিত ব্যবধানে প্রদত্ত কিস্তি P/p), আর প্রতি বৎসরে প্রতি একক টাকার সুদ i, তবে n বৎসর মেয়াদী বার্ষিক বৃত্তি P এর বর্তমান মূল্য V কে নির্দেশ করা হয় $a_{\overline{n}|}^{(p)} P$ প্রতীক দ্বারা এবং উহার মান হইবে :

$$V = a_{\overline{n}|}^{(p)} P = \frac{\frac{P}{p}}{\frac{i}{p}}\left\{1-\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}\right\} \text{ বা, } V = \frac{P}{i}\left\{1-\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}\right\}.$$

চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য (Present value of a Perpetuity)

চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তির ক্ষেত্রে n হইল অনির্দিষ্টভাবে বৃহৎ সংখ্যা, সুতরাং $(1+i)^n$ কে যতদূর ইচ্ছা বৃহৎ করা যায়, ফলে $\frac{1}{(1+i)^n}=(1+i)^{-n}$ কে ইচ্ছামত ক্ষুদ্র হইতে ক্ষুদ্রতর করা যায় এবং শেষ পর্যন্ত ইহা শূন্যের দিকে অগ্রসর হইতে হইতে শূন্য হয়।

$$\therefore \quad V = a_{\overline{\infty}|} P = \frac{P}{i}[1-0] = \frac{P}{i}$$

[প্রতীক চিহ্ন ∞ এর অর্থ, n অনির্দিষ্টভাবে বৃহৎ।]

টীকা। (i) বার্ষিক বৃত্তির **ক্রয়-মূল্য** (**purchase-price**) বা কেবল মূল্য বলিতে এই বর্তমান মূল্য বুঝায়। (ii) যদি কোন বার্ষিক বৃত্তি P এর বর্তমান মূল্য nP হয়, তবে বলা হয় যে ঐ বার্ষিক বৃত্তি n **বৎসরের বর্ষ-গুণকের মূল্যের (worth n years' purchase)** সমান।

11·4. কতিপয় গুরুত্বপূর্ণ শব্দ (Terms)

1. **শুল্কহীন সম্পত্তি (free-hold estate)** বলিতে বুঝায় এমন সম্পত্তি যাহা খাজনা (rent) বলিয়া অভিহিত চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তি বা কিস্তি (perpetual

annuity) প্রদান করে, আর **পাট্টা বা ইজারা বলে প্রাপ্ত সম্পত্তি (lease-hold estate)** হইল নির্দিষ্ট মেয়াদের জন্য অধিকৃত সম্পত্তি, যাহা ঐ নির্দিষ্ট মেয়াদের জন্য খাজনা প্রদান করে।

2. শুল্কহীন সম্পত্তির মূল্যকে চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য হিসাবে গণ্য করা যায় কারণ চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তির প্রত্যেক কিস্তি সম্পত্তিটির খাজনার সমান। অনুরূপ, নিয়মিত পাট্টা-প্রাপ্ত সম্পত্তির (certain lease-hold property) মূল্য হইল এইরূপ নিয়মিত বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য যাহার প্রত্যেক কিস্তি সম্পত্তিটির খাজনার সমান এবং যাহার মেয়াদ হইল তত বৎসর যত বৎসর পরে পাট্টা বা ইজারাকাল শেষ হয়।

3. সম্পত্তির মূল্যকে প্রায়ই **'এতগুলি বৎসরের বর্ষ-গুণকের মূল্যের' (of so many years' purchase)** বলিয়া উল্লেখ করা হয় : ইহার তাৎপর্য হইল এই যে যদি কোন সম্পত্তি x বৎসরের বর্ষ-গুণকের মূল্যের হয়, তবে

সম্পত্তিটির বর্তমান মূল্য $= x \times$ ঐ সম্পত্তি-প্রদত্ত খাজনা।

4. শুল্কহীন সম্পত্তির মূল্য = চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তি P এর বর্তমান মূল্য (যেখানে বার্ষিক খাজনা P) $=\frac{P}{i}=x.P$ (ধরা যাক) ; শুল্কহীন সম্পত্তিটি বর্তমানে তাহা হইলে

x বা, $\frac{1}{i}$ বৎসরের বর্ষ-গুণকের মূল্যের।

5. ধরা যাক, এক ব্যক্তি n বৎসরের মেয়াদের একটি পাট্টা (lease) ক্রয় করিয়াছেন, যাহার বার্ষিক খাজনা P টাকা ; আরও ধরা যাক, x বৎসর $(n > x)$ পরে তিনি পাট্টাটির মেয়াদ নূতন করিয়া পুনরায় অতিরিক্ত y বৎসরের জন্য বৃদ্ধি করিতে ইচ্ছা করিলেন। তখন তাঁহাকে অবশ্যই কিছু অর্থ দিতে হইবে, যাহাকে বলা হয় পাট্টাটির y বৎসরের জন্য পুনর্নবীকরণের **জরিমানা (fine)**। এই জরিমানা হইল, y বৎসর মেয়াদের ও $(n-x)$ বৎসরের জন্য বিলম্বিত বার্ষিক বৃত্তি P এর বর্তমান মূল্য। বিলম্বিত বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য নির্ণয়ের সূত্র পরে প্রদত্ত হইল।

দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণসমূহ

উদা. 1. বার্ষিক $4\frac{1}{4}\%$ সুদের হারে 15 বৎসর মেয়াদের 3000 টাকার বার্ষিক বৃত্তির মোট অর্থ (amount) এবং বর্তমান মূল্য নির্ণয় কর।

এখানে $P=3000$ টাকা, $n=15$, $i=\frac{4\frac{1}{4}}{100}=\frac{4{\cdot}25}{100}=0{\cdot}0425$;

$$\therefore\ A\left(=s_{\overline{15}|0{\cdot}0425}\right)=\frac{P}{i}\{(1+i)^n-1\}=\frac{3000}{0{\cdot}0425}\{(1{\cdot}0425)^{15}-1\}$$

$$=\frac{3000}{0\cdot0425}(1\cdot868-1)=\frac{3000\times0\cdot868}{0\cdot0425}=\frac{3000\times8680}{425}$$

$=61,270\cdot59$ **টা.**

$$V\left(=a_{\overline{15}|\cdot0425}\right)=\frac{P}{i}\{1-(1+i)^{-n}\}=\frac{3000}{0\cdot0425}\{1-(1\cdot0425)^{-15}\}$$

$$=\frac{3000}{0\cdot0425}(1-0\cdot5352)=\frac{3000\times0\cdot4648}{0\cdot0425}=\frac{3000\times4648}{425}$$

$=32,809\cdot41$ **টা.** বা 32,809 টাকা 41 পয়সা।

উদা. 2. 12 বৎসর মেয়াদের এবং প্রতি 3 মাস অন্তে কিস্তি দেয় এইরূপ 480 টাকার বার্ষিক বৃত্তির 6% হারে মোট অঙ্ক এবং বর্তমান মূল্য নির্ণয় কর, যদি এক-চতুর্থ বৎসর পরে পরে সুদ আসলে পরিণত করা হয়।

এখানে $i=0\cdot06$, $n=12$, বার্ষিক বৃত্তি $P=480$ টা., যাহা প্রতি বৎসরে 4 বার দেয়।

$\therefore$ মোট অঙ্ক $A=\frac{P}{i}\left\{\left(1+\frac{i}{4}\right)^{4n}-1\right\}$

$$=\frac{480}{0\cdot06}\left\{\left(1+\frac{0\cdot06}{4}\right)^{4\times12}-1\right\}=8000\{(1\cdot015)^{48}-1\}$$

$$=8000\times1\cdot029=8232$$

$\therefore$ নির্ণেয় মোট অর্থ $=8232$ **টা.** (প্রায়)।

বর্তমান মূল্য $V=\frac{P}{i}\left\{1-\left(1+\frac{i}{4}\right)^{-4n}\right\}=\frac{480}{0\cdot06}\left\{1-\left(1+\frac{0\cdot06}{4}\right)^{-48}\right\}$

$$=\frac{480}{0\cdot06}\left\{1-1\cdot015)^{-48}\right\}$$

$=8000\ (1-0\cdot4929)=8000\times0\cdot5071=4056\cdot80$ (প্রায়)

$\therefore$ নির্ণেয় বর্তমান মূল্য $=4056\cdot80$ **টা.** (প্রায়)।

ধরা যাক্, $x=(1\cdot015)^{48}$

$\therefore\ \log x=48\log1\cdot015$

$=48\times0\cdot0064=0\cdot3072$

$\therefore\ x=\text{antilog}\ 0\cdot3072=2\cdot029$

ধরা যাক্, $y=(1\cdot015)^{-48}$

$\therefore\ \log y=-48\log1\cdot015$

$=-48\times0\cdot0064=-0\cdot3072$

$=\bar{1}\cdot6928$;

$\therefore\ y=\text{antilog}\ \bar{1}\cdot6928=0\cdot4929$

উদা. 3. শতকরা 4 টা. হারে 5 বৎসর মেয়াদের বৎসরান্তে কিস্তি দেয় 300 টা. বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য নির্ণয় কর।

[প্রদত্ত $\log 104 = 2{\cdot}0170333$, $\log 0{\cdot}0821923 = \bar{2}{\cdot}9148335$]

এখানে $P = 300$ টা., $n = 5$, $i = 4/100 = {\cdot}04$;

$$\therefore \quad V = \frac{P}{i}\left\{1-(1+i)^{-n}\right\} = \frac{300}{0{\cdot}04}\left\{1-(1+0{\cdot}04)^{-5}\right\}$$

$$= \frac{300}{{\cdot}04}(1-0{\cdot}821923)$$

$$= \frac{300}{{\cdot}04} \times 0{\cdot}178077$$

$$= \frac{3 \times 1780{\cdot}77}{4} = \frac{5342{\cdot}31}{4}$$

$= 1335{\cdot}58$ টা. (প্রায়)

ধরা যাক্, $x = (1{\cdot}04)^{-5}$

$$\therefore \log x = -5 \log 1{\cdot}04$$
$$= -5 \times 0{\cdot}0170333$$
$$= -0{\cdot}0851665$$
$$= \bar{1}{\cdot}9148335$$
$$= \log 0{\cdot}821923$$
$$\therefore x = 0{\cdot}821923$$

উদা. 4. প্রতি বৎসর $4\frac{1}{2}\%$ চক্রবৃদ্ধি হারে 15 বৎসর মেয়াদের 500 টাকার নিয়মিত বার্ষিক বৃত্তির মোট অঙ্ক এবং বর্তমান মূল্য নির্ণয় কর।

এখানে $P = 500$ টা., $n = 15$, $i = \frac{4\frac{1}{2}}{100} = \frac{4{\cdot}5}{100} = 0{\cdot}045$;

$$\therefore A = \frac{P}{i}\left\{(1+i)^n - 1\right\} = \frac{500}{0{\cdot}045}\left\{(1{\cdot}045)^{15} - 1\right\} = \frac{500}{0{\cdot}045}(1{\cdot}93528 - 1)$$

$= \frac{500 \times {\cdot}93528}{0{\cdot}045} = \frac{5 \times 93528}{45} =$ **10,705·60 টা.** ;

এবং $V = \frac{P}{i}\left\{\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right\} = \frac{500}{0{\cdot}045}\left\{\frac{(1{\cdot}045)^{15} - 1}{(1{\cdot}045)^{15}}\right\}$

$$= \frac{500}{0{\cdot}045} \cdot \frac{1{\cdot}93528 - 1}{1{\cdot}93528} = \frac{500}{0{\cdot}045} \times \frac{0{\cdot}93528}{1{\cdot}93528} = \frac{500000}{45} \times \frac{93528}{193528}$$

$= \frac{100000 \times 10392}{193528} =$ **5369·77 টা.** ।

উদা. 5. কত মূল্যে 4 বৎসর মেয়াদের 1050 টাকার বার্ষিক বৃত্তি ক্রয় করা যাইবে, যদি চক্রবৃদ্ধির হার বার্ষিক $3\frac{1}{2}\%$ হয় ?

বার্ষিক বৃত্তির ক্রয়মূল্য হইল উহার বর্তমান মূল্য। এখন $V = \frac{P}{i}\{1-(1+i)^{-n}\}$

এবং এখানে $P = 1050$ টা. $n = 4$, $i = \frac{3{\cdot}5}{100} = 0{\cdot}035$;

$$\therefore\ V=\frac{1050}{0.035}\{1-(1.035)^{-4}\}$$

$$=\frac{1050}{0.035}(1-0.8718)$$

$$=\frac{1050}{0.035}\times 0.1282$$

$$=\frac{105\times 1282}{35}=3846$$

ধরা যাক, $x=(1.035)^{-4}$

$\therefore\ \log x=-4\log 1.035$
$=-4\times 0.0149$
$=-0.0596$
$=-1+1-0.0596$
$=\bar{1}.9404$

$\therefore\ x=\text{antilog }\bar{1}.9404$
$=0.8718$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্রয়মূল্য $=3{,}846$ টা.।

উদা. 6. বার্ষিক $6\frac{1}{4}\%$ হারে প্রতি বৎসরান্তে কিস্তি দেয় চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তি 825 টাকা ; উহার মূল্য কত ?

চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তির মূল্য হইল উহার বর্তমান মূল্য।

এখন $V=\frac{P}{i}$, এবং এখানে $P=825$ টা. $i=\frac{6\frac{1}{4}}{100}=\frac{1}{16}$;

$\therefore\ V=\frac{825}{\frac{1}{16}}=825\times 16=13{,}200$; $\therefore$ নির্ণেয় মূল্য $=13{,}200$ টা.।

ঋণ বা কর্জ সংক্রান্ত প্রশ্ন (Problems on Loans)

যখন কোন ব্যক্তি কিছু অর্থ ঋণস্বরূপ গ্রহণ করেন এবং সম-কিস্তিতে উহা পরিশোধ করিতে স্বীকৃত হন, তখন গৃহীত ঋণের অর্থ প্রস্তাবিত বার্ষিক (annuity) বৃত্তির বর্তমান মূল্যের সমান।

উদা. 7. এস. রায় 4% চক্রবৃদ্ধির হারে 20,000 টাকা কর্জ করেন এবং প্রতি বৎসরান্তে দেয় 10টি সমান কিস্তিতে সুদ-সহ ঐ টাকা পরিশোধ করিতে স্বীকৃত হন। প্রতি কিস্তির পরিমাণ নিরূপণ কর।

ধরা যাক, প্রতি কিস্তির পরিমাণ $=P$ টা. ; তাহা হইলে 20,000 টা. হইল, বার্ষিক 4% হারে 10 বৎসর মেয়াদের P টাকার বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য।

এখন, $V=\frac{P}{i}\{1-(1+i)^{-n}\}$ এবং

এখানে $V=20{,}000$ টা., $n=10$ এবং $i=\frac{4}{100}=0.04$

$$\therefore\ 20{,}000=\frac{P}{i}\{1-(1+i)^{-n}\}=\frac{P}{0.04}\{1-(1.04)^{-10}\}$$

$$=\frac{P}{0.04}(1-0.6761)=\frac{P}{0.04}\times 0.3239\ ;$$

$$\therefore \quad P=\frac{20{,}000\times 0{\cdot}04}{0{\cdot}3239}=\frac{8000000}{3239}=2469{\cdot}898\cdots$$

$\therefore$ নির্ণেয় প্রতি কিস্তির পরিমাণ = 2,469·90 টাকা।

[$P=\frac{8000000}{3239}=2470$, 4-অঙ্ক বিশিষ্ট লগ্‌-তালিকানুসারে ; প্রতি কিস্তির পরিমাণ তাহা হইলে = 2470 টাকা।]

উদা. 8. এক ব্যক্তি 1000 টাকা কর্জ করিলেন এই শর্তে যে প্রতি ছয় মাস অন্তে দেয় 4টি সম-কিস্তিতে তিনি উহা পরিশোধ করিবেন এবং ঋণগ্রহণের সময় হইতে ছয় মাস পরে প্রথম কিস্তি দিবেন। প্রতি কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর, যদি অর্থের মূল্য বার্ষিক 5% হয় (if the money is worth 5% *p.a.*)।

এখানে 1000 টাকা = বৎসরে দুইবার দেয় এইরূপ 4টি পর্যায়কালের P (ধরা যাক্) টাকার অবিলম্বিত বা সাধারণ বার্ষিক এর বর্তমান মূল্য, যেখানে সুদের হার $i=0{\cdot}05$.

$$\therefore \quad 1000=\frac{P}{0{\cdot}05}\left\{1-\left(1+\frac{\cdot 05}{2}\right)^{-4}\right\}$$

$$=\frac{P}{0{\cdot}05}\{1-(1{\cdot}025)^{-4}\}$$

$$=\frac{P}{0{\cdot}05}(1-0{\cdot}9061)$$

$$=\frac{P\times 0{\cdot}0939}{0{\cdot}05}=\frac{P\times 939}{500};$$

$$\therefore P=\frac{500\times 1000}{939}=532 \text{ টা. (প্রায়)}$$

ধরা যাক্, $x=(1{\cdot}025)^{-4}$

$$\therefore \log x=-4\log 1{\cdot}025$$

$$=-4\times 0{\cdot}0107$$

$$=-{\cdot}0428$$

$$=\bar{1}{\cdot}9572$$

$$\therefore x=\text{antilog }\bar{1}{\cdot}9572$$

$$=0{\cdot}9061$$

$\therefore$ প্রত্যেক অর্ধ-বৎসরান্তে কিস্তির নির্ণেয় মূল্য $=\frac{P}{2}=\frac{532 \text{ টা}}{2}=266$ টা. (প্রায়)।

উদা. 9. বার্ষিক $2\frac{1}{2}\%$ চক্রবৃদ্ধি হারে এক ব্যক্তি 2500 টাকা কর্জ করিলেন এবং 18টি সম-বার্ষিক কিস্তিতে সুদসহ উহা পরিশোধে স্বীকার পাইলেন। প্রথম বৎসরের শেষে প্রথম কিস্তি প্রদত্ত হইয়া থাকিলে প্রতি কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর।

ধরা যাক্, P = প্রতি কিস্তির পরিমাণ ; তাহা হইলে 2500 টাকা = 18 বৎসর মেয়াদের P টাকার সাধারণ বার্ষিকের বর্তমান মূল্য, যেখানে সুদের হার বাৎসরিক $2\frac{1}{2}\%$;

সুতরাং, এখানে $V=2500$ টাকা, $n=18$, এবং $i=\frac{\frac{5}{2}}{100}=\frac{2{\cdot}5}{100}={\cdot}025$;

$\therefore \quad V=\frac{P}{i}\left\{\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}\right\}$ সূত্র হইতে,

$$2500=\frac{P}{\cdot025}\left\{\frac{(1\cdot025)^{18}-1}{(1\cdot025)^{18}}\right\}=\frac{P}{\cdot025}\cdot\frac{1\cdot55966-1}{1\cdot55966}$$

$$=\frac{P}{0\cdot025}\cdot\frac{0\cdot55966}{1\cdot55966};$$

$$\therefore \quad P=\frac{2500\times0\cdot025\times1\cdot55966}{0\cdot55966}=\frac{25\times25\times155966}{559660}$$

$$=\frac{100\times100\times155966}{8954560}=174\cdot17 \text{ (প্রায়)};$$

$\therefore$ প্রত্যেক কিস্তির নির্ণেয় পরিমাণ $=174\cdot17$ টা. (প্রায়)।

উদা. 10. এক ব্যক্তি 40,000 টাকায় নিম্ন শর্তে একটি বাড়ি ক্রয় করিলেন : তিনি 10,000 টা. নগদ দিবেন এবং ক্রয়ের দিন হইতে এক বৎসর পরে প্রথম কিস্তি সহ 10টি সমান বার্ষিক কিস্তিতে অবশিষ্ট টাকা পরিশোধ করিবেন। বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধির হার হইলে প্রত্যেক কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর।

বাড়িটির মূল্য $=40,000$ টা.
ক্রয়ের সময় প্রদত্ত অর্থ $=10,000$ টা.
অবশিষ্ট দেয় টাকা $=30,000$ টা.

এই টাকা 10টি **সমান বাৎসরিক কিস্তিতে** দিবার কথা

ধরা যাক, $P=$ প্রত্যেক কিস্তির পরিমাণ ; তাহা হইলে অবশিষ্ট 30,000 টা. হইল বার্ষিক 5% হারে 10 বৎসর মেয়াদের P বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য।

এখন, $V=\frac{P}{i}\{1-(1+i)^{-n}\}$;

এখানে $V=30,000$ টা., $n=10$ এবং $i=\frac{5}{100}=\cdot05$;

$$\therefore \quad 30,000=\frac{P}{\cdot05}\{1-(1\cdot05)^{-10}\}$$

$$=\frac{P}{\cdot05}(1-0\cdot6138)$$

$$=\frac{P}{\cdot05}\times0\cdot3862$$

$$=\frac{P\times3862}{500}$$

$$\therefore \quad P=\frac{30,000\times500}{3862}=3883\cdot997$$

ধরা যাক, $x=(1\cdot05)^{-10}$;

$$\therefore \quad \log x=-10\log1\cdot05$$

$$=-10\times0\cdot0212$$

$$=-0\cdot2120$$

$$=-1+1-0\cdot2120$$

$$=\bar{1}\cdot7880$$

$$\therefore \quad x=\text{antilog }\bar{1}\cdot7880.$$

$$=0\cdot6138$$

$\therefore$ **প্রত্যেক কিস্তির নির্ণেয় পরিমাণ $=3884$ টা.** (প্রায়)।

সিংকিং ফাণ্ড বা দেনা-পরিশোধ তহবিল (Sinking Fund) :

নির্দিষ্ট মেয়াদ অন্তে ঋণ-পরিশোধ (Repayment of Loan after a certain period) :

ভবিষ্যতে ঋণ পরিশোধের জন্য বা কোম্পানির ঋণপত্র বা কাগজ (debenture stock) এর খাতে অর্থ প্রদানের জন্য অথবা কলকারখানার কলকব্জা (machinery), যন্ত্রপাতি বা প্ল্যান্ট (plant) প্রভৃতির ন্যায় মূল্যবান বস্তুর পুরাতন অবস্থায় নূতনের দ্বারা প্রতিস্থাপনের পক্ষে উপযুক্ত ও অভীষ্ট পরিমাণ অর্থ সঞ্চয়ের জন্য প্রতি বৎসর নির্দিষ্ট পরিমাণ অর্থ পৃথক্ করিয়া রাখা হয়, যাহাতে চক্রবৃদ্ধি হারে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয় ও সঞ্চিত হয়—এইভাবে যে অর্থ-তহবিল সৃষ্ট হয় তাহাকে **সিংকিং ফাণ্ড বা দেনা-পরিশোধ তহবিল** বলা হয়।

সুতরাং দেনা-পরিশোধ তহবিল বা সিংকিং ফাণ্ডকে অভীষ্ট মূলধনের সমান 'মোট অঙ্কের' বার্ষিক বৃত্তি (annuity) হিসাবে গণ্য করা যাইতে পারে এবং ফলে এই সংক্রান্ত প্রশ্নগুলির সমাধানের নিমিত্ত সূত্র $A(=S_{\overline{n}|})$ কে প্রয়োগ করা যাইতে পারে।

উদা. 11. একটি যন্ত্র খরিদ করিতে কোন এক সংস্থার 65,000 টা. খরচ হইল ; যন্ত্রটির কার্যকরী জীবন (effective life) 25 বৎসর বলিয়া অনুমিত হইল। কার্যকরী জীবনের শেষে, যন্ত্রটির অকেজো লোহালকড় বিক্রয় করিয়া মাত্র 2500 টাকা পাওয়া যাইবে ধরিয়া উহার প্রতিস্থাপনের জন্য একটি সিংকিং ফাণ্ড সৃষ্টি করা হইল। লাভের অঙ্ক হইতে ঐ ফাণ্ডে প্রতি বৎসর কি পরিমাণ অর্থ রাখা উচিত তাহা নির্ণয় কর, যদি বার্ষিক $3\frac{1}{2}\%$ চক্রবৃদ্ধি হারে উহা সঞ্চিত হয়।

যন্ত্রটির ক্রয়মূল্য = 65,000 টা.

গুরুত্বহীন (scrap value) মূল্য = 2,500 টা.

অন্তর (balance) = 62,500 টা.

স্পষ্টত 25 বৎসর পরে অনুরূপ যন্ত্র ক্রয় করিতে এই পরিমাণ অর্থ তখন আবশ্যক হইবে ; সুতরাং প্রতি বৎসরের সঞ্চয় যদি P টাকা হয়, তবে বার্ষিক $3\frac{1}{2}\%$ হারে P বার্ষিক এর 25 বৎসর পরে মোট অঙ্ক 62,500 টা. হওয়া উচিত। 62,500 টাকাই অভীষ্ট মূলধন ধরিয়া লওয়া হইল ; বাস্তবক্ষেত্রে 25 বৎসর পর ঐ যন্ত্রটির দাম হয়তো বৃদ্ধিই পাইবে।

এখন $A=\frac{P}{i}\{1+i)^n-1\}$;

এবং এখানে $A=62{,}500$ টা., $n=25$, $i=\frac{3\frac{1}{2}}{100}=\frac{3{\cdot}5}{100}={\cdot}035$;

$$\therefore\ 62{,}500=\frac{P}{\cdot035}\{(1\cdot035)^{25}-1\}$$
$$=\frac{P}{\cdot035}(2\cdot358-1)$$
$$=\frac{P}{\cdot035}\times1\cdot358$$
$$\therefore\ P=\frac{62{,}500\times\cdot035}{1\cdot358}$$
$$=\frac{62{,}500\times35}{1358}$$

ধরা যাক্, $x=(1\cdot035)^{25}$;
$$\therefore\ \log x=25\log1\cdot035$$
$$=25\times0\cdot0149$$
$$=0\cdot3725$$
$$\therefore\ x=\text{antilog }0\cdot3725$$
$$=2\cdot358$$

$$\therefore\ \log P=\log62500+\log35-\log1358$$
$$=4\cdot7959+1\cdot5441-3\cdot1328=3\cdot2072\ ;$$
$$\therefore\ P=\text{antilog }3\cdot2072=1612\ ,$$

∴ প্রত্যেক বৎসর সিংকিং ফাণ্ডে যে অর্থ রাখিতে হইবে তাহার পরিমাণ =**1612** টা. (প্রায়)।

উদা. 12. প্রত্যেক অর্ধ-বৎসর অন্তে সুদ আসলে পরিণত হইবে এইরূপ বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি হারে এক ব্যক্তি 16,000 টাকা এই চুক্তিতে কর্জ করিলেন যে উহা সুদ সমেত 20টি অর্ধ-বার্ষিক কিস্তিতে তিনি পরিশোধ করিবেন ; ইহার মধ্যে প্রথম 19টি কিস্তির প্রত্যেকটি 1000 টাকা করিয়া হইবে এবং কর্জ গ্রহণের ছয় মাস পরে প্রথম কিস্তি দেওয়া হইবে। তাহা হইলে শেষ কিস্তির মান আসন্ন টাকায় নির্ণয় কর।

প্রথম 19টি অর্ধ-বার্ষিক কিস্তি একটি বার্ষিক কিস্তি উৎপন্ন করে যাহার মূল্য 1000 টা.×2=2000 টা. প্রতি বৎসর এবং যাহা বার্ষিক 4% হারে ছয় মাস অন্তর দেয়। সুতরাং

$P=2000$ টা., $n=\frac{19}{2}$, $i=\frac{4}{100}=\cdot04$; সুতরাং প্রথম 19টি কিস্তির বর্তমান মূল্য V হইলে

$$V=\frac{P}{i}\left\{1-\left(1+\frac{i}{2}\right)^{-n\times2}\right\}=\frac{2000}{\cdot04}\left\{1-(1\cdot02)^{-19}\right\}$$

$$=\frac{2000}{\cdot04}(1-0\cdot6864)$$
$$=\frac{2000}{\cdot04}\times\cdot3136=\frac{2\times31360}{4}$$
$$=15680$$

ধরা যাক্, $x=(1\cdot02)^{-19}$;
$$\therefore\ \log x=-19\log1\cdot02$$
$$=-19\times0\cdot0086$$
$$=-\cdot1634=\bar{1}\cdot8366$$
$$\therefore\ x=\text{antilog }\bar{1}\cdot8366=0\cdot6864$$

∴ প্রথম 19টি কিস্তি প্রদানের পর দেয় অর্থের যাহা অবশিষ্ট থাকে তাহার বর্তমান মূল্য = 16,000 টা. − 15680 টা. = 320 টা.। এখন অবশিষ্ট সমগ্র অর্থ 20টি অর্ধ-বৎসর অন্তে প্রদত্ত হইতেছে ;

সুতরাং তাঁহার শেষ কিস্তির নির্ণেয় মোট অঙ্ক A হইলে

$A = 320$ টাকার 20টি অর্ধ-বৎসর অর্থাৎ 10 বৎসরের মোট অঙ্ক, যেখানে বার্ষিক 4% হারে প্রতি অর্ধ-বৎসর অন্তে সুদ দেয়

$$= 320\left(1+\frac{\cdot 04}{2}\right)^{10\times 2} = 320(1\cdot 02)^{20} ;$$

$$\therefore \log A = \log 320 + 20 \log 1\cdot 02 = 2\cdot 5051 + 20 \times 0\cdot 0086$$
$$= 2\cdot 5051 + \cdot 172 = 2\cdot 6771 ;$$
$$\therefore A = \text{antilog } 2\cdot 6771 = 475\cdot 4 ;$$

∴ নির্ণেয় শেষ কিস্তির-পরিমাণ = 475 টাকা (আসন্ন মান)।

শুল্কহীন (Free-hold) এবং ইজারাপ্রাপ্ত (Lease-hold) সম্পত্তি

নিম্নলিখিত বিষয়গুলি স্মরণ করিতে হইবে :

(i) শুল্কহীন সম্পত্তির মূল্য$\left(= a_{\overline{\infty}|} P\right) = \frac{P}{i} = Px$, যেখানে P = বার্ষিক খাজনা এবং $x \left(=\frac{1}{i}\right)$ হইল তত বৎসর যত বৎসরের বর্ষ-গুণকের মূল্যের ঐ খাজনা।

(ii) ইজারা প্রাপ্ত সম্পত্তির খাজনা P হইলে উহার বর্তমান মূল্য নির্ণয়ের জন্য ইজারার অবশিষ্ট সময়ের জন্য P বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য নিরূপণ করিতে হইবে।

(iii) ইজারা প্রাপ্ত সম্পত্তি ইজারার মেয়াদের শেষে মূল মালিককে বর্তায় (reverts) যদি A **মূল্যের** সম্পত্তি n বৎসরের পর মূল মালিককে বর্তায়, তবে উহার **প্রত্যাবর্তন মূল্য** (the value of reversion) = A র বর্তমান মূল্য = $\frac{A}{(1+i)^n}$; যদি **বার্ষিক খাজনা** P হয়, তবে (i) এর সাহায্যে পাওয়া যায় $A = \frac{P}{i}$, সুতরাং **প্রত্যাবর্তন মূল্য** = $\frac{P}{i(1+i)^n}$

উদা. 13. যদি 5% চক্রবৃদ্ধি অভীষ্ট হয়, তবে কোন শুল্কহীন সম্পত্তি কত বৎসরের বর্ষ-গুণকের মূল্যের হওয়া উচিত ?

শুল্কহীন সম্পত্তির মূল্য = চিরস্থায়ী কিস্তি P (বার্ষিক খাজনা) এর বর্তমান মূল্য।

$\therefore$ মূল্য $=\dfrac{P}{i}=xP$ (যেখানে x হইল তত বৎসর যত বৎসরের বর্ষগুণকের মূল্যের ঐ শুল্কহীন সম্পত্তি)

$\therefore \quad x=\dfrac{1}{i}=\dfrac{1}{\frac{5}{100}}=20$ (**বৎসরের বর্ষ-গুণকের মূল্যের**)

উদা. 14. একটি বাণিজ্যালয় (a house) $13\frac{1}{2}$ বৎসরের বর্ষ-গুণকের মূল্যের ; সুদ 6% প্রতি বৎসর হিসাবে গণনা করিয়া ইজারার মেয়াদ আসন্ন বৎসরে নির্ণয় কর।

ধরা যাক্, $P=$ বাৎসরিক খাজনা। এখানে $i=0\cdot06$; $n=$ ইজারার মেয়াদের অবশিষ্ট সময়। তাহা হইলে $13\frac{1}{2}P=6\%$ প্রতি বৎসর হারে n বৎসর মেয়াদের P বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য $=\dfrac{P}{\cdot06}\{1-(1\cdot06)^{-n}\}$,

বা, $\frac{27}{2}=\dfrac{1}{\cdot06}\{1-(1\cdot06)^{-n}\}$,

বা, $\dfrac{27\times\cdot06}{2}=1-(1\cdot06)^{-n}$ বা, $(1\cdot06)^{-n}=1-\cdot81=0\cdot19$

বা, $-n=\log\ 0\cdot19/\log\ 1\cdot06=\dfrac{\bar{1}\cdot2788}{0\cdot0253}=\dfrac{-0\cdot7212}{0\cdot0253}$

$\therefore\ n=\dfrac{7212}{253}=29$ বৎসর (প্রায়)।

উদা. 15. (a) 1,00,000 টাকা মূল্যের একটি সম্পত্তি 99 বৎসরের জন্য ইজারা দেওয়া হইল। মূল অধিকারীকে প্রত্যাবর্তনের মূল্য নির্ণয় কর (চক্রবৃদ্ধি 5% প্রতি বৎসর)

প্রত্যাবর্তন মূল্য $=$ 1,00,000 টাকা মূল্যের সম্পত্তির বর্তমান মূল্য

$= 100{,}000$ টা. $\times \dfrac{1}{(1\cdot05)^{99}}$

$= 100{,}000$ টা. $\times \cdot007966$

$= 797$ টা. (আসন্ন টাকায়)।

ধরা যাক্, $x=(1\cdot05)^{-99}$,

$\therefore\ \log x=-99\log 1\cdot05$

$=-99\times\cdot0212$

$=-2\cdot0988$

$=-3+3-2\cdot0988$

$=\bar{3}\cdot9012$;

$\therefore\ x=\text{antilog}\ \bar{3}\cdot9012$

$=\cdot007966$

(*b*) যদি উপরের প্রশ্নে সম্পত্তির মূল্যের পরিবর্তে বলা হয়, উহার বার্ষিক খাজনা 5000 টা., তাহা হইলে সমাধান পদ্ধতির কি পরিবর্তন করিবে ?

প্রথমে সম্পত্তির মূল্য $A=\frac{P}{i}$ [$P=$বার্ষিক খাজনা] নির্ণয় করিতে হইবে ;

$A=\frac{5000}{\frac{5}{100}}=1,00,000$ টা.; এখন উপরে প্রদত্ত পদ্ধতিতে অগ্রসর হও।

11·6. বিলম্বিত বার্ষিক বৃত্তি (Deferred Annuity)

বাৎসরিক P মূল্যের যে বিলম্বিত (সাধারণ) বার্ষিক বৃত্তির প্রথম কিস্তি প্রদান m বৎসর পরে শুরু হয় এবং তাহার পর n বৎসর ধরিয়া উহা স্থায়ী হয়, তাহার বর্তমান মূল্য V হইলে এবং প্রতি বৎসর প্রতি একক টাকার চক্রবৃদ্ধি সুদ i হইলে

$$V=\frac{P}{i}\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^{m+n}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(A)}$$

$$=\frac{P}{i}\left\{1-\frac{1}{(1+i)^{m+n}}\right\}-\frac{P}{i}\left\{1-\frac{1}{(1+i)^m}\right\} \quad \cdots \quad \text{(B)}$$

স্মরণ করা যাইবে যে যখন **সাধারণ** বার্ষিক বৃত্তির কিস্তি প্রদান m বৎসরের জন্য স্থগিত রাখা হয়, তখন প্রথম কিস্তি দেয় হয় $(m+1)$ বৎসরের অন্তে, কারণ বার্ষিকটি শুরু হইতেছে m বৎসর পরে ; দ্বিতীয় কিস্তি দেয় হয় $(m+2)$ বৎসরের অন্তে, তৃতীয়টি $(m+3)$ বৎসরের অন্তে এবং পরবর্তীগুলি অনুরূপ হইবে, যতক্ষণ না শেষ কিস্তি দেয় হয় $(m+n)$ বৎসরের অন্তে। এই কিস্তিগুলির বর্তমান মূল্যসমূহ তাহা হইলে হইবে যথাক্রমে

$$\frac{P}{(1+i)^{m+1}},\ \frac{P}{(1+i)^{m+2}},\ \frac{P}{(1+i)^{m+3}},\ \ldots,\ \frac{P}{(1+i)^{m+n}}.$$

যেহেতু নির্ণেয় বর্তমান মূল্য$=V$ এবং যদি $v=\frac{1}{1+i}$ ধরা হয়, তবে

$$V=\frac{P}{(1+i)^{m+1}}+\frac{P}{(1+i)^{m+2}}+\frac{P}{(1+i)^{m+3}}+\cdots+\frac{P}{(1+i)^{m+n}}$$

$$=Pv^{m+1}+Pv^{m+2}+Pv^{m+3}+\cdots+Pv^{m+n}$$

$$=P(v^{m+1}+v^{m+2}+v^{m+3}+\cdots+v^{m+n})$$

$$=\frac{Pv^{m+1}(1-v^n)}{1-v}$$ [গুণোত্তর শ্রেণীটির সমষ্টি লইয়া, যেখানে $C.R. v<1$]

$$=\frac{P}{i}\cdot\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^{m+n}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(A)}$$

$$=\frac{P}{i}\left\{\frac{1}{(1+i)^m}-\frac{1}{(1+i)^{m+n}}\right\}$$

$$=\frac{P}{i}\left[\left\{1-\frac{1}{(1+i)^{m+n}}\right\}-\left\{1-\frac{1}{(1+i)^m}\right\}\right]$$

$$=\frac{P}{i}\left\{1-\frac{1}{(1+i)^{m+n}}\right\}-\frac{P}{i}\left\{1-\frac{1}{(1+i)^m}\right\}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (B)$$

(B) হইতে ইহা পাওয়া যায় যে :

m বৎসরের জন্য স্থগিত কোন বিলম্বিত বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য
$=(m+n)$ বৎসর মেয়াদের সাধারণ বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য
$-m$ বৎসর মেয়াদের ঐ সাধারণ বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য
$=a_{\overline{m+n|}}-a_{\overline{m|}}$.

বিশেষ ক্ষেত্র ঃ বিলম্বিত চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তির ক্ষেত্রে, যদি উহা m বৎসর পরে শুরু হয়, তবে $n\to\infty$ এবং $\frac{1}{(1+i)^{m+n}}\to 0$; সুতরাং বর্তমান মূল্য V এর মান হয়

$$V=\frac{P}{i}\cdot\frac{1}{(1+i)^m}=\frac{P}{i}\cdot(1+i)^{-m}, \text{ বা } \frac{P}{i}\cdot v^m.$$

উদা. 1. কোন্‌টি শ্রেষ্ঠতর—10 বৎসরের মেয়াদের 150 টাকার বার্ষিক বৃত্তি, না 7 বৎসর পরে খাজনা প্রদান শুরু হইবে এইরূপ বার্ষিক 79·20 টাকা খাজনার শুল্কহীন সম্পত্তির প্রত্যাবর্তন, যদি সুদের হার বার্ষিক 5% হয় ?

উভয়ের বর্তমান মূল্য নির্ণয়ের পর দেখিতে হইবে, কোনটি বৃহত্তর। যাহার বর্তমান মূল্য বৃহত্তর হইবে, স্পষ্টত সেইটি শ্রেষ্ঠতর। ধরা যাক্ উহাদের বর্তমান মূল্য যথাক্রমে V_1 টা. এবং V_2 টা.।

প্রথম ক্ষেত্র

$$V_1=\frac{P}{i}\{1-(1+i)^{-n}\}$$
$$=\frac{150}{\cdot 05}\{1-(1\cdot 05)^{-10}\}$$
$$=\frac{150}{\cdot 05}(1-0\cdot 6138)$$
$$=\frac{150}{\cdot 05}\times 0\ 3862$$
$$=30\times 38\cdot 62=1158\cdot 60$$

ধরা যাক, $x=(1\cdot 05)^{-10}$

$$\therefore \log x=-10\log 1\cdot 05$$
$$=-10\times \cdot 0212$$
$$=-\cdot 212=-1+1-\cdot 212$$
$$=\bar{1}\cdot 788$$
$$\therefore x=\text{antilog } \bar{1}\cdot 788=0\cdot 6138$$

$\therefore$ **বর্তমান মূল্য $(P.V)=1158\cdot 60$ টাকা।**

দ্বিতীয় ক্ষেত্র

ইহা চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তি, যাহা 7 বৎসরের জন্য স্থগিত। এখানে $P=79{\cdot}20$ টাকা। সুতরাং,

$$V_2=\frac{P}{i}(1+i)^{-m}$$
$$=\frac{79{\cdot}2}{{\cdot}05}(1{\cdot}05)^{-7}$$
$$=\frac{79{\cdot}2}{{\cdot}05}\times 0{\cdot}7106$$
$$=\frac{792\times 7{\cdot}106}{5}$$

ধরা যাক্, $x=(1{\cdot}05)^{-7}$

$$\therefore \log x=-7\log 1{\cdot}05$$
$$=-7\times{\cdot}0212$$
$$=-{\cdot}1484$$
$$=-1+1-{\cdot}1484$$
$$=\bar{1}{\cdot}8516$$
$$\therefore x=\text{antilog }\bar{1}{\cdot}8516$$
$$={\cdot}7106$$

$$\therefore \log V_2=\log 792+\log 7{\cdot}106-\log 5=2{\cdot}8987+0{\cdot}8517-0{\cdot}6990$$
$$=3{\cdot}0514\ ;$$

$\therefore V_2=\text{antilog } 3{\cdot}0514=1126$; $\therefore$ **বর্তমান মূল্য** $(P.V.)=1126$ টাকা ;

$\therefore$ প্রথম বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য শুল্কহীন সম্পত্তির বর্তমান মূল্য অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়ায় ঐ বার্ষিক বৃত্তিটিই শ্রেষ্ঠতর।

মেয়াদী তহবিল (Endowment Fund)

প্রতি একক চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তিতে i হারে রক্ষিত কোন তহবিল যদি প্রতি বৎসর একক অর্থ (unit money) প্রদান করে তবে উহার মূল্য কোন চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্যের সমান. সুতরাং ঐ মূল্য $=\frac{1}{i}$; প্রতি বৎসর P খাজনা সুনিশ্চিত করে এইরূপ তহবিলের মূল্য $=\frac{P}{i}$.

উদা. 2. 1,000 টাকার এক বাৎসরিক বৃত্তি (scholarship) দানের মেয়াদী তহবিলে আমি পাঁচটি সমান বাৎসরিক কিস্তিতে চাঁদা দিলাম। আমার পাঁচটি কিস্তির শেষ কিস্তির দুই বৎসর পরে প্রথম বৃত্তি দেওয়া হইবে। বাৎসরিক $3\frac{1}{2}\%$ হারে সুদ ধরিয়া প্রত্যেক কিস্তির মূল্য কত ছিল তাহা নির্ণয় কর।

ধরা যাক্, প্রত্যেক কিস্তির মূল্য R টাকা।

বৃত্তিটির জন্য মেয়াদী তহবিল সৃষ্টির নিমিত্ত পাঁচটি কিস্তির প্রথমটি এখন দেওয়া হইল বলিয়া ধরিয়া লওয়া হইল, এবং অপর চারিটি ইহার পর প্রতি এক বৎসরের ব্যবধানে দেওয়া হইবে বলিয়াও মনে করা হইল।

সুতরাং বৃত্তি প্রথম দেয় হইতেছে ষষ্ঠ বৎসরের অন্তে এবং ইহা চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তি ; সুতরাং ঐ বৃত্তি (scholarship) একটি 1000 টাকার চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তি গঠন করে, যাহা 5 বৎসরের জন্য স্থগিত আছে, কারণ পরবর্তী বৎসরের শেষে প্রথম বৃত্তি দেওয়া হইবে। স্পষ্টত মেয়াদী তহবিলের এবং বৃত্তির বর্তমান মূল্যদ্বয় সমান। সুতরাং এই বর্তমান মূল্যদ্বয় যথাক্রমে V_1 টা. এবং V_2 টা. হইলে

V_1 = প্রথম কিস্তি R + অপর চারি কিস্তির বর্তমান মূল্য (যাহারা প্রত্যেকে R টাকার এবং 4 বৎসর মেয়াদের সাধারণ বার্ষিক বৃত্তি গঠন করে)

$$= R + \frac{R}{i}\{1-(1+i)^{-n}\} = R + \frac{R}{\cdot 035}\{1-(1\cdot 035)^{-4}\}$$

$$= R + \frac{R}{\cdot 035}(1-0\cdot 8718)$$

$$= R + \frac{R}{\cdot 035}\times 0\cdot 1282 = R + \frac{1282R}{350} = \frac{1632R}{350}$$

$$V_2 = \frac{P}{i}(1+i)^{-m} = \frac{1000}{\cdot 035}(1\cdot 035)^{-5} = \frac{1000}{\cdot 035}\times \cdot 8424 = \frac{842400}{35}$$

$$\therefore \quad \frac{1632R}{350} = \frac{842400}{35}$$

বা, $R = \frac{8424000}{1632} = 5161\cdot 764\cdots$

∴ প্রত্যেক চাঁদার কিস্তির নির্ণেয় মূল্য

$= \mathbf{5{,}161\cdot 76}$ **টা.** (প্রায়)

ধরা যাক, $y = (1\cdot 035)^{-5}$

$$\therefore \log y = -5 \log 1\cdot 035$$
$$= -5 \times \cdot 0149$$
$$= -\cdot 0745$$
$$= -1 + 1 - \cdot 0745$$
$$= \bar{1}\cdot 9255$$
$$\therefore y = \text{antilog } \bar{1}\cdot 9255 = \cdot 8424$$

উদা. 3. 20,000 টাকা বার্ষিক খাজনার একটি শুল্কহীন সম্পত্তি 10 বৎসর পরে মালিকের নিকট প্রত্যাবর্তন করিল। বার্ষিক সুদ 4% চক্রবৃদ্ধি হারে প্রত্যাবর্তনটির বর্তমান মূল্য নির্ণয় কর।

নির্ণেয় বর্তমান মূল্য = 10 বৎসরের জন্য স্থগিত 20,000 টাকার চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য

$$= \frac{P}{i}(1+i)^{-m} = \frac{20{,}000 \text{ টা.}}{0\cdot 04}(1\cdot 04)^{-10} = \frac{20{,}000}{0\cdot 04}\times 0\cdot 6756$$

$= \mathbf{3{,}37{,}800}$ **টাকা** (প্রায়)।

প্রশ্নমালা XI

1. 5% চক্রবৃদ্ধি হারে 25 বৎসর মেয়াদের 25,00 টা. বার্ষিক বৃত্তির মোট অঙ্ক নির্ণয় কর। প্রদত্ত হইল যে $\log 10{\cdot}5 = 1{\cdot}02119$ এবং $\log 338{\cdot}64 = 2{\cdot}52975$.

2. 4% *C.I.* হইলে 1000 টাকার বার্ষিক বৃত্তির 15 বৎসরের মোট অঙ্ক নির্ণয় কর।

3. যদি $4\frac{1}{2}\%$ চক্রবৃদ্ধি স্বীকার করা হয় তবে 20 বৎসর মেয়াদী 100 টাকার বার্ষিক বৃত্তির মোট অঙ্ক যত হইবে, তাহার আসন্ন শুদ্ধ মান নির্ণয় কর।

4. শতকরা $3\frac{1}{2}$ চক্রবৃদ্ধির হার হইলে 1250 টাকার 20 বৎসরে মোট অঙ্ক কত হইবে?

5. শতকরা 3 হারে 8 বৎসর মেয়াদী ও বৎসরান্তে কিস্তি দেয় এইরূপ 1800 টাকার বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য নির্ণয় কর। প্রদত্ত আছে যে $\log 10{\cdot}3 = 1{\cdot}01284$ এবং $\log 0{\cdot}078937 = \bar{2}{\cdot}89728$.

যদি উক্ত বার্ষিক চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তি হয়, তবে বর্তমান মূল্য কত হইবে?

6. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হারে বৎসরান্তে দেয় ও দশ বৎসর মেয়াদী 500 টাকার বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য নির্ণয় কর।

7. 12 বৎসর মেয়াদী 150 টাকার নিয়মিত বার্ষিক বৃত্তির মোট অঙ্ক এবং বর্তমান মূল্য নির্ণয় কর, যদি বার্ষিক $3\frac{1}{2}\%$ হারে সুদ গণনা করা হয়।

প্রদত্ত : $(1{\cdot}035)^{12} = 1{\cdot}511056$.

8. বার্ষিক 4% হারে 15 বৎসরের মেয়াদের 150 টাকার বার্ষিক বৃত্তির মোট অঙ্ক নির্ণয় কর, যদি বৃত্তি এবং সুদ উভয়ই প্রতি অর্ধ-বৎসর অন্তে দেয় হয়।

9. বার্ষিক $4\frac{1}{2}\%$ চক্রবৃদ্ধির হারে 30 বৎসর স্থায়ী 1800 টাকার বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য নির্ণয় কর। প্রদত্ত হইল যে

$\log 1045 = 3{\cdot}01915$, এবং $\log 2663800 = 6{\cdot}4255$

10. (*i*) বার্ষিক $3\frac{1}{2}\%$ হারে 20 বৎসর মেয়াদী 80 টাকার বার্ষিক বৃত্তির এবং (*ii*) বার্ষিক 4% হারে প্রতি মাসান্তে দেয় 15 টাকার চিরস্থায়ী কিস্তির বর্তমান মূল্য নির্ণয় কর।

11. প্রতি বৎসর 3% সুদ (চক্রবৃদ্ধি) প্রদান করে এইরূপ একটি ব্যাঙ্কে এক ব্যক্তি প্রতি বৎসরান্তে 300 টাকা জমা রাখিতে মনস্থ করিলেন। যদি কিস্তিগুলি সঞ্চিত হইতে দেওয়া হয় তবে 15 বৎসরের শেষে মোট অঙ্ক কত হইবে?

12. এক ব্যক্তি 3 বৎসর পরে দেয় 2522 টাকার একটি ঋণ তিনটি সমান বার্ষিক কিস্তিতে পরিশোধ করিতে ইচ্ছা করেন। টাকার সুদ বাৎসরিক শতকরা 5 চক্রবৃদ্ধি হইলে প্রতি কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর।

13. প্রতি বৎসরান্তে দেয় 30টি সম-বার্ষিক কিস্তিতে 10,000 টাকার একটি ঋণ পরিশোধ করিতে হইবে। বার্ষিক 4% হারে চক্রবৃদ্ধি সহ ঐ ঋণ পরিশোধ করা হইলে প্রত্যেক কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর।

14. এক ব্যক্তি 4000 টাকা এই শর্তে কর্জ করিলেন যে তিনি উহা বার্ষিক 5% হারে চক্রবৃদ্ধি সুদ-সহ 6টি সমান বার্ষিক কিস্তিতে পরিশোধ করিবেন এবং প্রথম কিস্তিটি ঋণ গ্রহণের এক বৎসর অন্তে প্রদান করিবেন। প্রত্যেক কিস্তির মূল্য নির্ণয় কর। [পাঁচ অঙ্কবিশিষ্ট লগ্-তালিকার সাহায্য লও।]

15. 40,000 টাকার 'ওভারড্রাফ্ট্' (overdraft—ব্যাঙ্ক প্রভৃতিতে গচ্ছিত জমার অতিরিক্ত যে পরিমাণ টাকা গ্রহণ করা হইয়াছে) 30 বৎসর ধরিয়া সমবার্ষিক কিস্তিতে পরিশোধ করিতে হইবে। বার্ষিক 4% হারে চক্রবৃদ্ধি সুদ গণনা করিয়া প্রত্যেক কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় কর।

16. যদি টাকার মূল্য বার্ষিক $4\frac{1}{2}\%$ হয়, তবে কত মূল্যে 25 বৎসর মেয়াদী 1800 টাকার বার্ষিক বৃত্তি ক্রয় করা যাইবে ?

17. এক ব্যক্তি 1500 টা. কর্জ করিলেন ও স্বীকার পাইলেন যে উপযুক্ত সুদ সহ উহা দশটি সমান বার্ষিক কিস্তিতে পরিশোধ করিবেন এবং কর্জ গ্রহণের এক বৎসর পরে প্রথম কিস্তিটি দেয় হইবে। চক্রবৃদ্ধির হার বার্ষিক 5% ধরিয়া তাঁহার প্রতিটি বার্ষিক কিস্তিমূল্য নির্ণয় কর। [$(1{\cdot}05)^{10} = 1{\cdot}629$]

18. এক ব্যক্তি এই চুক্তিতে 20,900 টাকা ঋণ করিলেন যে 22টি সমান অর্ধ-বার্ষিক কিস্তিতে উহা পরিশোধ করা হইবে এবং ঋণ গ্রহণের তারিখ হইতে ছয় মাস পরে প্রথম কিস্তি প্রদত্ত হইবে। যদি অর্থ-মূল্য বার্ষিক $3\frac{1}{2}\%$ হয়, তবে তাঁহার প্রত্যেক কিস্তির মূল্য আসন্ন টাকায় নির্ণয় কর। প্রদত্ত থাকে যে $\log 101{\cdot}75 = 2{\cdot}00750$ এবং $\log {\cdot}0068391 = \bar{3}{\cdot}83500$.

19. একটি কোম্পানি 10,000 টাকা এই শর্তে কর্জ করিল যে বার্ষিক 5% হারে চক্রবৃদ্ধি সুদ-সহ উহা 1,000 টাকার বার্ষিক কিস্তিতে পরিশোধ করা হইবে। কত বৎসরে ঋণ পরিশোধ হইবে ?

20. 2,00,000 টাকা মূল্যের একটি যন্ত্র সম্পর্কে এইরূপ সিদ্ধান্ত করা হইল যে 20 বৎসর পরে উহার পরিবর্তে সমমূল্যে একটি নূতন যন্ত্র স্থাপন করা হইবে এবং এই উদ্দেশ্যে লাভের একটি নির্দিষ্ট অংশ প্রতি বৎসর পৃথক ভাবে লগ্নীর দ্বারা একটি অর্থ-তহবিল সৃষ্টি করা হইবে। চক্রবৃদ্ধি সুদের হার 6% হইলে প্রতি বৎসর যে নির্দিষ্ট পরিমাণ অর্থ পৃথক্ করিয়া রাখিতে ও লগ্নী করিতে হইবে তাহা নির্ণয় কর।

21. 25 বৎসর অন্তে 1,00,000 টাকার ঋণপত্র মোচনের জন্য (for the redemption of debentures) এক ঋণ পরিশোধ তহবিল (sinking fund) সৃষ্টি করা হইল। যদি লগ্নী হইতে বার্ষিক 4% হারে চক্রবৃদ্ধি আয় হয়, তবে প্রতি বৎসর লাভ হইতে কত পরিমাণ অর্থ লইয়া ঐ তহবিলে জমা দেওয়া উচিত ?

22. এস. রায় 17,000 টাকা মূল্যের একটি মুদ্রা-যন্ত্র ক্রয় করিতে ইচ্ছুক। তিনি বর্তমানে নগদ 9,000 টাকা এবং অবশিষ্ট টাকা 8টি সমান বার্ষিক কিস্তিতে দিতে প্রস্তুত। সুদ যদি বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি $3\frac{1}{2}\%$ হারে গণনা করা হয়, তবে তিনি প্রতি বৎসর কত টাকা দিবেন ?

23. একটি মাল-টানা গাড়ি (wagon) এইরূপ কিস্তি-ভিত্তিতে ক্রয় করা হইল যে চুক্তিসহির সময় 5000 টাকা দেওয়া হইবে এবং ইহার পর প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, এবং চতুর্থ বৎসরের শেষে প্রতিবার যথাক্রমে 3000 টাকা করিয়া চারিটি বার্ষিক কিস্তিতে অবশিষ্ট টাকা পরিশোধ করিতে হইবে। যদি বার্ষিক 5% হারে চক্রবৃদ্ধি সুদ ধার্য হয়, তবে ফরমাস করার সঙ্গে সঙ্গে দাম পরিশোধ করিলে কত টাকা লাগিত (cash-down price) ?

24. মিত্র মহাশয় কোন এক বৎসরের শুরুতে স্থির করিলেন যে প্রত্যেক বৎসরের শেষে তিনি 4% হারে চক্রবৃদ্ধি সুদ দেয় এইরূপ একটি ব্যাঙ্কে 45·50 টাকা করিয়া জমা দিবেন। যদি প্রদত্ত কিস্তিগুলি এইভাবে সঞ্চিত হইতে থাকে, তাহা হইলে দ্বাদশ বৎসরের শেষে তাঁহার হিসাবে কত টাকা জমা থাকিবে ?

25. বর্তমানে 10,000 টাকা জমা পড়িলে 10 বৎসরের মেয়াদে কি বার্ষিক বৃত্তি দেওয়া যাইবে, যদি এখন হইতে এক বৎসর পরে প্রথম কিস্তি এবং পরের বাৎসরিক কিস্তিগুলি পরবর্তী বৎসরসমূহের প্রত্যেকটির শেষে দেওয়া হয় ? চক্রবৃদ্ধি বার্ষিক 5% হারে ধরিতে হইবে। [টাকার আসন্ন শুদ্ধ মানে উত্তর দিতে হইবে।]

26. এক ব্যক্তি 60 বৎসর বয়সের পর অবসর গ্রহণ করিলেন এবং তাঁহার নিয়োগকর্তা তাঁহার অবশিষ্ট জীবনের জন্য অর্ধ-বার্ষিক কিস্তিতে বাৎসরিক 1200 টাকা করিয়া পেন্‌সন্ বা অবসর-বৃত্তি (pension) মঞ্জুর করিলেন। যদি আশা

করা হয় যে ঐ ব্যক্তি আরও 13 বৎসর বাঁচিবেন এবং যদি ধরা হয় যে চক্রবৃদ্ধি সুদ বার্ষিক 4% হারে প্রতি অর্ধ-বৎসরান্তে দেয়, তবে কি একক মোট অর্থ তাঁহার অবসর-বৃত্তির তুল্য হইবে ?

27. এক পৌর-পরিষদ সরকারের নিকট 50,000 টাকা এই শর্তে ধার করিলেন যে 20 বৎসরে উহা বিনা সুদে শোধ করা হইবে। যদি যথা সময়ে ঐ ঋণ পরিশোধ করিতে হয়, তবে একটি দেনা-পরিশোধ তহবিলে বাৎসরিক কি পরিমাণ টাকা জমা দিতে হইবে, যেখানে চক্রবৃদ্ধির হার বাৎসরিক 4% ?

28. এক লিমিটেড্ কোম্পানি (limited company) 25 বৎসরের শেষে 1,00,000 টাকা মূল্যের সম্পত্তির বিনিময়ে সমমূল্যের নূতন সম্পত্তি প্রাপ্ত হইবার উদ্দেশ্যে একটি অবচয়-তহবিল (depreciation fund) সৃষ্টি করিতে ইচ্ছুক। যদি সুদের হার 3% হয়, তবে মুনাফা হইতে প্রতি বৎসর কি পরিমাণ অর্থ ঐ তহবিলে জমা দিতে হইবে তাহা নির্ণয় কর।

29. এক ব্যক্তি তাঁহার ব্যাঙ্ক হিসাবে নির্দিষ্ট পরিমাণ অর্থ গচ্ছিত রাখিয়া বিশ্ববিদ্যালয়ের নিকট উহা 1লা জুলাই, 1969 তারিখে এই শর্তে দান করিবার প্রস্তাব দিলেন যে (*i*) উহা হইতে প্রতি বৎসর 1,000 টাকার একটি বৃত্তি (scholarship) 10 বৎসর যাবৎ প্রদান করিতে হইবে এবং (*ii*) 20 বৎসর যাবৎ প্রতি বৎসর 500 টাকা মূল্যের পুস্তক পুরস্কার প্রদান করিতে হইবে। বার্ষিক 5% হারে চক্রবৃদ্ধি-সহ প্রদত্ত অর্থ এইভাবে উক্ত কুড়ি বৎসরের শেষে ফুরাইয়া যাইবে। চুক্তিমত বৃত্তি এবং পুরস্কার 1970 সাল হইতে শুরু করিয়া প্রতি বৎসরই 1লা জুলাই প্রদত্ত হইবে ইহা ধরিয়া লইয়া 1লা জুলাই, 1969 তারিখে কথিত উদ্দেশ্যে কত টাকা দান করার প্রয়োজন হইয়াছিল তাহা নির্ণয় কর।

30. এক কোম্পানির একটি যন্ত্র ক্রয় করিতে 97,000 টাকা লাগিল এবং যন্ত্রটির কার্যকরী জীবন 12 বৎসর বলিয়া নিরূপিত হইল। যথাসময়ে যন্ত্রটির লোহালক্কড় (scrap) হইতে যদি মাত্র 2000 টাকা পাওয়ার আশা থাকে, তবে যন্ত্রটির প্রতিস্থাপনের জন্য এখন হইতে প্রতি বৎসরের শেষে কি পরিমাণ অর্থ মুনাফা হইতে পৃথক্ করিয়া জমা রাখিতে হইবে, যখন চক্রবৃদ্ধির হার বার্ষিক 5% ?

31. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধির হারে প্রতিবৎসর কত টাকা করিয়া 20 বৎসর যাবৎ লগ্নী করিলে কাঠামো সহ কোন একটি যন্ত্র প্রতিস্থাপন করা যাইবে, যখন উহার মূল্য বর্তমান মূল্য 60,000 টাকা অপেক্ষা 25% অধিক হইবে বলিয়া অনুমান করা হইতেছে ?

32. 1,00,000 টাকার একটি ঋণপত্র মোচনের জন্য 25 বৎসর ধরিয়া প্রতি বৎসরান্তে সমপরিমাণ কোন অর্থ পৃথক্ করিয়া রাখা হইয়াছে। যদি বার্ষিক 2% চক্রবৃদ্ধির হারে ঐ অর্থ সঞ্চিত হইয়া থাকে তবে ঐ বাৎসরিক কিস্তির মূল্য আসন্ন টাকায় নির্ণয় কর। $S_{\overline{25}|.02}$ সূত্র প্রয়োগ কর। (অর্থাৎ প্রতি বৎসর অর্থের বার্ষিক বৃত্তির 2% বার্ষিক হারে 25 বৎসরের মোট অঙ্ক $=32{\cdot}03030$; এখন প্রমাণ কর যে প্রতি বৎসর 2% চক্রবৃদ্ধির হারে লগ্নীভূত একক অর্থের 25 বৎসরের সমূল চক্রবৃদ্ধি 1·640606 হইবে।)।

33. এক ব্যক্তি 6% চক্রবৃদ্ধির হারে 20,000 টাকা কর্জ করিলেন এবং স্বীকৃত হইলেন যে তিনি আসল ও সুদের পরিমাণ হ্রাসের উদ্দেশ্য প্রথম চারি বৎসরের প্রত্যেক বৎসরের শেষে 5000 টাকা হিসাবে দিবেন এবং অবশিষ্ট অর্থ পঞ্চম বৎসর অন্তে দিবেন। তাঁহার শেষ কিস্তির পরিমাণ আসন্ন টাকায় নির্ণয় কর।

34. এক ব্যক্তি বিশ্ববিদ্যালয়কে 1লা জুলাই, 1969 তারিখে অর্থদান করিবার উদ্দেশ্যে তাঁহার ব্যাঙ্কের হিসাবে 40,000 টাকা জমা দিলেন এবং শর্ত দিলেন যে 1970 সাল হইতে শুরু করিয়া প্রতি বৎসর 1লা জুলাই 1500 টাকার একটি বার্ষিক বৃত্তি প্রদান করিতে হইবে। ব্যাঙ্ক বার্ষিক শতকরা কি হারে চক্রবৃদ্ধি প্রদান করিবে ?

35. বার্ষিক 4% হারে চক্রবৃদ্ধি পাইতে হইলে কোন শুল্কহীন সম্পত্তির জন্য কত বৎসরের বর্ষ গুণকের মূল্য প্রদান করা উচিত ?

36. কোন সম্পত্তি যত বৎসরের বর্ষ-গুণকের মূল্যের, তাহা হইল $13\frac{1}{2}$; সুদ যদি বার্ষিক 5% হারে চক্রবৃদ্ধি গণনা করা হয় তবে ইজারার মেয়াদ (আসন্ন বৎসরে) নির্ণয় কর।

37. বার্ষিক $2\frac{3}{4}$% চক্রবৃদ্ধির হারে 5,500 টাকা লগ্নী করিয়া কত টাকার চিরস্থায়ী কিস্তি ক্রয় করা যাইবে ?

38. বার্ষিক $2\frac{1}{2}$% সুদের হার হইলে 500 টাকার চিরস্থায়ী কিস্তির মূল্য কত ?

39. 800 টাকার যে চিরস্থায়ী কিস্তির প্রথম কিস্তি 6 বৎসরে পরে প্রদত্ত হইবে, তাহার বর্তমান মূল্য নির্ণয় কর, যদি চক্রবৃদ্ধি সুদ বার্ষিক শতকরা 4 টাকা হারে গণনা করা হয়।

40. একটি শুল্কহীন সম্পত্তির মূল্য ছিল 2,00,000 টাকা। বার্ষিক 4% হারে চক্রবৃদ্ধি ধরিয়া উহার বাৎসরিক খাজনা নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

1. টা. 1,19,320. **2.** টা. 19,975 **5.** টা. 3,137·11

4. টা. 35,241/29 প. (প্রায়) **5.** টা. 12,637/80 প. ; টা. 60,000

6. টা. 3,862 **7.** টা. 2,190/29 প. ; টা. 1449/50 প.

8. টা. 3,041/25 প. **9.** টা. 29,344/80 প.

10. (i) টা. 1,134/86 প. (প্রায়) (ii) 4,500 **11.** টা. 5,560

12. টা. 800 **13.** টা. 578·90 **14.** টা. 788·05 (প্রায়)

15. টা. 2,313/44 প. (প্রায়) **16** টা. 26,676 (প্রায়) **17.** টা. 194/24 প. (প্রায়)

18. টা. 1,157 (প্রায়) **19.** 14.2 বৎসর (প্রায়) **20.** টা. 5,439/71 প. (প্রায়)

21. টা. 2,408 **22.** টা. 1,167 (প্রায়) **23.** টা. 15,644

24. টা. 682/50 প. **25.** টা. 1,295 **26.** টা. 12,075

27. টা. 1,684 (প্রায়) **28.** টা. 2,755 (প্রায়) **29.** টা. 13,957

30. টা. 5,960 **31.** টা. 2,266 **32.** টা. 3,123

33. টা. 3,580 **34.** $3\frac{3}{4}\%$ *p. a.* **35.** 25

36. 29 **37.** টা. 151 **38.** টা. 20,000 **39.** টা. 16,440

40. টা. 8,000

12

সূচক শ্রেণী ও লগারিদ্‌মিক্ শ্রেণীর প্রয়োগ

(USE OF EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC SERIES)

12·1. সূচনা

অষ্টম অধ্যায়ে অসীম দ্বিপদ শ্রেণীর সহিত পরিচয় হইয়াছে এবং উহাদের কতিপয় প্রয়োগও প্রদর্শিত হইয়াছে। আরও দুইটি গুরুত্বপূর্ণ অসীম শ্রেণী আছে—উহারা সূচক শ্রেণী ও লগারিদ্‌মিক্ শ্রেণী। বর্তমান অধ্যায়ে সূচক উপপাদ্য এবং লগারিদ্‌মিক শ্রেণী কি তাহা যথাযথ বিবৃত করা হইবে। কিন্তু উহাদের রীতিসিদ্ধ প্রমাণ দেওয়া হইবে না, কেবল উহাদের প্রয়োগসমূহ বিবেচনা করা হইবে। আলোচনার সুবিধার জন্য অধ্যায়টিকে দুইটি বিভাগে ভাগ করা হইল—A বিভাগে সূচক শ্রেণী এবং B বিভাগে লগারিদ্‌মিক্ শ্রেণীর কথা বলা হইল।

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে সাধারণ লগারিদ্‌ম্ (অর্থাৎ নিধান 10 সম্পর্কে লগারিদ্‌ম্) এর বিষয় আলোচনা করা হইয়াছে। কিন্তু উচ্চতর সকল গণিতে নিধান e (ইহার সংজ্ঞা নিম্নে দ্রষ্টব্য) সম্পর্কে লগারিদ্‌মের হিসাব করা হয়। e কে নিধান ধরিয়া যে লগারিদ্‌মিক্ হিসাব পাওয়া যায় তাহাকে **স্বাভাবিক লগারিদ্‌ম্ (Natural logarithms)** বলে। এই অধ্যায়ের অবশিষ্ট অংশে অন্যরূপ উল্লিখিত না হইলে স্বাভাবিক লগারিদ্‌ম্‌ই প্রয়োগ করা হইয়াছে বুঝিতে হইবে।

বিভাগ A—সূচক শ্রেণী

12·2. সূচক উপপাদ্য (The Exponential Theorem) : বিবরণ

1. অসীম শ্রেণী, যথা :

$$1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots+\frac{1}{\lfloor r}+\cdots$$

হইল **অভিসারী (convergent)** এবং ইহার সমষ্টিকে e দ্বারা নির্দেশ করা হয়। সুতরাং সংজ্ঞা অনুসারে

$$e=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots+\frac{1}{\lfloor r}+\cdots$$

e এর নিম্নলিখিত ধর্মগুলি আশু প্রমাণ করা হইবে :

(i) e মূলদ (rational) সংখ্যা নহে ;

(ii) $2<e<3$;

(iii) ছয় দশমিক স্থান পর্যন্ত e এর শুদ্ধ আসন্ন মান হইল 2·718282.

2. সূচক শ্রেণী (Exponential series)

x এর সকল বাস্তব মানের জন্য নিম্নের অসীম শ্রেণী, যথা :

$$1+\frac{x}{\lfloor 1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots+\frac{x^r}{\lfloor r}+\cdots \qquad \cdots (1)$$

হইল **অভিসারী** এবং ইহার **সমষ্টিকে** (**অসীম পদের সমষ্টি** বলিয়াও কথিত) e^x দ্বারা নির্দেশ করা হয়। তাহা হইলে লেখা যায় যে

$$e^x=1+\frac{x}{\lfloor 1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots+\frac{x^r}{\lfloor r}+\cdots (x\text{এর সকল বাস্তব মানের জন্য})$$

লব্ধ ফলটিকে **সূচক উপপাদ্য** বলা হয় এবং **(1)** নির্দেশিত অসীম শ্রেণী **সূচক শ্রেণী** বলিয়া কথিত হয়।

বিকল্প রূপ। যদি $\log_e a=m$ হয়, যেখানে a ধনাত্মক, তবে $a=e^m$;

$$\therefore\quad a^x=e^{mx}=1+mx+\frac{m^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{m^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots+\frac{m^rx^r}{\lfloor r}+\cdots$$

$$=1+x\log_e a+\frac{x^2}{\lfloor 2}(\log_e a)^2+\frac{x^3}{\lfloor 3}(\log_e a)^3+\cdots$$

$$+\frac{x^r}{\lfloor r}(\log_e a)^r+\cdots$$

সুতরাং, ইহা বিবৃত করা যায় যে,

x এর সকল বাস্তব মানের জন্য এবং $a>0$ হইলে অসীম শ্রেণী, যথা :

$$1+x\log_e a+\frac{x^2}{\lfloor 2}(\log_e a)^2+\frac{x^3}{\lfloor 3}(\log_e a)^3+\cdots+\frac{x^r}{\lfloor r}(\log_e a)^r+\cdots$$

হইল **অভিসারী** এবং ইহার সমষ্টি (বা অসীম পদের সমষ্টি) হইল a^x ; সুতরাং

$$a^x=1+x\log_e a+\frac{x^2}{\lfloor 2}(\log_e a)^2+\cdots+\frac{x^r}{\lfloor r}(\log_e a)^r+\cdots \qquad \cdots (2)$$

(x এর সকল বাস্তব মানের জন্য এবং $a>0$)

ইহাও **সূচক উপপাদ্য** বলিয়া কথিত হয়।

এস্থলে ইহা লক্ষ্য করিতে হইবে যে উপপাদ্যটির দুইটি আকারের যে কোন একটিকে অপরটি হইতে নির্ণয় করা যায়।

ভবিষ্যৎ প্রসঙ্গের পক্ষে প্রয়োজনীয় ফলসমূহ (Results)

1. $e^x=1+\frac{x}{\underline{|1}}+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots+\frac{x^r}{\underline{|r}}+\cdots$

2. $e^{-x}=1-\frac{x}{\underline{|1}}+\frac{x^2}{\underline{|2}}-\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots+(-1)^r\frac{x^r}{\underline{|r}}+\cdots$

3. $e=1+\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots+\frac{1}{\underline{|r}}+\cdots$

4. $e^{-1}=1-\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}-\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots+(-1)^r\frac{1}{\underline{|r}}+\cdots$

5. $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=1+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}+\cdots+\frac{x^{2r}}{\underline{|2r}}+\cdots$

6. $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=x+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^5}{\underline{|5}}+\cdots+\frac{x^{2r+1}}{\underline{|2r+1}}+\cdots$

7. $\frac{1}{2}(e+e^{-1})=1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots+\frac{1}{\underline{|2r}}+\cdots$

8. $\frac{1}{2}(e-e^{-1})=1+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|5}}+\cdots+\frac{1}{\underline{|2r+1}}+\cdots$

নিম্নের বিবৃতিটির তাৎপর্য ঃ

"$1+\frac{x}{\underline{|1}}+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\cdots+\frac{x^r}{\underline{|r}}+\cdots$ এই শ্রেণীর অসীম পদের সমষ্টি হইল e^x"

বিবৃতিটির অর্থ হইল এই যে,

যদি S_n = অসীম শ্রেণীটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি হয়, তবে যখন $n\to\infty$ তখন S_n এর সীমাস্থ মান হইল এই শ্রেণীটির অসীম পদের সমষ্টি।

তদনুসারে, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\cdots+\frac{1}{\underline{|n}}\right)=e.$

লক্ষ্য কর, ইহাও সত্য যে

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\cdots+\frac{1}{\underline{|n-1}}\right)=e$$

বা, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\cdots+\frac{1}{\underline{|n-2}}\right)=e$, ইত্যাদি, ইত্যাদি।

12·3. প্রয়োগসমূহ

উদা. 1. ছয় দশমিক স্থান পর্যন্ত e এর আসন্ন শুদ্ধ মান নির্ণয় কর।

$$e=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\begin{aligned}
1+1 &= 2\cdot000\ 000\ 0\\
1/2\,! &= 0\cdot500\ 000\ 0\\
1/3\,! &= 0\cdot166\ 666\ 7\\
1/4\,! &= 0\cdot041\ 666\ 7\\
1/5\,! &= 0\cdot008\ 333\ 3\\
1/6\,! &= 0\cdot001\ 388\ 9\\
1/7\,! &= 0\cdot000\ 198\ 4\\
1/8\,! &= 0\cdot000\ 024\ 8\\
1/9\,! &= 0\cdot000\ 002\ 8\\
\hline
&= 2\cdot718\ 281\ 6
\end{aligned}$$

$\therefore\ e \simeq 2\cdot718282$ (ছয় দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান)।

উদা. 2. প্রমাণ কর যে e মূলদ সংখ্যা নহে।

সংজ্ঞা অনুসারে,

$$e=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots+\frac{1}{\lfloor n}+\cdots \quad \cdots$$

স্পষ্টত e ধনাত্মক। প্রমাণ করিতে হইবে e মূলদ সংখ্যা হইতে পারে না। সম্ভব হইলে ধরা যাক $e=p/q$, যেখানে p এবং q হইল দুইটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। তাহা হইলে,

$$\frac{p}{q}=\left\{1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\cdots+\frac{1}{\lfloor q}\right\}+\left\{\frac{1}{\lfloor q+1}+\frac{1}{\lfloor q+2}+\frac{1}{\lfloor q+3}+\cdots\cdots\right\}$$

উভয় পক্ষকে $\lfloor q$ দ্বারা গুণ করিলে লেখা যায়

$$\frac{p}{q}\cdot\lfloor q-\left\{1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\lfloor q}\right\}\cdot\lfloor q$$

$$=\lfloor q\left\{\frac{1}{\lfloor q+1}+\frac{1}{\lfloor q+2}+\frac{1}{\lfloor q+3}+\cdots \quad \cdots\right\} \cdots (1)$$

(1) এর বামপক্ষ $=p\ \lfloor q-1-\{\lfloor q+\lfloor q+q(q-1)\cdots 3+\cdots \cdots+1\}$

$=$ দুইটি অখণ্ড সংখ্যার অন্তর, সুতরাং ইহা একটি অখণ্ড সংখ্যা।

(1) এর ডানপক্ষ $=\dfrac{1}{q+1}+\dfrac{1}{(q+2)(q+1)}+\dfrac{1}{(q+3)(q+2)(q+1)}+\cdots\cdots$

$=F$ (মনে করা যাক্)

স্পষ্টত $F>\frac{1}{q+1}$ ($\because$ অপর পদগুলি ধনাত্মক এবং উহাদের লওয়া হয় নাই)

আবার $F<\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\frac{1}{(q+1)^3}+\cdots\cdots$

$\Big[\because (q+2)>(q+1),\ \therefore \frac{1}{q+2}<\frac{1}{q+1},$

সুতরাং $\frac{1}{(q+2)(q+1)}<\frac{1}{(q+1)^2}$; ইত্যাদি $\Big]$

এখন $$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\frac{1}{(q+1)^3}+\cdots\ \cdots=\frac{\frac{1}{q+1}}{1-\frac{1}{q+1}}=\frac{1}{q}$$

[$\because$ ইহা একটি অসীম গুণোত্তর প্রগতি, যাহার সাধারণ অনুপাত $1/(q+1)<1$.]

সুতরাং প্রমাণিত হইল যে $\frac{1}{q+1}<F<\frac{1}{q}$.

যেহেতু q ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা, সুতরাং F একটি ধনাত্মক প্রকৃত ভগ্নাংশ। তাহা হইলে দেখা গেল যে (1) এর বাম পক্ষ একটি পূর্ণ সংখ্যা, কিন্তু ডান পক্ষ একটি ধনাত্মক প্রকৃত ভগ্নাংশ ; অতএব **ইহারা সমান হইতে পারে না।**

সুতরাং $e=p/q$, এই অনুমান যুক্তিসিদ্ধ নহে ;

অর্থাৎ e মূলদ সংখ্যা হইতে পারে না।

উদা. 3. $\frac{1-3x+x^2}{e^x}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর।

$$\frac{1-3x+x^2}{e^x}=(1-3x+x^2)e^{-x}$$

$$=(1-3x+x^2)\left(1-x+\frac{x^2}{\lfloor 2}-\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{x^n}{\lfloor n}+\cdots\right)$$

$\therefore$ $x^n (n>1)$ এর সহগ

$=1\times e^{-x}$এ x^nএর সহগ $-\,3\times e^{-x}$এ x^{n-1}এর সহগ $+\,1\times e^{-x}$এ x^{n-2}এর সহগ

$$=(-1)^n\frac{1}{\lfloor n}-3\times(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\lfloor n-1}+(-1)^{n-2}\cdot\frac{1}{\lfloor n-2}$$

$$=\frac{(-1)^n}{\lfloor n}\{1+3n+n(n-1)\}=(-1)^n\cdot\frac{(n+1)^2}{\lfloor n}.$$

$n=0$, $n=1$ এর ক্ষেত্রেও ইহা সত্য, কারণ প্রথম পদ দুইটি $1-4x$.

উদা. 4. অসীম পদ পর্যন্ত নিম্নের শ্রেণীটির সমষ্টি নির্ণয় কর :

$$1+\frac{3}{1!}+\frac{5}{2!}+\frac{7}{3!}+\frac{9}{4!}+\cdots\ \cdots\ \cdots$$

শ্রেণীটির nতম পদ

$$=\frac{2n-1}{\lfloor n-1}=\frac{2n-2+1}{\lfloor n-1}=\frac{2}{\lfloor n-2}+\frac{1}{\lfloor n-1}, \text{ যখন } n>2$$

পর্যবেক্ষণ দ্বারা, প্রথম পদ $=0+1$

$$\text{দ্বিতীয় পদ}=2+\frac{1}{1!}$$

সূত্রটি হইতে, তৃতীয় পদ $=\frac{2}{1!}+\frac{1}{2!}$

$$\text{চতুর্থ পদ}=\frac{2}{2!}+\frac{1}{3!}$$

$$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$

$$n\text{তম পদ}=\frac{2}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}$$

$$\therefore\quad n \text{ সংখ্যক পদের সমষ্টি}=2\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-2)!}\right]$$
$$+\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\right]$$

সুতরাং যখন $n\to\infty$, অসীম পদ পর্যন্ত সমষ্টি $=2e+e=3e$.

উদা. 5. অসীম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর :

$$\frac{2^2+1}{2!}+\frac{2(3^2+1)}{3!}+\frac{3(4^2+1)}{4!}+\cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$n\text{তম পদ}=\frac{n\{(n+1)^2+1\}}{(n+1)!}=\frac{n(n+1)(n+1)}{(n+1)!}+\frac{n}{(n+1)!}$$

$$=\frac{(n+1)n\{(n-1)+2\}}{(n+1)!}+\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}$$

$$=\frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!}+\frac{2(n+1)n}{(n+1)!}+\frac{(n+1)}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{2}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!},\quad n>2$$

পর্যবেক্ষণ দ্বারা, 1ম পদ $=0+2+\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}$

$$2\text{য় পদ}=1+\frac{2}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}$$

সূত্রটি হইতে, 3য় পদ $=\frac{1}{1!}+\frac{2}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$n\text{তম পদ}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{2}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

$\therefore$ n সংখ্যক পদের সমষ্টি $=\left\{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-2)!}\right\}$

$$+2\left\{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\right\}$$

$$+\left\{\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}\right\}$$

কিন্তু যখন $n\to\infty$, তখন অসীম পদ পর্যন্ত সমষ্টি

$$=e+2e+(e-1)-\left(e-1-\frac{1}{\underline{|1}}\right)$$

$$=3e+1.$$

প্রশ্নমালা XII (A)

[A]

1. সেই শ্রেণীগুলি লিখ যাহাদের অসীম পদ পর্যন্ত সমষ্টিগুলি হইল :

(i) $e+e^{-1}$; (ii) $(e-e^{-1})^2$; (iii) e^2 ; (iv) $\frac{1}{e^2}$.

2. $\sqrt{e}$ এর 5 দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান নির্ণয় কর।

3. নিম্নলিখিত রাশিগুলির বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর :

(i) $\dfrac{a^2+2abx+b^2x^2}{e^{2x}}$; (ii) $\sqrt{\left(\dfrac{x^2-4x+4}{e^x}\right)}$,

(iii) e^{2x+5} ; (iv) $\dfrac{x^2-3x+1}{e^x}$.

4. নিম্নের রাশিটিকে e এর সাহায্যে প্রকাশ কর :

$$\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots\ \cdots\right)\div\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots\ \cdots\right)$$

5. নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির অসীম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর :

(i) $\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots\ \cdots$; (ii) $3+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\cdots\ \cdots$;

(iii) $\frac{1}{1!}+\frac{1+2}{2!}+\frac{1+2+3}{3!}+\cdots\ \cdots$; (iv) $\frac{1}{3!}+\frac{2}{5!}+\frac{3}{7!}+\cdots\ \cdots$;

(v) $1-\frac{4}{2!}+\frac{4^2}{3!}-\frac{4^3}{4!}+\cdots\ \cdots$; (vi) $1+\frac{2}{1!}+\frac{3}{2!}+\frac{4}{3!}+\cdots$;

(vii) $\frac{1}{1!}+\frac{1+2}{2!}+\frac{1+2+2^2}{3!}+\cdots$; (viii) $1+\frac{2^3}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\cdots\ \cdots$;

(ix) $\frac{2\cdot5}{1!}+\frac{3\cdot7}{2!}+\frac{4\cdot9}{3!}+\cdots\ \cdots$; (x) $\frac{1^2}{3!}+\frac{2^2}{5!}+\frac{3^2}{7!}+\cdots\ \cdots$;

6. $(e^x-1)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^n এবং x^{n+1} এর সহগ নির্ণয় কর।

7. নিম্নের শ্রেণীটির অন্তর্গত x^n এর সহগ নির্ণয় কর :

$$\frac{x+1}{1!}+\frac{(x+1)^2}{2!}+\frac{(x+1)^3}{3!}+\cdots\ \cdots$$

8. প্রমাণ কর যে

$$\left(\frac{2}{\lfloor 1}+\frac{4}{\lfloor 3}+\frac{6}{\lfloor 5}+\frac{8}{\lfloor 7}+\cdots\ \cdots\right)\left(\frac{2}{\lfloor 3}+\frac{4}{\lfloor 5}+\frac{6}{\lfloor 7}+\frac{8}{\lfloor 9}+\cdots\ \cdots\right)=1.$$

9. $\frac{e^{5x}+e^x}{e^{3x}}$ কে x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমে সজ্জিত শ্রেণীতে বিস্তৃত কর।

[B]

1. প্রমাণ কর যে

$$2e+2=\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{6}{\lfloor 2}+\frac{13}{\lfloor 3}+\frac{22}{\lfloor 4}+\frac{33}{\lfloor 5}+\cdots\ \cdots$$

2. দেখাও যে

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2+\frac{3+5}{\lfloor 1}+\frac{3^2+5^2}{\lfloor 2}+\cdots}{1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots}=1+\frac{4}{\lfloor 1}+\frac{4^2}{\lfloor 2}+\cdots\ \cdots$$

3. প্রমাণ কর যে $\frac{1}{e}=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{1.2.3.5}+\frac{1}{1.2.3.4.5.7}+\cdots\cdots$

4. প্রমাণ কর যে

(i) $$\frac{e-1}{e+1}=\frac{\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots\cdots}{\frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots\cdots}$$

(ii) $$\frac{e^2+1}{e^2-1}=\frac{1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots\cdots}{1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\cdots\cdots}$$

5. n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে $(e^x-1)^n$ কে দুই প্রকারে বিস্তৃত করিয়া এবং x^n এর সহগ দুইটিকে সমতাচিহ্ন দ্বারা যুক্ত করিয়া প্রমাণ কর যে

$$n^n-n(n-1)^n+\frac{n(n-1)}{2!}(n-2)^n-\cdots\cdots\cdots n\text{তম পদ পর্যন্ত}=n!$$

6. $\frac{e^x}{1-x}$ এর x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমে সজ্জিত শ্রেণীতে x^r এর সহগ যদি U_r হয় তবে প্রমাণ কর যে

$$U_r-U_{r-1}=\frac{1}{r!}$$

ইহা হইতে U_r এর মান নির্ণয় কর।

7. দেখাও যে $x=1+\log_e x+\frac{1}{2!}(\log_e x)^2+\frac{1}{3!}(\log_e x)^3+\cdots\cdots$

8. অসীম পদ পর্যন্ত নিম্নলিখিত সমষ্টিগুলি নির্ণয় কর :

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+3n}{n!}=\frac{4}{1!}+\frac{10}{2!}+\frac{18}{3!}+\frac{28}{4!}+\cdots\cdots$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{n!}=\frac{1.2}{1!}+\frac{2.3}{2!}+\frac{3.4}{3!}+\cdots\cdots$$

(iii) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}=1+\frac{2^3}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{4^3}{4!}+\cdots\cdots$$

(iv) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5.\cdots(2n-1)}{(2n)!}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1.3}{4!}+\frac{1.3.5}{6!}+\cdots\cdots$$

উত্তরমালা

[A]

1. (i) $2+\frac{2}{2!}+\frac{2}{4!}+\frac{2}{6!}+\cdots\cdots$;

(ii) $2\left[\frac{2}{\lfloor 2}+\frac{2^4}{\lfloor 4}+\frac{2^6}{\lfloor 6}+\frac{2^8}{\lfloor 8}+\cdots\cdots\right]$;

(iii) $1+\frac{2}{\lfloor 1}+\frac{2^2}{\lfloor 2}+\frac{2^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$;

(iv) $1-\frac{2}{\lfloor 1}+\frac{2^2}{\lfloor 2}-\frac{2^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$;

2. 1·64872.

3. (i) $(-2)^{n-2}\{4a^2-4nab+(n-1)nb^2\}\div n!$

(ii) k, যদি $x>2$, $-k$, যদি $x<2$ হয়; যেখানে $k=(-\frac{1}{2})^{n-1}\frac{n+1}{n!}$;

(iii) $\frac{2^n}{\lfloor n}e^5$;

(iv) $(-1)^n\frac{(n+1)^2}{n!}$.

4. $\frac{e-1}{e+1}$.

5. (i) $\frac{1}{e}$; (ii) e^3-1; (iii) $\frac{3e}{2}$; (iv) $\frac{1}{2e}$

(v) $\frac{1}{4}(1-e^{-4})$; (vi) $2e$; (vii) e^2-e; (viii) $5e$; (ix) $12e-3$;

(x) $\frac{e^2-3}{8e}$.

6. 1; $\frac{1}{2}n$.

7. $\frac{e}{r!}$.

9. $2\{1+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+\cdots+\frac{(2x)^{2r}}{(2r)!}+\cdots\}$

[B]

6. $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{r!}$.

8. (i) $5e$; (ii) $3e$; (iii) $5e$; (iv) $\sqrt{e}$.

বিভাগ B—লগারিদ্‌মিক্ শ্রেণী

12·4. লগারিদ্‌মিক্ শ্রেণী

যদি $-1<x\leqslant 1$ হয়, তবে নিম্নের অসীম শ্রেণীটি, যথা :

$$x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\cdots\;\cdots\;\cdots+(-1)^{r-1}\frac{x^r}{r}+\;\cdots\qquad\cdots\qquad(1)$$

হইল **অভিসারী** এবং অসীম পদ পর্যন্ত ইহার সমষ্টি হইল $\log_e(1+x)$.

সুতরাং ইহা লিখিতে পারা যায় যে

$$\log_e(1+x)=x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{r-1}\frac{x^r}{r}+\;\cdots\;\cdots\;(2)$$

(যেখানে $-1<x\leqslant 1$)

অর্থাৎ ইহাই হইল $\log_e(1+x)$ এর x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমে সজ্জিত বিস্তৃতি এবং ইহাই লগারিদ্‌মিক্ শ্রেণী বলিয়া পরিচিত।

প্রয়োজনীয় বিশেষ ক্ষেত্রসমূহ

(*i*) $x=1$ হইলে **(2)** হইতে পাওয়া যায় যে

$$\log_e 2=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\cdots\;\cdots+\frac{(-1)^{r-1}}{r}+\cdots\;\cdots$$

(*ii*) **(2)**এ x এর পরিবর্তে $-x$ লিখিয়া পাওয়া যায় যে

$$\log_e(1-x)=-x-\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{3}x^3-\;\cdots\;\cdots-\frac{x^r}{r}\quad\cdots\quad\cdots\qquad(3)$$

(যেখানে $-1\leqslant x<1$).

(*iii*) ইহা জানা আছে যে দুইটি অভিসারী শ্রেণীর মধ্যে যোগ অথবা বিয়োগ কার্য করা যায়। এখন **(2)** হইতে **(3)** বিয়োগ করিয়া পাওয়া যায় যে

$$\log_e(1+x)-\log_e(1-x)=2\left[x+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5+\;\cdots\;+\frac{x^{2r-1}}{2r-1}+\cdots\right],$$

(যেখানে $-1<x<1$)

অর্থাৎ, $$\tfrac{1}{2}\log_e\frac{1+x}{1-x}=x+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5+\cdots\;\cdots+\frac{1}{2r-1}x^{2r-1}+\cdots(4)$$

(যেখানে $-1<x<1$).

(*iv*) **(4)** এর দুইটি গুরুত্বপূর্ণ বিকল্প আকার আছে, যথা :

(A) ধরা যাক, $\dfrac{1+x}{1-x}=m$, সুতরাং $x=\dfrac{m-1}{m+1}$;

তাহা হইলে $-1<x<1$ এর অনুরূপ সর্ত হইল $m>0$,

$$\therefore \tfrac{1}{2}\log_e m=\frac{m-1}{m+1}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^5+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{2r-1}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^{2r-1}+\cdots\cdots \quad \textbf{(5)}, \text{(যেখানে } m>0)$$

(B) ধরা যাক্, $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{m+1}{m}$, সুতরাং $x=\dfrac{1}{2m+1}$;

তাহা হইলে $-1<x<1$ এর অনুরূপ শর্ত হইল $m>0$.

$$\therefore \log_e(m+1)-\log_e m=2\left[\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2m+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2m+1}\right)^5+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2r-1}\left(\frac{1}{2m-1}\right)^{2r-1}+\cdots\ \cdots\right]\ \cdots\quad \textbf{(6)}$$

12·5. প্রয়োগসমূহ

উদা. 1. $\log_e 2$ এর 5 দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান নির্ণয় কর।

কোন সংখ্যার **স্বাভাবিক** লগারিদ্‌ম্ নির্ণয়ে নিম্নের সম্পর্কটি অপেক্ষাকৃত অধিক সুবিধাজনক, যথা :

$$\frac{1}{2}\log_e m=\frac{m-1}{m+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^5+\cdots\cdots$$

এখানে $m=2$ লিখিয়া পাওয়া যায়

$$\log_e 2=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7+\cdots\cdots\right]$$

$$\frac{1}{3}=0{\cdot}333\ 333\ 3$$
$$\frac{1}{3^3}=0{\cdot}0370370\ ;\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}=0{\cdot}012\ 345\ 7$$
$$\frac{1}{3^5}=0{\cdot}0041152\ ;\ \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}=0{\cdot}000\ 823\ 0$$
$$\frac{1}{3^7}=0{\cdot}0004572\ ;\ \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}=0{\cdot}000\ 065\ 3$$
$$\frac{1}{3^9}=0{\cdot}0000508\ ;\ \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}=0{\cdot}000\ 005\ 6$$
$$\frac{1}{3^{11}}=0{\cdot}0000056\ ;\ \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}=0{\cdot}000\ 000\ 5$$

$\therefore$ প্রথম 6টি পদের সমষ্টি $=2\times0{\cdot}\ 3465734$

$=0{\cdot}6931468$

$\therefore \log_e 2=0{\cdot}69315$ (পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ)

উদা. 2. $\log_e 10$ এর 5 দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান নির্ণয় কর।

$\frac{1}{2}\log_e m=\frac{m-1}{m+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^5+\cdots\cdots$, এই সম্পর্কে

$m=\frac{10}{8}$ বা $\frac{5}{4}$ ধরা হইল। তাহা হইলে $\frac{m-1}{m+1}=\frac{1}{9}$

$$\therefore \log_e 10-\log_e 8=2\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5+\cdots\cdots\right]$$

$$=2\times 0\cdot 1115718=0\cdot 2231436.$$

[উদা. 1. এর ন্যায় এই হিসাবটি করিবে।]

$$\therefore \log_e 10=3\log_e 2+0\cdot 2231436$$
$$=3\times 0\cdot 6931468+0\cdot 2231436$$
$$=2\cdot 0794404+0\cdot 2231436=\mathbf{2\cdot 3025840}$$

$\therefore \log_e 10\simeq 2\cdot 30258$ (5 দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ)।

উদা. 3. সাধারণ লগারিদম্

যদি $\log_{10}N=x$ হয়, তবে $N=10^x$;
তাহা হইলে, $\log_e N=\log_e 10^x=x\log_e 10.$

সুতরাং $x=\log_{10}N=\frac{\log_e N}{\log_e 10}$; এইভাবে কোন সংখ্যার সাধারণ লগারিদম্ (অর্থাৎ নিধান 10 সম্পর্কে লগারিদম্) পাওয়া যায়, অনুরূপ স্বাভাবিক লগারিদম্‌কে $1/\log_e 10$ (ইহা সাধারণ লগারিদম্ এর **মডিউলাস** বলিয়া কথিত এবং μ অক্ষর দ্বারা নির্দেশিত হয়) দ্বারা গুণ করিয়া। ইহা যাচাই করিয়া দেখা যাইতে পারে যে

$$\mu=\frac{1}{\log_e 10}=0\cdot 4342944819\quad\cdots\quad\cdots$$

$\log_{10}2$ এর মান নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমতঃ $\log_e 2$ এর মান নির্ণয় করা হয় ও পরে ঐ মানকে μ দ্বারা গুণ করিতে হয়।

$$\therefore \log_{10}2=\log_e 2\times\mu=0\cdot 6931468\times 0\cdot 43429448$$
$$=0\cdot 3010297736\quad\cdots\quad\cdots$$
$$\simeq 0\cdot 30103 \text{ (5 দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান)।}$$

উদা. 4. প্রমাণ কর যে

$$\log_e n-\log_e(n-1)=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\cdots\quad\cdots\quad(n>1).$$

ইহা হইতে $\log_{10}3$ এর মান নির্ণয় কর ; দেওয়া হইল, $\mu=0{\cdot}43429448$.

এখানে $0<\frac{1}{n}<1$; সুতরাং নিম্নের সম্পর্কটিতে, যথা :

$$-\log_e(1-x)=x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\cdots\quad\cdots,$$ তে

$x=\frac{1}{n}$ ধরা হইল ; তাহা হইলে,

$$-\log_e\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\quad\cdots\quad\cdots,$$

অর্থাৎ $\log_e n-\log_e(n-1)=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\cdots\quad\cdots.$

এখন উভয় পক্ষকে μ দ্বারা গুণ করিলে পাওয়া যায় যে

$$\mu\log_e n-\mu\log_e(n-1)=\frac{\mu}{n}+\frac{\mu}{2n^2}+\frac{\mu}{3n^3}+\cdots\quad\cdots$$

বা, $$\log_{10}n-\log_{10}(n-1)=\frac{\mu}{n}+\frac{\mu}{2n^2}+\frac{\mu}{3n^3}+\cdots\quad\cdots$$

$n=10$ ধরিলে পাওয়া যায় যে

$$\log_{10}10-\log_{10}9=\frac{\mu}{10}+\frac{\mu}{2.10^2}+\frac{\mu}{3.10^3}+\cdots\quad\cdots$$

বা, $$1-2\log_{10}3=\frac{0{\cdot}43429448}{10}+\frac{0{\cdot}43429448}{200}+\frac{0{\cdot}43429448}{3000}+\cdots$$

$$=0{\cdot}043429448+0{\cdot}002171472+0{\cdot}00144765$$
$$+0{\cdot}000010857+0{\cdot}000000869+0{\cdot}000000072$$
$$+0{\cdot}000000006+\cdots\quad\cdots$$
$$\simeq 0{\cdot}045757489.$$

$\therefore\ \log_{10}3=\frac{1}{2}(1-0{\cdot}045757489)=0{\cdot}477121255.$

উদা. 5. $\log(1+x+x^2)$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর, (প্রদত্ত $|x|<1$.)

$$\log(1+x+x^2)=\log\frac{1-x^3}{1-x}=\log(1-x^3)-\log(1-x)$$

কিন্তু যদি $-1 \leqslant x < 1$ হয়, তবে

$$\log(1-x^3) = -x^3 - \tfrac{1}{2}x^6 - \tfrac{1}{3}x^9 - \cdots \quad \cdots,$$

$$\log(1-x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \quad \cdots \quad \cdots.$$

$$\therefore \quad \log(1+x+x^2) = (x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots) - (x^3 + \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{3}x^9 + \cdots)$$

যদি r, 3 এর গুণিতক না হয়, তবে x^r এর সহগ হইল কেবল $\dfrac{1}{r}$;

যদি r, 3 এর গুণিতক হয়, তবে x^r এর সহগ হইল $\dfrac{1}{r} - \dfrac{3}{r} = -\dfrac{2}{r}$.

উদা. 6. নিম্নলিখিত শ্রেণীটির অসীম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর :

$$1 + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{9} + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\frac{1}{9^2} + \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)\frac{1}{9^3} + \cdots \quad \cdots$$

শ্রেণীটিকে এইভাবে লেখা যায়, যথা :

$$\left\{1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \cdots\cdots\right\} + \left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9^2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{9^3} + \cdots\right\}$$

$$= 3\{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3})^3 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{3})^5 + \tfrac{1}{7}(\tfrac{1}{3})^7 + \cdots\} + \tfrac{1}{2}\{\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{9})^2 + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{9})^3 + \cdots\}$$

$$= 3.\tfrac{1}{2}\log\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{2}\{-\log(1-\tfrac{1}{9})\}$$

$$= \tfrac{3}{2}[\log 2] + \tfrac{1}{2}(\log 9 - \log 8) = \tfrac{3}{2}(\log 2) + \tfrac{1}{2}(2\log 3 - 3\log 2)$$

$$= \log 3.$$

উদা. 7. অসীম পদ পর্যন্ত নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর :

(i) $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{3.4} + \dfrac{1}{5.6} + \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

(ii) $\dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{4.5} + \dfrac{1}{6.7} + \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots.$

(iii) $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{3.4.5} + \dfrac{1}{5.6.7} + \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

(iv) $\dfrac{5}{1.2.3} + \dfrac{7}{3.4.5} + \dfrac{9}{5.6.7} + \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

(i) শ্রেণীটির nতম পদ $=\dfrac{1}{(2n-1)2n}=\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}$

$\therefore$ প্রথম পদ $=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$

2য় পদ $=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

3য় পদ $=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$

... ...

nতম পদ $=\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}$

$\therefore$ nতম পদ পর্যন্ত সমষ্টি $=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}\right)$

যখন $n\to\infty$, তখন (i) এর অসীম পদ পর্যন্ত সমষ্টি $=\log_e 2$.

$[\because \log_e 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots]$

(ii) nতম পদ $=\dfrac{1}{2n(2n+1)}=\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2n+1}$

$\therefore$ 1ম পদ $=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

2য় পদ $=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$

3য় পদ $=\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$

... ...

nতম পদ $=\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2n+1}$

$\therefore$ প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\quad+\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2n+1}$

$\therefore$ $1-$(প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি) $=$

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\cdots-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}$$

যখন $n\to\infty$, তখন $1-$(অসীম পদ পর্যন্ত নির্ণেয় সমষ্টি) $=\log_e 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $=1-\log_e 2$

(iii) nতম পদ $=\dfrac{1}{(2n-1)2n(2n+1)}=\left[\dfrac{1}{(2n-1)2n}-\dfrac{1}{2n(2n+1)}\right]\cdot\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}\right)$

$$-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$\therefore$ যখন $n\to\infty$, তখন অসীম পদ পর্যন্ত নির্ণেয় সমষ্টি $=\frac{1}{2}\log_e 2-\frac{1}{2}(1-\log_e 2)$

$=\log_e 2-\frac{1}{2}$.

(iv) nতম পদ $=\dfrac{5+2(n-1)}{\{1+(n-1)2\}\{2+(n-1)2\}\{3+(n-1)2\}}$

$$=\frac{2n+3}{(2n-1)2n(2n+1)}$$

$$=\frac{2n}{(2n-1)2n(2n+1)}+\frac{3}{(2n-1)2n(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]+\frac{3}{(2n-1)2n(2n+1)}$$

∴ 1ম পদ $=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right]+3.\dfrac{1}{1.2.3}$

2য় পদ $=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right]+3.\dfrac{1}{3.4.5}$

3য় পদ $=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right]+3.\dfrac{1}{5.6.7}$

... ...

nতম পদ $=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right]+3.\dfrac{1}{(2n-1)2n(2n+1)}$

প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $=\dfrac{1}{2}\left[1-\dfrac{1}{2n+1}\right]+3\left[\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{3.4.5}+\cdots\right.$

$$\left.\cdots+\frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)}\right]$$

যখন $n\to\infty$, তখন $\dfrac{1}{2n+1}\to 0$ এবং দ্বিতীয় পদটির বন্ধনীভুক্ত রাশি $\to\log_e 2-\frac{1}{2}$

[উদা. (iii) অনুসারে]

∴ অসীম পদ পর্যন্ত নির্ণেয় সমষ্টি $=\frac{1}{2}+3(\log_e 2-\frac{1}{2})$

$$=3\log_e 2-1=\log_e\left(\frac{8}{e}\right).$$

উদা. 8. যদি $y=x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots\cdots$ ($|x|<1$) হয়, তবে দেখাও যে

$$e^y=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots$$

প্রদত্ত $|x|<1$,

∴ $y=-\log_e(1-x)$ বা, $e^{-y}=(1-x)$

বা, $e^y=\dfrac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots$

[∵ দ্বিপদ বিস্তৃতি অনুসারে ; এখানে প্রযোজ্য কারণ $|x|<1$]

প্রশ্নমালা XII(B)

[$\log_e x$ কে $\log x$ দ্বারা নির্দেশ করা হইল।]

[A]

1. 4 দশমিক স্থান পর্যন্ত $\log(1{\cdot}02)$ এর মান নির্ণয় কর।

2. লগারিদম্‌ শ্রেণীর সাহায্যে প্রমাণ কর যে

$$\log(p+1)-\log p=2\left[\frac{1}{2p+1}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2p+1)^3}+\cdots\right],\ p>0.$$

ইহার সাহায্যে 5 দশমিক স্থান পর্যন্ত $\log 3-\log 2$ এর মান নির্ণয় কর। $\log 2 \approx 0{\cdot}693147$ হইলে $\log 3$ এর মান নির্ণয় কর। $\log_{10}3$ এর মান কত হইবে যদি $1/\log_{10}e=0{\cdot}43429$ হয়?

3. $\log 13-\log 12$ এর 5 দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান নির্ণয় কর। এখন 4 দশমিক স্থান পর্যন্ত $\log 13$ নির্ণয় কর, যদি দেওয়া থাকে যে

$\log 2\simeq 0{\cdot}693147$ এবং $\log 3\simeq 1{\cdot}098612$.

4. প্রমাণ কর যে $\log\frac{128}{125}\simeq 0{\cdot}023716$; ইহা হইতে দেখাও যে $\log 10\simeq 2{\cdot}302585$, যখন $\log 2\simeq 0{\cdot}6931472$.

5. প্রদত্ত $\log_{10}2={\cdot}30103000$, $\mu=0{\cdot}43429448$; মান নির্ণয় কর:
$\log_{10}7$, $\log_{10}11$, $\log_{10}13$.

[B]

1. বৈধতার শর্ত এবং x^r এর সহগ উল্লেখপূর্বক x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমে নিম্নের বিস্তৃতিগুলি নির্ণয় কর:

(i) $\log(1-3x)$; (ii) $\log(2+x)$;

(iii) $\log(1+3x+2x^2)$; (iv) $(1-x)^2\log(1-x)$;

(v) $\log(1-x^2+x^4)$; (vi) $\log\dfrac{\sqrt{(1+x^2)}}{1-x}$;

(vii) $\log(1+x+x^2+x^3+x^4)$; (viii) $\log\left(1-\dfrac{2x^2}{1-x}\right)$;

(ix) $(1+x)\log(1+x)+(1-x)\log(1-x)$.

2. যদি $ax^2+bx+c=0$ এর বীজ দুইটি α, β হয়, যেখানে $\dfrac{b^2}{4a}>c>0$, তবে $\log(ax^2+bx+c)$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ α, βর সাহায্যে নির্ণয় কর ও বিস্তৃতির বৈধতার শর্ত উল্লেখ কর।

3. যদি $\log_e\left(\frac{1}{1+x+x^2+x^3}\right)$ এর বিস্তৃতিকে x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমে সজ্জিত শ্রেণীরূপে প্রকাশ করা হয়, তবে দেখাও যে x^m এর সহগ হইবে $-\frac{1}{m}$, যদি m অযুগ্ম হয়।

[C]

নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির অসীম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর (1নং হইতে 10নং):

1. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{3.2^3}+\cdots \quad \cdots$

2. $\frac{1}{1.3}-\frac{1}{2.3^2}+\frac{1}{3.3^3}-\cdots \quad \cdots$

3. $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{3.4^3}+\frac{1}{5.4^5}+\cdots \quad \cdots$

4. $\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}+\cdots \quad \cdots \quad (|x|<1)$

5. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.7}+\cdots \quad \cdots$

6. $\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\cdots \quad \cdots$

7. $\frac{x^2}{1.3}+\frac{x^4}{3.5}+\frac{x^6}{5.7}+\cdots \quad \cdots \quad (|x|<1)$;

8. $\frac{5}{1.2.3}+\frac{6}{2.3.4}+\frac{7}{3.4.5}+\cdots \quad \cdots$

9. $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{5.6.7}+\frac{1}{9.10.11}+\cdots \quad \cdots$

10. $\frac{3}{2.1.2}-\frac{4}{2^2.2.3}+\frac{5}{2^3.3.4}-\cdots \quad \cdots$

11. প্রমাণ কর যে

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^3}-\frac{1}{2^3}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{2^4}\right)+\cdots \quad \cdots=0.$$

12. প্রমাণ কর যে কোন নির্দিষ্ট সর্তে (সর্তটি বিবৃত করিতে হইবে)

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{3x^6}+\cdots\cdots=\frac{2}{y}+\frac{2}{3y^3}+\frac{2}{5y^5}+\cdots,$$

যেখানে $y=2x^2-1$.

13. যদি $0<x<1$ এবং $y=\dfrac{x}{1+x}$ হয়, তবে নিম্নে প্রদত্ত শ্রেণী, যথা :

$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots\ \cdots\ \cdots$ এর অসীম পদ পর্যন্ত সমষ্টিকে y এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমে সজ্জিত শ্রেণীরূপে প্রকাশ কর।

14. যদি $|x|>2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\frac{2}{x^3-3x}+\frac{2^3}{3(x^3-3x)^3}+\frac{2^5}{5(x^3-3x)^5}+\cdots\ \cdots$$
$$=\frac{1}{2}\log\frac{x+2}{x-2}+\log\frac{x-1}{x+1}.$$

[D]

1. প্রমাণ কর যে

$$1+\frac{1}{3}\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{2^4}+\frac{1}{7}\frac{1}{2^6}+\cdots\ \cdots=\log_e 3.$$

2. অসীম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর :

$$\frac{x^2}{2.3}+\frac{2x^3}{3.4}+\frac{3x^4}{4.5}+\frac{4x^5}{5.6}+\cdots\ \cdots$$

[ইঙ্গিত : nতম পদ $=\dfrac{2}{n+2}x^{n+1}-\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$; প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করিয়া উহা হইতে অসীম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।]

3. যাচাই করিয়া দেখাও যে

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}\right)+\ \cdots\ =\log_e\sqrt{2}.$$

4. যদি $\log\ (1-x-x^2+x^3)^{-1}$ কে x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমে সজ্জিত শ্রেণীতে বিস্তৃত করা হয়, তবে দেখাও যে n অযুগ্ম বা যুগ্ম হইলে x^n এর সহগ হইবে যথাক্রমে $\dfrac{1}{n}$ বা $\dfrac{3}{n}$.

5. অসীম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর :

(i) $\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4+\cdots\ \cdots\ \cdots\ (\,|x^3|<1).$

(ii) $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^6}{6}+\dfrac{x^9}{9}+\cdots\ \cdots\ \cdots\ (\,|x^3|<1).$

6. প্রমাণ কর যে $\left(1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{4!}+\dfrac{1}{6!}+\cdots\ \cdots\right)^2$

$$=1+\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots\ \cdots\right)^2.$$

7. দেখাও যে

$$\log_e \frac{(1+x)^{\frac{1-x}{2}}}{(1-x)^{\frac{1+x}{2}}}=x+\frac{5x^2}{2.3}+\frac{9x^5}{4.5}+\frac{13x^7}{6.7}+\cdots\ \cdots$$

(সম্পর্কটির বৈধতার শর্ত বিবৃত কর।)

8. যদি $y=2x-x^2y$, এবং $|x|<1$ হয়, তবে দেখাও যে

$$y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\cdots\ \cdots=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\ \cdots\right).$$

9. যদি $y=1-x+\frac{x^2}{\underline{|2}}-\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\ \cdots$ এবং $z=-y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\cdots$ হয়,

তবে প্রমাণ কর যে

$$x=\log_e \frac{1}{1-e^z}.$$

উত্তরমালা

[A]

1. 0·0198.
2. 0·40547 ; 1·0986 ; 0·47712.
3. 0·08004 ; 2·5649.
5. 0·8450980 ; 1·0413927 ; 1·1139434.

[B]

1. (i) $\sum -\frac{1}{r}3^r x^r$; $-\frac{1}{3}\leqslant x<\frac{1}{3}$.

(ii) $\log 2+\sum\left\{-\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{2}\right)^r x^r\right\}$; $-2<x\leqslant 2$.

(iii) $\sum -\frac{1}{r}\left(-1\right)^r\left(1+2^r\right)x^r$; $-\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{1}{2}$.

(iv) $-x+\frac{3x^2}{2}\sum \frac{2}{r(r-1)(r-2)}x^r$; $r>2$; $-1\leqslant x<1$.

(v) x^r এর সহগ $=0$, যদি r অযুগ্ম হয় ; $=\frac{4}{r}\left(-1\right)^{\frac{1}{6}r-1}$, যদি $r=6p$ হয় ; $=\frac{2}{r}\left(-1\right)^{\frac{1}{2}r}$, যদি $r=6p\pm 2$ হয় ; $|x|\leqslant 1$.

(vi) x^r এর সহগ $=\frac{1}{r}$, যদি r অযুগ্ম হয় ; $=0$, যদি $r=4p$ হয় ; $=\frac{2}{r}$, যদি $r=4p+2$ হয় ; $-1\leqslant x<1$.

(vii) x^r এর সহগ $=\frac{-4}{r}$ যদি $r=5p$ হয় ; $=\frac{1}{r}$, যদি $r\neq 5p$ হয় : $-1\leqslant x\leqslant 1$.

(viii) x^r এর সহগ $=-\frac{1}{r}2^r$, যখন r যুগ্ম ; $=\frac{1}{r}\left(2-2^r\right)$, যখন r অযুগ্ম ; $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$.

(ix) $\sum \frac{1}{r(2r-1)} x^{2r}$; $-1<x<1$.

2. $-\frac{1}{r}\left(\alpha^{-r}+\beta^{-r}\right)$; $|x| < \frac{1}{2a}\left\{|b| - \sqrt{(b^2-4ac)}\right\}$.

[C]

1. $\log 2$. 2. $\log\left(\frac{4}{3}\right)$, 3. $\frac{1}{2}\log\left(\frac{8}{3}\right)$, 4. $-\frac{1}{2}\log(1-x^2)$.

5. $2-\log 4$. 6. $\log(4/e)$, 7. $\frac{1}{4}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\log\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}$.

8. $1\frac{1}{2}$. 9. $\frac{1}{4}\log 2$. 10. $4\log\frac{3}{2}-1$.

13. $\sum \frac{1}{r} y^r$.

[D]

2. $\left(1-\frac{2}{x}\right)\log(1-x)-2$. 5. (i) $\frac{x}{1-x}+\log(1-x)$; (ii) $-\frac{1}{2}\log(1-x^2)$.

পরিশিষ্ট

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	00000	00432	00860	01284	01703						42	85	127	170	212	254	297	339	381
						02119	02531	02938	03342	03743	40	81	121	162	202	242	283	323	364
11	04139	04532	04922	05308	05690						37	77	116	154	193	232	270	309	348
						06070	06446	06819	07188	07555	37	74	111	148	185	222	259	296	333
12	07918	08279	08636	08991	09342						36	71	106	142	177	213	248	284	319
						09691	10037	10380	10721	11059	34	68	102	136	170	204	238	272	307
13	11394	11727	12057	12385	12710						33	66	98	131	164	197	229	262	295
						13033	13354	13672	13988	14301	32	63	95	126	158	190	221	253	284
14	14613	14922	15229	15534	15836						30	61	91	122	152	183	213	244	274
						16137	16435	16732	17026	17319	29	59	88	118	147	177	206	236	265
15	17609	17898	18184	18469	18752						28	57	85	114	142	171	199	228	256
						19033	19312	19590	19866	20140	28	55	83	110	138	165	193	221	248
16	20412	20683	20951	21219	21484						27	53	80	107	134	160	187	214	240
						21748	22011	22272	22531	22789	26	52	78	104	130	156	182	208	233
17	23045	23300	23553	23805	24055						26	50	76	101	126	151	176	201	227
						24304	24551	24797	25042	25285	25	49	73	98	122	147	171	196	220
18	25527	25768	26007	26245	26482						24	48	71	95	119	143	167	190	214
						26717	26951	27184	27416	27646	23	46	69	93	116	139	162	185	208
19	27875	28103	28330	28556	28780						23	45	68	90	113	135	158	180	203
						29003	29226	29447	29667	29885	22	44	66	88	110	132	154	176	198
20	30103	30320	30535	30750	30963	31175	31387	31597	31806	32015	21	43	64	85	106	127	148	170	190
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244	33445	33646	33846	34044	20	41	61	81	101	121	141	162	182
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218	35411	35603	35793	35984	20	39	58	77	97	116	135	154	174
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107	37291	37475	37658	37840	19	37	56	74	93	111	130	148	167
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917	39094	39270	39445	39620	18	35	53	71	89	106	124	142	159

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654	40824	40993	41162	41330	17	34	51	68	85	102	119	136	153
26	41497	41664	41830	41996	42160	42325	42488	42651	42813	42975	16	33	49	66	82	98	115	131	148
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933	44091	44248	44404	44560	16	32	47	63	79	95	111	126	142
28	44716	44871	45025	45179	45332	45484	45637	45788	45939	46090	15	30	46	61	76	91	107	122	137
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982	47129	47276	47422	47567	15	29	44	59	74	88	103	118	132
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430	48572	48714	48855	48996	14	29	43	57	72	86	100	114	129
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831	49969	50106	50243	50379	14	28	41	55	69	83	97	110	124
32	50515	50650	50786	50920	51054	51188	51322	51455	51587	51720	13	27	40	54	67	80	94	107	121
33	51851	51983	52114	52244	52375	52504	52634	52763	52892	53020	13	26	39	52	65	78	91	104	117
34	53148	53275	53403	53529	53656	53782	53908	54033	54158	54283	13	25	38	50	63	76	88	101	113
35	54407	54531	54654	54777	54900	55023	55145	55267	55388	55509	12	24	37	49	61	73	85	98	110
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229	56348	56467	56585	56703	12	24	36	48	60	71	83	95	107
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403	57519	57634	57749	57864	12	23	35	46	58	70	81	93	104
38	57978	58092	58206	58320	58433	58546	58659	58771	58883	58995	11	23	34	45	57	68	79	90	102
39	59106	59218	59329	59439	59550	59660	59770	59879	59988	60097	11	22	33	44	55	66	77	88	99
40	60206	60314	60423	60531	60638	60746	60853	60959	61066	61172	11	21	32	43	54	64	75	86	97
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805	61909	62014	62118	62221	10	21	31	42	53	63	74	84	95
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839	62941	63043	63144	63246	10	20	31	41	51	61	71	82	92
43	63347	63448	63548	63649	63749	63849	63949	64048	64147	64246	10	20	30	40	50	60	70	80	90
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836	64933	65031	65128	65225	10	20	29	39	49	59	68	78	88
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801	65896	65992	66087	66181	10	19	29	38	48	57	67	76	86
46	66276	66370	66464	66558	66652	66745	66839	66932	67025	67117	9	19	28	37	47	56	65	74	84
47	67210	67302	67394	67486	67578	67669	67761	67852	67943	68034	9	18	27	36	46	55	64	73	82
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574	68664	68753	68842	68931	9	18	27	36	45	54	63	72	81
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461	69548	69636	69723	69810	9	18	26	35	44	53	62	70	79

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329	70415	70501	70585	70672	9	17	26	34	43	52	60	69	77
51	70757	70842	70927	71012	71096	71181	71265	71349	71433	71517	8	17	25	34	42	50	59	67	76
52	71600	71684	71767	71850	71933	72016	72099	72181	72263	72346	8	17	25	33	42	50	58	66	75
53	72428	72509	72591	72673	72754	72835	72916	72997	73078	73159	8	16	24	32	41	49	57	65	73
54	73239	73320	73400	73480	73560	73640	73719	73799	73878	73957	8	16	24	32	40	48	56	64	72
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429	74507	74586	74663	74741	8	16	23	31	39	47	55	63	70
56	74819	74896	74974	75051	75128	75205	75282	75358	75435	75511	8	15	23	31	39	46	54	62	69
57	75587	75664	75740	75815	75891	75967	76042	76118	76193	76268	8	15	23	30	38	45	53	60	68
58	76343	76418	76492	76567	76641	76716	76790	76864	76938	77012	7	15	22	30	37	44	52	59	67
59	77085	77159	77232	77305	77379	77452	77525	77597	77670	77743	7	15	22	29	37	44	51	58	66
60	77815	77887	77960	78032	78104	78176	78247	78319	78390	78462	7	14	22	29	36	43	50	58	65
61	78533	78604	78675	78746	78817	78888	78958	79029	79099	79169	7	14	21	28	36	43	50	57	64
62	79239	79309	79379	79449	79518	79588	79657	79727	79796	79865	7	14	21	28	35	41	48	55	62
63	79934	80003	80072	80140	80209	80277	80346	80414	80482	80550	7	14	20	27	34	41	48	54	61
64	80618	80686	80754	80821	80889	80956	81023	81090	81158	81224	7	13	20	27	34	40	47	54	60
65	81291	81358	81425	81491	81558	81624	81690	81757	81823	81889	7	13	20	26	33	40	46	53	59
66	81954	82020	82086	82151	82217	82282	82347	82413	82478	82543	7	13	20	26	33	39	46	52	59
67	82607	82672	82737	82802	82866	82930	82995	83059	83123	83187	6	13	19	26	32	38	45	51	58
68	83251	83315	83378	83442	83506	83569	83632	83696	83759	83822	6	13	19	25	32	38	44	50	57
69	83885	83948	84011	84073	84136	84198	84261	84323	84386	84448	6	12	19	25	31	37	43	50	56
70	84510	84572	84634	84696	84757	84819	84880	84942	85003	85065	6	12	19	25	31	37	43	50	56
71	85126	85187	85248	85309	85370	85431	85491	85552	85612	85673	6	12	18	24	31	37	43	49	55
72	85733	85794	85854	85914	85974	86034	86094	86153	86213	86273	6	12	18	24	30	36	42	48	54
73	86332	86392	86451	86510	86570	86629	86688	86747	86806	86864	6	12	18	24	30	35	41	47	53
74	86923	86982	87040	87099	87157	87216	87274	87332	87390	87448	6	12	17	23	29	35	41	46	52

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
75	87506	87564	87622	87679	87737	87795	87852	87910	87967	88024	6	12	17	23	29	35	41	46	52
76	88081	88138	88195	88252	88309	88366	88423	88480	88536	88593	6	11	17	23	29	34	40	46	51
77	88649	88705	88762	88818	88874	88930	88986	89042	89098	89154	6	11	17	22	28	34	39	45	50
78	89209	89265	89321	89376	89432	89487	89542	89597	89653	89708	6	11	17	22	28	33	39	44	50
79	89763	89818	89873	89927	89982	90037	90091	90146	90200	90255	6	11	17	22	28	33	39	44	50
80	90309	90363	90417	90472	90526	90580	90634	90687	90741	90795	5	11	16	22	27	32	38	43	49
81	90848	90902	90956	91009	91062	91116	91169	91222	91275	91328	5	11	16	21	27	32	37	42	48
82	91381	91434	91487	91540	91593	91645	91698	91751	91803	91855	5	11	16	21	27	32	37	42	48
83	91908	91960	92012	92064	92117	92169	92221	92273	92324	92376	5	10	16	21	26	31	36	42	47
84	92428	92480	92531	92583	92634	92686	92737	92788	92840	92891	5	10	15	20	26	31	36	41	46
85	92942	92993	93044	93095	93146	93197	93247	93298	93349	93399	5	10	15	20	26	31	36	41	46
86	93450	93500	93551	93601	93651	93702	93752	93802	93852	93902	5	10	15	20	25	30	35	40	45
87	93952	94002	94052	94101	94151	94201	94250	94300	94349	94399	5	10	15	20	25	30	35	40	45
88	94448	94498	94547	94596	94645	94694	94743	94792	94841	94890	5	10	15	20	25	29	34	39	44
89	94939	94988	95036	95085	95134	95182	95231	95279	95328	95376	5	10	15	19	24	29	34	39	44
90	95424	95472	95521	95569	95617	95665	95713	95761	95809	95856	5	10	14	19	24	29	34	38	43
91	95904	95952	95999	96047	96095	96142	96190	96237	96284	96332	5	9	14	19	24	28	33	38	42
92	96379	96426	96473	96520	96567	96614	96661	96708	96755	96802	5	9	14	19	24	28	33	38	42
93	96848	96895	96942	96988	97035	97081	97128	97174	97220	97267	5	9	14	18	23	28	32	38	42
94	97313	97359	97405	97451	97497	97543	97589	97635	97681	97727	5	9	14	18	23	28	32	37	42
95	97772	97818	97864	97909	97955	98000	98046	98091	98137	98182	5	9	14	18	23	27	32	36	41
96	98227	98272	98318	98363	98408	98453	98498	98543	98588	98632	5	9	14	18	23	27	32	36	41
97	98677	98722	98767	98811	98856	98900	98945	98989	99034	99078	4	9	13	18	22	27	31	36	40
98	99123	99167	99211	99255	99300	99344	99388	99432	99476	99520	4	9	13	18	22	26	31	35	40
99	99564	99607	99651	99695	99739	99782	99826	99870	99913	99957	4	9	13	17	22	26	31	35	39

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	10000	10023	10046	10069	10093	10116	10139	10162	10186	10209	2	5	7	9	12	14	16	19	21
·01	10233	10257	10280	10304	10328	10351	10375	10399	10423	10447	2	5	7	10	12	14	17	19	21
·02	10471	10495	10520	10544	10568	10593	10617	10641	10666	10691	2	5	7	10	12	15	17	20	22
·03	10715	10740	10765	10789	10814	10839	10864	10889	10914	10940	3	5	8	10	13	15	18	20	23
·04	10965	10990	11015	11041	11066	11092	11117	11143	11169	11194	3	5	8	10	13	15	18	20	23
·05	11220	11246	11272	11298	11324	11350	11376	11402	11429	11455	3	5	8	11	13	16	18	21	24
·06	11482	11508	11535	11561	11588	11614	11641	11668	11695	11722	3	5	8	11	13	16	19	21	24
·07	11749	11776	11803	11830	11858	11885	11912	11940	11967	11995	3	5	8	11	14	16	19	22	25
·08	12023	12050	12078	12106	12134	12162	12190	12218	12246	12274	3	6	8	11	14	17	20	22	25
·09	12303	12331	12359	12388	12417	12445	12474	12503	12531	12560	3	6	9	11	14	17	20	23	26
·10	12589	12618	12647	12677	12706	12735	12764	12794	12823	12853	3	6	9	12	15	18	21	24	26
·11	12882	12912	12942	12972	13002	13032	13062	13092	13122	13152	3	6	9	12	15	18	21	24	27
·12	13183	13213	13243	13274	13305	13335	13366	13397	13428	13459	3	6	9	12	15	18	21	25	28
·13	13490	13521	13552	13583	13614	13646	13677	13709	13740	13772	3	6	9	13	16	19	22	25	28
·14	13804	13836	13868	13900	13932	13964	13996	14028	14060	14093	3	6	10	13	16	19	22	26	29
·15	14125	14158	14191	14223	14256	14289	14322	14355	14388	14421	3	7	10	13	16	20	23	26	30
·16	14454	14488	14521	14555	14588	14622	14655	14689	14723	14757	3	7	10	13	17	20	24	27	30
·17	14791	14825	14859	14894	14928	14962	14997	15031	15066	15101	3	7	10	14	17	21	24	28	31
·18	15136	15171	15205	15241	15276	15311	15346	15382	15417	15453	4	7	11	14	18	21	25	28	32
·19	15488	15524	15560	15596	15631	15668	15704	15740	15776	15812	4	7	11	14	18	22	25	29	32
·20	15849	15885	15922	15959	15996	16032	16069	16106	16144	16181	4	7	11	15	18	22	26	30	33
·21	16218	16255	16293	16331	16368	16406	16444	16482	16520	16558	4	8	11	15	19	23	26	30	34
·22	16596	16634	16672	16711	16749	16788	16827	16866	16904	16943	4	8	12	15	19	23	27	31	35
·23	16982	17022	17061	17100	17140	17179	17219	17258	17298	17338	4	8	12	16	20	24	28	32	36
·24	17378	17418	17458	17498	17539	17579	17620	17660	17701	17742	4	8	12	16	20	24	28	32	36

ANTILOGARITHMS.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·25	17783	17824	17865	17906	17947	17989	18030	18072	18113	18155	4	8	12	17	21	25	29	33	37
·26	18197	18239	18281	18323	18365	18408	18450	18493	18535	18578	4	8	13	17	21	25	30	34	38
·27	18621	18664	18707	18750	18793	18836	18880	18923	18967	19011	4	9	13	17	22	26	30	35	39
·28	19055	19099	19143	19187	19231	19275	19320	19364	19409	19454	4	9	13	18	22	26	31	35	40
·29	19498	19543	19588	19634	19679	19724	19770	19815	19861	19907	5	9	14	18	23	27	32	36	41
·30	19953	19999	20045	20091	20137	20184	20230	20277	20324	20370	5	9	14	19	23	28	32	37	42
·31	20417	20464	20512	20559	20606	20654	20701	20749	20797	20845	5	10	14	19	24	29	33	38	43
·32	20893	20941	20989	21038	21086	21135	21184	21232	21281	21330	5	10	15	19	24	29	34	39	44
·33	21380	21429	21478	21528	21577	21627	21677	21727	21777	21827	5	10	15	20	25	30	35	40	45
·34	21878	21928	21979	22029	22080	22131	22182	22233	22284	22336	5	10	15	20	25	31	36	41	46
·35	22387	22439	22491	22542	22594	22646	22699	22751	22803	22856	5	10	16	21	26	31	37	42	47
·36	22909	22961	23014	23067	23121	23174	23227	23281	23336	23388	5	11	16	21	27	32	37	43	48
·37	23442	23496	23550	23605	23659	23714	23768	23823	23878	23933	5	11	16	22	27	33	38	44	49
·38	23988	24044	24099	24155	24210	24266	24322	24378	24434	24491	6	11	17	22	28	34	39	45	50
·39	24547	24604	24660	24717	24774	24831	24889	24946	25003	25061	6	11	17	23	29	34	40	46	51
·40	25119	25177	25236	25293	25351	25410	25468	25527	25586	25645	6	12	18	23	29	35	41	47	53
·41	25704	25763	25823	25882	25942	26002	26062	26122	26182	26242	6	12	18	24	30	36	42	48	54
·42	26303	26363	26424	26485	26546	26607	26669	26730	26792	26853	6	12	18	24	31	37	43	49	55
·43	26915	26977	27040	27102	27164	27227	27290	27353	27416	27479	6	13	19	25	31	38	44	50	56
·44	27542	27606	27669	27733	27797	27861	27925	27990	28054	28119	6	13	19	26	32	39	45	51	58
·45	28184	28249	28314	28379	28445	28510	28576	28642	28708	28774	7	13	20	26	33	39	46	52	59
·46	28840	28907	28973	29040	29107	29174	29242	29309	29376	29444	7	13	20	27	34	40	47	54	60
·47	29512	29580	29648	29717	29785	29854	29923	29992	30061	30130	7	14	21	28	34	41	48	55	62
·48	30200	30269	30339	30409	30479	30549	30620	30690	30761	30832	7	14	21	28	35	42	49	56	63
·49	30903	30974	31046	31117	31189	31261	31333	31405	31477	31550	7	14	22	29	36	43	50	58	65

ANTILOGARITHMS.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences.								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	31623	31696	31769	31842	31916	31989	32063	32137	32211	32285	7	15	22	29	37	44	52	59	66
·51	32359	32434	32509	32584	32659	32735	32809	32885	32961	33037	8	15	23	30	38	45	53	60	68
·52	33113	33189	33266	33343	33420	33497	33574	33651	33729	33806	8	15	23	31	39	46	54	62	69
·53	33884	33963	34041	34119	34198	34277	34356	34435	34514	34594	8	16	24	32	40	47	55	63	71
·54	34674	34754	34834	34914	34995	35075	35156	35237	35318	35400	8	16	24	32	40	48	56	65	73
·55	35481	35563	35645	35727	35810	35892	35975	36058	36141	36224	8	16	25	33	41	50	58	66	74
·56	36308	36392	36475	36559	36644	36728	36813	36898	36983	37068	8	17	25	34	42	51	59	68	76
·57	37154	37239	37325	37411	37497	37584	37670	37757	37844	37931	9	17	26	35	43	52	61	69	78
·58	38019	38107	38194	38282	38371	38459	38548	38637	38726	38815	9	18	27	35	44	53	62	71	80
·59	38905	38994	39084	39174	39264	39355	39446	39537	39628	39719	9	18	27	36	45	54	63	72	82
·60	39811	39902	39994	40087	40179	40272	40365	40458	40551	40644	9	19	28	37	46	56	65	74	83
·61	40738	40832	40926	41020	41115	41210	41305	41400	41495	41591	9	19	28	38	47	57	66	76	85
·62	41687	41783	41879	41976	42073	42170	42267	42364	42462	42560	10	19	29	39	49	58	68	78	87
·63	42658	42756	42855	42954	43053	43152	43251	43351	43451	43551	10	20	30	40	50	60	70	80	89
·64	43652	43752	43853	43954	44055	44157	44259	44361	44463	44566	10	20	30	41	51	61	71	81	91
·65	44668	44771	44875	44978	45082	45186	45290	45394	45499	45604	10	21	31	42	52	62	73	83	94
·66	45709	45814	45920	46026	46132	46238	46345	46452	46559	46666	11	21	32	43	53	64	75	85	96
·67	46774	46881	46989	47098	47206	47315	47424	47534	47643	47753	11	22	33	44	54	65	76	87	98
·68	47863	47973	48084	48195	48306	48417	48529	48641	48753	48865	11	22	33	45	56	67	78	89	100
·69	48978	49091	49204	49317	49431	49545	49659	49774	49888	50003	11	23	34	46	57	68	80	91	103
·70	50119	50234	50350	50466	50582	50699	50816	50933	51050	51168	12	23	35	47	58	70	82	93	105
·71	51286	51404	51523	51642	51761	51880	52000	52119	52240	52360	12	24	36	48	60	72	84	96	108
·72	52481	52602	52723	52845	52966	53088	53211	53333	53456	53580	12	24	37	49	61	73	85	98	110
·73	53703	53827	53951	54075	54200	54325	54450	54576	54702	54828	13	25	38	50	63	75	88	100	113
·74	54954	55081	55208	55336	55463	55590	55719	55847	55976	56105	13	26	38	51	64	77	90	102	115

ANTILOGARITHMS.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·75	56234	56364	56494	56624	56754	56885	57016	57148	57280	57412	13	26	39	52	66	79	92	105	118
·76	57544	57677	57810	57943	58076	58210	58345	58479	58614	58749	13	27	40	54	67	80	94	107	121
·77	58884	59020	59156	59293	59429	59566	59704	59841	59979	60117	14	27	41	55	69	82	96	110	123
·78	60256	60395	60534	60674	60814	60954	61094	61235	61376	61518	14	28	42	56	70	84	98	112	126
·79	61659	61802	61944	62087	62230	62373	62517	62661	62806	62951	14	29	43	58	72	86	101	115	130
·80	63096	63241	63387	63533	63680	63826	63973	64121	64269	64417	15	29	44	59	74	88	103	118	132
·81	64565	64714	64863	65013	65163	65313	65464	65615	65766	65917	15	30	45	60	75	90	105	120	135
·82	66069	66222	66374	66527	66681	66834	66988	67143	67298	67453	15	31	46	62	77	92	108	123	139
·83	67608	67764	67920	68077	68234	68391	68549	68707	68865	69024	16	32	47	63	79	95	110	126	142
·84	69183	69343	69503	69663	69823	69984	70146	70307	70469	70632	16	32	48	64	81	97	113	129	145
·85	70795	70958	71121	71285	71450	71614	71779	71945	72111	72277	17	33	50	66	83	99	116	132	149
·86	72444	72611	72778	72946	73114	73282	73451	73621	73790	73961	17	34	51	68	85	101	118	135	152
·87	74131	74302	74473	74645	74817	74989	75162	75336	75509	75683	17	35	52	69	87	104	121	138	156
·88	75858	76033	76208	76384	76560	76736	76913	77090	77268	77446	18	35	53	71	89	107	125	142	159
·89	77625	77804	77983	78163	78343	78524	78705	78886	79068	79250	18	36	54	72	91	109	127	145	163
·90	79433	79616	79799	79983	80168	80353	80538	80724	80910	81096	19	37	56	74	93	111	130	148	167
·91	81283	81470	81658	81846	82035	82224	82414	82604	82794	82985	19	38	57	76	95	113	132	151	170
·92	83176	83368	83560	83753	83946	84140	84333	84528	84723	84918	19	39	58	78	97	116	136	155	175
·93	85114	85310	85507	85704	85901	86099	86298	86497	86696	86896	20	40	60	79	99	119	139	158	178
·94	87096	87297	87498	87700	87902	88105	88308	88512	88716	88920	20	41	61	81	102	122	142	162	183
·95	89125	89331	89536	89743	89950	90157	90365	90573	90782	90991	21	42	62	83	104	125	146	166	187
·96	91201	91411	91622	91833	92045	92257	92470	92683	92897	93111	21	42	64	85	106	127	149	170	191
·97	93325	93541	93756	93972	94189	94406	94624	94842	95060	95280	22	43	65	87	109	130	152	174	195
·98	95499	95719	95940	96161	96383	96605	96828	97051	97275	97499	22	44	67	89	111	133	155	178	200
·99	97724	97949	98175	98401	98628	98855	99083	99312	99541	99770	23	46	68	91	114	137	160	182	205

সমতল ত্রিকোণমিতি

Syllabi of Trigonometry

(West Bengal Council of Higher Secondary Education)

Measure of an angle—Degrees. Radians. Trigonometrical ratios of compound angles. Multiple and submultiple angles, complementary and supplementary angles. Graphs of trigonometrical functions; Graphical and general solutions of Trigonometrical equations. Inverse circular functions. Properties of triangles. Solution of triangles. Problems relating to heights and distances.

সূচীপত্র

1. Greek alphabet.

A α alpha	H η eta	N ν nu	T τ tau
B β beta	Θ θ theta	Ξ ξ xi	Υ υ upsilon
Γ γ gamma	I ι iota	O o omicron	Φ ϕ phi
Δ δ delta	K κ kappa	Π π pi	X χ chi
E ϵ epsilon	Λ λ lambda	P ρ rho	Ψ ψ psi
Z ζ zeta	M μ mu	Σ σ sigma	Ω ω omega.

2. Radian measure.

A radian is the angle subtended at the centre of a circle by an arc equal in length to the radius of the circle.

(i) 1 radian = $180/\pi$ degrees = $200/\pi$ grades = $57° 17' 44{\cdot}8''$ (approx.)

(ii) 1 degree = $\pi/180$ radians = $10/9$ grades = $0{\cdot}174533$ radians (approx.)

(iii) 1 grade = $\pi/200$ radians = $9/10$ degrees.

(iv) The length s of any arc of a circle of radius r is $s = r\theta$, where θ is the central angle in radians.

(v) $\pi = 22/7$ (roughly), or $= 355/133$ (more accurately but still approx.)

$= 3{\cdot}1416$ (roughly), or $= 3{\cdot}1415926536$ (more accurately but still approx.)

3. Simple relations : Restrictions on values : Signs.

(i) $\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$, $\cot\theta = \cos\theta/\sin\theta = 1/\tan\theta$.

(ii) $\sec\theta = 1/\cos\theta$, $\operatorname{cosec}\theta = 1/\sin\theta$.

(iii) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$.

(iv) $-1 \leqslant \sin\theta, \cos\theta \leqslant 1$; $|\operatorname{cosec}\theta| \geqslant 1$, $|\sec\theta| \geqslant 1$.

(v) **ALL** (positive in first quadrant), **SIN** (also cosec, positive in second quadrant), **TAN** (also cot, positive in third quadrant), **COS** (also sec, positive in fourth quadrant).

4. Trigonometric ratios of some special angles.

θ	0° or 0	30° or $\frac{\pi}{6}$	45° or $\frac{\pi}{4}$	60° or $\frac{\pi}{3}$	90° or $\frac{\pi}{2}$	180° or π	270° or $\frac{3\pi}{2}$
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	undefined	0	undefined
cot θ	undefined	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	undefined	0
cosec θ	undefined	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	undefined	−1
sec θ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	undefined	−1	undefined

5. In terms of θ.

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\tan(-\theta) = -\tan\theta$.

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$, $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$, $\tan(90° - \theta) = \cot\theta$.

$\sin(90° + \theta) = \cos\theta$, $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$, $\tan(90° + \theta) = -\cot\theta$.

$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$, $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$, $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$.

$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$, $\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$, $\tan(180° + \theta) = \tan\theta$.

When n is an integer, positive, negative or zero ;

$\sin(2n\pi + \theta) = \sin\theta$, $\cos(2n\pi + \theta) = \cos\theta$, $\tan(2n\pi + \theta) = \tan\theta$.

6. Addition theorems.

(i) $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$

(ii) $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

(iii) $\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

(iv) $\tan(A + B + C)$

$$= \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan B \tan C - \tan C \tan A - \tan A \tan B}.$$

7. Sum, difference and product formulae.

$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\{\sin(A + B) + \sin(A - B)\}$.

$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A + B) + \cos(A - B)\}$.

$\sin A \sin B = -\frac{1}{2}\{\cos(A + B) - \cos(A - B)\}$.

$\sin C + \sin D = 2 \sin \frac{1}{2}(C + D) \cos \frac{1}{2}(C - D).$
$\sin C - \sin D = 2 \cos \frac{1}{2}(C + D) \sin \frac{1}{2}(C - D).$
$\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{1}{2}(C + D) \cos \frac{1}{2}(C - D).$
$\cos C - \cos D = -2 \sin \frac{1}{2}(C + D) \sin \frac{1}{2}(C - D).$

8. In terms of multiple and sub-multiple angles.

(i) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$

(ii) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x.$

(iii) $\tan 2x = 2 \tan x/(1 - \tan^2 x).$

(iv) $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$

(v) $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$

(vi) $\tan 3x = (3 \tan x - \tan^3 x)/(1 - 3 \tan^2 x).$

(vii) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$

(viii) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$

(ix) $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x).$

(x) $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos 3x).$

(xi) $\sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1).$

(xii) $\cos 18° = \frac{1}{4}\{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\}.$

9. General values.

$\sin \theta = \sin \alpha$ implies $\theta = n\pi + (-1)^n \alpha$
$\cos \theta = \cos \alpha$ implies $\theta = 2n\pi \pm \alpha$
$\tan \theta = \tan \alpha$ implies $\theta = n\pi + \alpha$
where n is an integer.

10. Inverse trigonometric forms.

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi = \tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \sec^{-1} x + \operatorname{cosec}^{-1} x.$$

$$\tan^{-1} x \pm \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x \pm y}{1 \mp xy}.$$

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \tan^{-1} \frac{x + y + z - xyz}{1 - yz - zx - xy}.$$

11. On triangles.

(i) $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C = 2R.$

(ii) $\sin A = 2\Delta/bc.$

(iii) $\cos A = (b^2 + c^2 - a^2)/2bc.$

(iv) $a = b \cos C + c \cos B.$

(v) $\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A = abc/4R = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$

(vi) $\tan \frac{1}{2}(B - C) = \{(b - c)/(b + c)\} \cot \frac{1}{2}A.$

(vii) $r = \Delta/s = 4R \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C = (s - a) \tan \frac{1}{2}A.$

(viii) $r_1 = \Delta/(s - a) = 4R \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C = s \tan \frac{1}{2}A.$

1
কোণ পরিমাপ
(Measurement of angles)

1·1. সূচনা

Tri বা **Tris** (তিন), **gonia** (কোণ) এবং **metron** (মাপ)—এই তিনটি গ্রীক মূলশব্দ হইতে উৎপন্ন **ত্রিকোণমিতি** (Trigonometry) শব্দটির আক্ষরিক অর্থ হইল ত্রিকোণ-পরিমাপ বা ত্রিভুজ পরিমাপ বিষয়ক আলোচনা। বর্তমান গ্রন্থে কেবল **সমতল ত্রিকোণমিতি** (Plane Trigonometry) অর্থাৎ সমতলে অবস্থিত ত্রিভুজ পরিমাপ সম্পর্কিত বিষয়ে আলোচনা সীমাবদ্ধ রাখা হইবে। গণিতশাস্ত্রের এই শাখা প্রাথমিক অবস্থায় ত্রিভুজের বাহু, কোণ ও ক্ষেত্রফলের মধ্যে বিদ্যমান পারস্পরিক সম্পর্কগুলি প্রতিষ্ঠিত করার কাজেই নিবদ্ধ ছিল। বর্তমানে কিন্তু উহার ক্ষেত্র আরও ব্যাপক এবং নির্দিষ্ট **ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক** (Trigonometric functions—সংজ্ঞা পরে দেওয়া হইল) সম্পর্কিত সকলপ্রকার অনুসন্ধান কার্য পর্যন্ত প্রসারিত। প্রারম্ভিক পর্যায়ে ত্রিকোণমিতিকে জরিপবিদ্যা, নৌবাহবিজ্ঞান, জ্যোতির্বিদ্যা, যন্ত্রবিদ্যার অন্তর্গত ত্রিভুজাকৃতি কাঠামোগঠন প্রভৃতি বিষয়ে প্রয়োগ করা হইতে থাকে, কিন্তু অধুনা শব্দ, আলোক ও তড়িৎবিজ্ঞান, রঞ্জনরশ্মিপ্রযুক্ত চিকিৎসাবিজ্ঞান, হৃদ্‌যন্ত্রবিদ্যা, শারীরবিত্ত, অপরা তড়িৎকণাঘটিত ব্যাপার এবং অন্যান্য আরও বিষয়ে উহা গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা গ্রহণ করিতেছে।

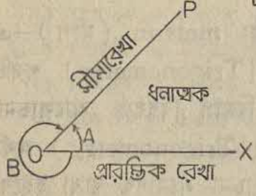
পূর্ববর্তী শ্রেণীগুলিতে ইতিপূর্বেই ছাত্রছাত্রীরা ত্রিকোণমিতি সম্পর্কে প্রাথমিক ধারণার সহিত পরিচিত হইয়াছে। সুতরাং এখানে তাহাদের জ্ঞাতবিষয়গুলির সংক্ষিপ্ত পুনরুল্লেখসহ অবশিষ্ট বিষয়গুলির বিশদ আলোচনার চেষ্টা করা হইবে।

কোণই ত্রিকোণমিতির ভিত্তি, সুতরাং কোণের উৎপত্তি ও পরিমাপ প্রণালীর আলোচনা দিয়া শুরু করা হইল।

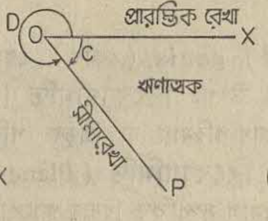
1·2. কোণের উৎপত্তি : ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণ : কোণ পরিমাপ :

ধরা যাক্ OX স্থির অর্ধরেখা এবং OP অর্ধরেখা প্রারম্ভিক অবস্থায় উহার উপর সমাপতিত আছে। এখন OP, O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ঘুরিতে লাগিল এবং XOP কোণ উৎপন্ন করিল (চিত্র 1.1 দ্রষ্টব্য)। এক্ষেত্রে O হইল **শীর্ষবিন্দু**, অর্ধরেখা OX **প্রারম্ভিক রেখা** এবং অপর অর্ধরেখা OP কে বলা হয় **সীমারেখা** (bounding line)। এখন ঘূর্ণায়মান অর্ধরেখাটি বিভিন্ন দিকে ও বিভিন্ন পরিমাণে ঘুরিয়া যে কোন একটি নির্দিষ্ট অবস্থানে আসিতে পারে। বিভিন্ন দিক অর্থে দুইপ্রকার ঘূর্ণন হইতে পারে, যথা : ঘড়ির কাঁটার গতির অভিমুখে (যেমন 1.1 চিত্রে B অথবা C কোণ উৎপন্ন করিয়া) এবং ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত অভিমুখে (যেমন A, D অথবা E কোণ উৎপন্ন করিয়া)। সুতরাং ইহা বলিলেই যথেষ্ট হইবে না যে স্থির

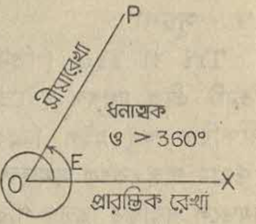
অর্ধরেখাটি সাপেক্ষে ঘূর্ণায়মান অর্ধরেখাটি একটি বিশেষ অবস্থানে আসিয়াছে ; কি প্রকার ঘূর্ণনের ফলে উহা ঐ পূর্বনির্ধারিত অবস্থানে আসিয়াছে তাহাও জানিবার প্রয়োজন হইতে পারে। অনুসৃত রীতি হইল, **ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত অভিমুখী ঘূর্ণনকে ধনাত্মক ও গতির অভিমুখী ঘূর্ণনকে ঋণাত্মক ধরা।**



চিত্র 1.1(*a*).



চিত্র 1.1(*b*).



চিত্র 1.1(*c*).

এখন প্রশ্ন হইল—কোণের পরিমাপ বলিতে কি বুঝায় ? প্রারম্ভিক অর্ধরেখা OX-এর সহিত সমাপতিত অবস্থা হইতে অন্তিম অবস্থান OP তে আসিতে সীমারেখা OP, শীর্ষ O কে কেন্দ্র করিয়া **যে পরিমাণ ঘূর্ণন** সম্পন্ন করে তাহাই হইল OX এবং OP অর্ধরেখাদ্বয়ের অন্তর্বর্তী XOP কোণের পরিমাপ। কৌণিক পরিমাপের সর্বাপেক্ষা স্বাভাবিক একক হইল একটি **সম্পূর্ণ ঘূর্ণন**। প্রারম্ভিক অবস্থানে OX অর্ধরেখার সহিত সমাপতিত OP অর্ধরেখা O বিন্দুর চারিদিকে ঘড়ির কাঁটার গতির অভিমুখের বিপরীত দিকে একটি পূর্ণ ঘূর্ণনের ফলে আবার OX অর্ধরেখার উপর আসে, যাহাতে প্রারম্ভিক রেখা ও সীমারেখা দুইটি পুনরায় সমাপতিত হয়। এইরূপ একটি পূর্ণ ঘূর্ণন পরিমাণের এক-চতুর্থাংশকে সমকোণ বলা হয়। পরবর্তী অনুচ্ছেদে দেখা যাইবে, এক সমকোণের 90টি সমান ভাগের প্রত্যেকটি ভাগকে এক ডিগ্রী বলা হয়। সুতরাং 1 সমকোণ 90 ডিগ্রীর সমান (ইহাকে লেখা হয় 90°)। তাহা হইলে A, B, C, D কোণগুলির প্রত্যেকটির পরিমাণ 4 সমকোণ বা 360° অপেক্ষা কম ; অবস্থা অনুসারে উহাদের চিহ্ন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে। সেক্ষেত্রে E কোণের পরিমাণ 360° অপেক্ষা বেশী। অধিকন্তু OP অর্ধরেখা অন্তিম অবস্থানে আসিবার পূর্বে O বিন্দুর চারিদিকে প্রারম্ভিক অবস্থান নির্দেশক OX অর্ধরেখার মধ্য দিয়া যে কোন সংখ্যক পূর্ণ ঘূর্ণন সম্পন্ন করিতে পারে এবং এইভাবে ত্রিকোণমিতিতে যে কোন পরিমাণের কোণ হইতে পারে। একটি বিশেষক্ষেত্রে যখন OP অর্ধরেখা আদৌ গতিশীল না হইয়া আদি ও অন্তিম উভয় অবস্থানেই OX অর্ধরেখার উপর সমাপতিত থাকে তখন XOP কোণের **মান শূন্য বলা হয়।**

মন্তব্য ঃ

1. ঘূর্ণন দ্বারা গতিশীল অর্ধরেখাটিকে OX হইতে OP অবস্থানে [চিত্র 1.1(*a*)] দুই প্রকারে লওয়া যায় : হয় A কোণের মধ্য দিয়া এবং সেক্ষেত্রে কোণটি ধনাত্মক (ধরা যাক্ +45°), অথবা B কোণের মধ্য দিয়া, যেক্ষেত্রে কোণটি

ঋণাত্মক এবং উহার মান হইবে $-(360^\circ-45^\circ)=-315^\circ$ (যদি $A=+45^\circ$ হয়)। A ও B কোণ দুইটির সম্পর্ক এইরূপ যে উহাদের পরম মান অর্থাৎ সাংখ্য মান দুইটি একত্রে একটি পূর্ণ ঘূর্ণনের সমান : $45^\circ+315^\circ=360^\circ$; এইরূপ বিবেচনায় $\angle XOP$ কে হয় $+45^\circ$ নতুবা -315° মনে করা যায়। অনুরূপে 1.1(*b*) চিত্রে XOP কোণ হয় -60° নতুবা $+300^\circ$, যদি C কোণকে -60° ধরা হয়।

2. ইহা লক্ষণীয় যে, যে সকল কোণের অন্তর 360°র অখণ্ড গুণিতক তাহারা জ্যামিতিক বিচারে পরস্পর অভিন্ন। চিত্র 1.1(*c*) হইতে ইহা পরখ করা যায়।

3. প্রসঙ্গত ইহাও লক্ষ্য করা যায় যে XOX কোণের পরিমাপ হয় 0 অথবা $\pm 360^\circ$, $\pm 720^\circ$, $\pm 3.360^\circ$,…ইত্যাদি।

4. সুতরাং ত্রিকোণমিতিতে সমতলীয় একটি কোণ সম্পর্কে **মনে করা যাইতে পারে যে সমতলে অবস্থিত একটি স্থির বিন্দুর চতুর্দিকে ঐ সমতলস্থ এবং ঐ বিন্দুগামী একটি অর্ধরেখার ঘূর্ণনের ফলে ঐ কোণ উৎপন্ন হইয়াছে** এবং কোনটি ধনাত্মক, ঋণাত্মক, শূন্য অথবা যে কোন মানেরও হইতে পারে।

5. ইউক্লিডিয়ান জ্যামিতিতে কোণের যে ধারণা করা হইয়াছে তাহার সহিত ত্রিকোণমিতিক কোণের পার্থক্য লক্ষণীয়। সেখানে সকল কোণের মান 4 সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং তাহারা সর্বদা ধনাত্মক।

1·3. কোণ পরিমাপের বিভিন্ন পদ্ধতি

পূর্ববর্তী পরিচ্ছেদে দেখা গিয়াছে, সমকোণ মাত্রেই সর্বক্ষেত্রে সমান ; সেইজন্য কোণ পরিমাপের বিভিন্ন পদ্ধতি নির্ভুলভাবে স্থির করিতে ইহাকে উপযুক্ত ভিত্তিরূপে লওয়া যায়। প্রধানত তিনটি পৃথক পদ্ধতির উদ্ভব এইভাবে হইয়াছে, যথা : **ষষ্ঠীমূলক পদ্ধতি, শতমূলক পদ্ধতি এবং বৃত্তমূলক পদ্ধতি।**

ষষ্ঠীমূলক পদ্ধতি (Sexagesimal system)

এই পদ্ধতিতে এক সমকোণের 1/90 ভাগকে 1 ডিগ্রী, এক ডিগ্রীর 1/60 ভাগকে 1 মিনিট এবং 1 মিনিটের 1/60 ভাগকে 1 সেকেণ্ড বলা হয়, অর্থাৎ

1 সমকোণ = 90 ডিগ্রী (সাংকেতিক পদ্ধতিতে লেখা হয় 90°)
1° = 60 মিনিট (সাংকেতিক পদ্ধতিতে লেখা হয় $60'$)
$1'$ = 60 সেকেণ্ড (সাংকেতিক পদ্ধতিতে লেখা হয় $60''$)

এই পদ্ধতি প্রাচীন কাল হইতে চলিয়া আসিতেছে। বহুসংখ্যক জ্যোতিঃশাস্ত্র সম্পর্কীয় তালিকা, নাবিকদের ব্যবহৃত পঞ্জিকা ও ভৌগোলিক মানচিত্র এই পদ্ধতির উপর নির্ভরশীল। ক্ষুদ্রতর অংশে বিভক্তকরণ অধিকাংশে ষষ্ঠীতম অংশের সাহায্যে করা হয় বলিয়া ইহাকে ষষ্ঠীমূলক পদ্ধতি বলা হয়। ইহাকে সাধারণ বা ইংরাজী পদ্ধতিও বলা হয়।

শতমূলক পদ্ধতি (Centesimal system)

এই পদ্ধতিতে ক্ষুদ্রতর অংশে কোণের বিভক্তকরণ শততম অংশের সাহায্যে করা হয়। ইহাকে ফরাসী পদ্ধতিও বলা হয়। এক্ষেত্রে বিভক্তকরণ ও ব্যবহৃত চিহ্নসমূহ নিম্নরূপ :

1 সমকোণ = 100 গ্রেড (সাঙ্কেতিক পদ্ধতিতে লেখা হয় 100^g)
1^g = 100 মিনিট (সাঙ্কেতিক পদ্ধতিতে লেখা হয় $100^`$)
$1^`$ = 100 সেকেণ্ড (সাঙ্কেতিক পদ্ধতিতে লেখা হয় $100^{``}$)

ষষ্ঠীমূলক ও শতমূলক পদ্ধতি দুইটির মধ্যে সম্পর্ক

উভয় পদ্ধতিতেই মিনিট ও সেকেণ্ড শব্দ দুইটি ব্যবহৃত হয়। সুতরাং উভয় ক্ষেত্রে ইহাদের পার্থক্য বুঝাইবার জন্য শতমূলক পদ্ধতিতে ইহাদের যথাক্রমে শতমূলক মিনিট ও শতমূলক সেকেণ্ড বলিয়া উল্লেখ করা হইবে ; এবং

1 সমকোণ = $90^\circ = 100^g$ বা $9^\circ = 10^g$ এই সম্পর্কের সাহায্যে এক পদ্ধতিতে প্রকাশিত কোণকে অপর পদ্ধতিতে প্রকাশ করা হইবে।

বৃত্তমূলক পদ্ধতি

বৃত্তমূলক পদ্ধতির মূলে হইল রেডিয়ান। রেডিয়ান অপেক্ষাকৃত কম পরিচিত, কিন্তু বর্তমান ও গণিতের অন্যান্য গ্রন্থের পক্ষে একটি মৌলিক ও অপরিহার্য একক। রেডিয়ান সম্পর্কে আলোচনা শুরু করার পূর্বে কিছু প্রয়োজনীয় তথ্য জানা আবশ্যক। এইরূপ একটি সুপরিচিত তথ্য হইল : **যে কোন বৃত্তের পরিধি ও উহার ব্যাসের অনুপাত সকল বৃত্তের ক্ষেত্রে এক।** এই ধ্রুবক অনুপাতকে গ্রীক অক্ষর π দ্বারা সূচিত করা হয়। ইহার অর্থ :

$$\frac{\text{কোন বৃত্তের পরিধি}}{\text{ঐ বৃত্তের ব্যাস}} = \text{ধ্রুবক} = \pi \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{তথ্য 1}$$

বিভিন্ন প্রণালীতে π এর সাংখ্য মান দশমিক চিহ্নের পর যে কোন স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করা সম্ভব, কিন্তু ইহা বর্তমান গ্রন্থের আলোচ্য সূচীর বহির্ভূত। যাহা হউক, ইহা মনে রাখিলেই আশু উদ্দেশ্য সিদ্ধ হইবে যে π এর একটি সাধারণ আসন্ন মান 22/7, এবং সূক্ষ্মতর আর একটি মান 355/133 ; আবার দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত একটি মান 3·14159 (প্রায়) এবং আরও সূক্ষ্ম মান 3·1415926536.

সুতরাং বৃত্তের পরিধি c, ব্যাস d এবং ব্যাসার্ধ r হইলে

$$\frac{c}{d} = \pi, \text{ বা } c = \pi d = \pi.2r = 2\pi r.$$

অর্থাৎ বৃত্তের পরিধি = $2\pi \times$ ব্যাসার্ধ ··· ··· তথ্য 2

স্বতঃসিদ্ধ হিসাবে গ্রহণযোগ্য আর একটি তথ্য এস্থলে বিবৃত হইল :

কোন বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণগুলি, উহারা যে যে বৃত্তচাপের উপর দণ্ডায়মান, তাহাদের সমানুপাতী। ··· ··· তথ্য 3

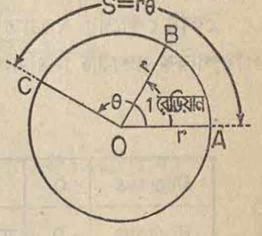
এখন রেডিয়ানের সংজ্ঞা ও প্রথম প্রতিজ্ঞাটির প্রমাণ দেওয়া হইল।

সংজ্ঞা : যে কোণের শীর্ষ কোন বৃত্তের কেন্দ্র Oতে (চিত্র 1.2 দ্রষ্টব্য) অবস্থিত এবং বাহুদ্বয় পরিধি হইতে বৃত্তটির ব্যাসার্ধের সমান দীর্ঘ চাপ ছিন্ন করে তাহাকে এক রেডিয়ান বলে।

প্রতিজ্ঞা 1. এক রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ।

প্রমাণ : ধরা যাক, কোন বৃত্তের কেন্দ্র O, ব্যাসার্ধ r (চিত্র 1.2) এবং চাপ AB = ব্যাসার্ধ $= r$, তাহা হইলে সংজ্ঞা অনুসারে $\angle AOB = 1$ রেডিয়ান।

যেহেতু কেন্দ্রস্থ কোণগুলি, উহারা যে যে চাপের উপর দণ্ডায়মান, তাহাদের সমানুপাতী (তথ্য 3),



চিত্র 1.2

সুতরাং $\dfrac{\angle AOB}{\text{AB চাপ}} = \dfrac{360^\circ}{\text{পরিধি}}$

$\therefore \quad \angle AOB = 360^\circ \times \dfrac{r}{2\pi r} = \dfrac{180^\circ}{\pi}$

বা 1 রেডিয়ান $= \dfrac{180^\circ}{\pi}$ বা ধ্রুবক।

অতএব, প্রতিজ্ঞাটি প্রমাণিত হইল।

কখনও কখনও 1 রেডিয়ান বুঝাইতে 1^c এই প্রতীক চিহ্ন ব্যবহৃত হয়। সুতরাং $\pi^c = \pi$ রেডিয়ান। কোন কোণের অন্তর্গত রেডিয়ান সংখ্যাকে কোণটির **রেডিয়ান মান বা বৃত্তমূলক মান** বলা হয়।

ষষ্ঠীমূলক ও বৃত্তমূলক পদ্ধতি দুইটির সম্পর্ক

প্রতিজ্ঞা 1 হইতে পাওয়া যায়, 1 রেডিয়ান্ $= \dfrac{180^\circ}{\pi} = \dfrac{180^\circ}{3{\cdot}14159}$ (প্রায়)

$= 57{\cdot}29577$ ডিগ্রী (প্রায়)

$= 57^\circ 17' 44{\cdot}8''$ (প্রায়)

অথবা স্থূলভাবে, 1 রেডিয়ান $= 57^\circ 17' 45''$.

আবার $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $= \dfrac{3{\cdot}14159}{180}$ রেডিয়ান $= 0{\cdot}0174533$ রেডিয়ান (প্রায়)

বৃত্ত চাপ, কোণ এবং রেডিয়ানের মধ্যে সম্বন্ধ : বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য

প্রতিজ্ঞা 2. r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে θ রেডিয়ান মানের কেন্দ্রস্থ কোণ s দৈর্ঘ্যের চাপ ছিন্ন করিলে $s = r\theta$.

প্রমাণ : চিত্র 1.2 এবং তথ্য 3 দ্রষ্টব্য।

যেহেতু বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণসমূহ, উহারা যে চাপগুলির উপর দণ্ডায়মান, তাহাদের সহিত সমানুপাতী,

সুতরাং $\dfrac{\angle AOB}{\text{AB চাপ}} = \dfrac{\angle AOC}{\text{AC চাপ}}$, বা $\dfrac{1 \text{ রেডিয়ান}}{r} = \dfrac{\angle AOC}{s}$,

অর্থাৎ $\angle AOC = \dfrac{s}{r}$ রেডিয়ান

কিন্তু $\angle AOC = \theta$ রেডিয়ান ; $\therefore \quad \theta = \dfrac{s}{r}$, বা $s = r\theta$

অতএব প্রতিজ্ঞাটি প্রমাণিত হইল।

দেখা গেল, **বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য = ব্যাসার্ধ × কেন্দ্রস্থ কোণের রেডিয়ান সংখ্যা।**

লক্ষ্য করিতে হইবে যে s এবং r কে যে কোন সুবিধাজনক দৈর্ঘ্যের এককে মাপা যাইতে পারে, কিন্তু উভয় দৈর্ঘ্যকে একই এককে প্রকাশ করিতে হইবে।

তিনটি পদ্ধতির মধ্যে সম্পর্ক

কোন কোণের অন্তর্গত ডিগ্রী সংখ্যা, রেডিয়ান সংখ্যা এবং গ্রেড সংখ্যার মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্কটি নিম্নলিখিত তালিকার আকারে প্রকাশ করা যায় :

তালিকা 1

Degrees	0	30	45	60	90	180	$180/\pi$	1	9/10
Radians	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	1	$\pi/180$	$\pi/200$
Grades	0	100/3	50	200/3	100	200	$200/\pi$	10/9	1

ইহা হইতে অন্যান্য সম্পর্কগুলি এখন পাওয়া যাইবে।

মন্তব্য :

1. মাথার উপরিভাগে লিখিত c প্রতীক দ্বারা রেডিয়ান মান্ প্রকাশের পদ্ধতি ইতিপূর্বে দেখান হইয়াছে, যেমন 1^c (এক রেডিয়ান)। ইহাকে r প্রতীকের সাহায্যেও প্রকাশ করা যায়, যেমন $1\,r$ (এক রেডিয়ান)। কিন্তু সাধারণত কোন প্রতীকচিহ্ন ব্যতীতই কোণের রেডিয়ান মান প্রকাশ করা (তালিকা দ্রষ্টব্য) হইয়া থাকে। এক্ষেত্রে সাধারণ রীতিই হইল, এইভাবে লিখিত কোণকে রেডিয়ানে প্রকাশিত কোণ হিসাবে ধরিতে হইবে ; যেমন, ত্রিভুজের কোণ তিনটিকে যথাক্রমে A, B, C বলিয়া উল্লেখ করা হইলে লেখা যায় $A+B+C=\pi$.

2. স্মরণ রাখিতে হইবে যে 2π রেডিয়ান এবং 360° একই কোণ, যেখানে সুপরিচিত ধ্রুবক $\pi = 3{\cdot}14159\cdots\cdots$

3. রেডিয়ানের অংশজাত কোন ক্ষুদ্রতর একক নাই। রেডিয়ানের কোন অংশকে দশমিক বা সামান্য ভগ্নাংশের আকারে লেখা হইয়া থাকে। প্রসঙ্গত আরও দুইটি তুল্য রাশি হইল :

$$\left.\begin{aligned} 1' &= 0{\cdot}0003 \text{ রেডিয়ান} \\ 1'' &= 0{\cdot}000005 \text{ রেডিয়ান} \end{aligned}\right\} \text{(প্রায়)।}$$

প্রশ্নমালা 1(A)

অন্য কোন মানের উল্লেখ না থাকিলে নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে $\pi = 3{\cdot}1416$ ধরিবে।

1. নিম্নের প্রত্যেকটি কোণকে রেডিয়ান ও শতমূলক এককে প্রকাশ কর :
(*a*) 1 সমকোণ ; (*b*) 30° ; (*c*) 135° ; (*d*) $125^\circ30'$; (*e*) $42^\circ24'35''$.

[(*e*)এর সমাধান :

$$42°24'35'' = 42° + \frac{24\times60+35}{3600} \text{ ডিগ্রী} = 42{\cdot}41° \text{ (প্রায়)}$$

$$= 42{\cdot}41 \times \frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান} = 42{\cdot}41 \times \frac{3{\cdot}1416}{180} \text{ রেডিয়ান}$$

$$= 0{\cdot}7402 \text{ রেডিয়ান (প্রায়)।}$$

আবার $42°24'35'' = 42{\cdot}41 \times \frac{10}{9}$ গ্রেড $= 47{\cdot}1222$ গ্রেড (প্রায়)

$= 47^g 12' 22''$ (প্রায়)।]

2. প্রত্যেকটি কোণকে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর :

(*a*) $\pi/4$ রেডিয়ান ; (*b*) $5\pi/9$ রেডিয়ান ; (*c*) 2·5 রেডিয়ান ; (*d*) 4/3 রেডিয়ান।

[(*c*)এর সমাধান :

$$2{\cdot}5 \text{ রেডিয়ান} = 2{\cdot}5 \times \frac{180}{\pi} \text{ ডিগ্রী} = \frac{2{\cdot}5 \times 180}{3{\cdot}1416} \text{ ডিগ্রী}$$

$$= 143°14'22'' \text{ (প্রায়)}$$

অথবা, 2·5 রেডিয়ান $= \frac{5}{2}(57°17'45'') = 143°14'22{\cdot}5''$ (প্রায়)।]

3. ষষ্ঠীমূলক মানে প্রকাশ কর :

(*a*) $56^g 87' 50''$; (*b*) $1^g 2' 3''$; (*c*) $37' 5''$.

[(*a*)এর সমাধান :

$$56^g 87' 50'' = 56{\cdot}8750^g = \tfrac{9}{10}(56{\cdot}8750)° = 51{\cdot}1875°$$

$$= 51°\left(\frac{1875\times60}{10000}\right)' = 51°(11+\tfrac{1}{4})' = 51°11'15''.]$$

4. কোণগুলিকে শতমূলীয় মানে প্রকাশ কর :

(*a*) $5\pi/12$ রেডিয়ান ; (*b*) $9\pi/16$ রেডিয়ান ; (*c*) $13\pi/48$ রেডিয়ান।

[(*a*)এর সমাধান :

$$5\frac{\pi}{12} = \left(\frac{5\times200}{12}\right)^g = \left(\frac{250}{3}\right)^g = 83{\cdot}33333 \text{ গ্রেড (প্রায়)}$$

$= 83^g 33' 33{\cdot}3''$ (প্রায়)।]

5. প্রত্যেকটি কোণকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর :

(*a*) $93^g 75'$; (*b*) $37^g 50'$; (*c*) $78^g 12' 50''$.

[(*b*)এর সমাধান :

$$37^g 50' = 37{\cdot}5^g = \frac{75}{2} \times \frac{\pi}{200} \text{ রেডিয়ান} = \frac{3\pi}{16} \text{ রেডিয়ান}$$

$$= \frac{3}{16} \times 3{\cdot}1416 \text{ রেডিয়ান}$$

$$= 0{\cdot}58905 \text{ রেডিয়ান।}]$$

6. (*a*) কোন ত্রিভুজের কোণগুলি 1 : 3 : 5 অনুপাতে আছে ; কোণগুলির রেডিয়ান মান নির্ণয় কর।

(*b*) কোন ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত 2 : 3 : 5 হইলে বৃহত্তম কোণটিকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

7. (*a*) একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে $55°12'36''$ এবং $64°47'24''$ হইলে অবশিষ্ট কোণটিকে শতমূলক মানে প্রকাশ কর।

(*b*) দুইটি কোণের সমষ্টি ও অন্তর যথাক্রমে 80^g এবং $18°$; কোণ দুইটির মান ডিগ্রীতে নির্ণয় কর।

(*c*) কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণের সমষ্টি $114°$; একটি কোণের অন্তর্গত গ্রেডসংখ্যা অপরটির ডিগ্রীসংখ্যার সমান হইলে কোণগুলিকে রেডিয়ানে নির্ণয় কর।

(*d*) একটি কোণের গ্রেড মাপ, ডিগ্রী মাপ ও রেডিয়ান মাপ যথাক্রমে p, q, r হইলে প্রমাণ কর : (*i*) $\frac{p}{10}=\frac{q}{9}=\frac{20r}{\pi}$; (*ii*) $p-q=\frac{20r}{\pi}$

[(*d*)এর **সমাধান :**

(*i*) প্রদত্ত : $p^g=q°=r^c$; কিন্তু $p^g=$এক সমকোণের $\frac{p}{100}$, $q°=$এক সমকোণের $\frac{q}{90}$ এবং $r^c=$এক সমকোণের $2r/\pi$

$$\therefore \frac{p}{100}=\frac{q}{90}=\frac{2r}{\pi}$$

(*ii*) $p=\frac{200r}{\pi}$, $q=\frac{180r}{\pi}$, $\therefore p-q=\frac{20r}{\pi}$.]

(*e*) কোন ত্রিভুজের কোণগুলি সমান্তর শ্রেণীতে আছে। বৃহত্তম কোণটি ক্ষুদ্রতম কোণের তিনগুণ হইলে কোণগুলিকে (*i*) ডিগ্রীতে, (*ii*) গ্রেডে এবং (*iii*) রেডিয়ানে নির্ণয় কর।

8. কোন চতুর্ভুজের কোণগুলি $x°$, $60°$, 60^g এবং $\frac{5\pi}{6}$; x নির্ণয় কর।

9. একটি চতুর্ভুজের কোণগুলি সমান্তর শ্রেণীতে আছে এবং ক্ষুদ্রতম কোণের অন্তর্গত রেডিয়ান সংখ্যা ও বৃহত্তম কোণের অন্তর্গত গ্রেডসংখ্যা π : 600 অনুপাতে আছে। কোণগুলির ষষ্ঠীমূলক মান নির্ণয় কর।

10 একটি ত্রিভুজের A, B, C কোণ তিনটি এইরূপ যে A'র ডিগ্রী পরিমাপ, B'র গ্রেড পরিমাপ এবং C'র বৃত্তমূলক পরিমাপ পরস্পর সমান। প্রত্যেকটি কোণের বৃত্তমূলক মান নির্ণয় কর।

[**সমাধান :** ধরা যাক্ $A=x°$, তাহা হইলে $B=x^g$ এবং $C=x$ রেডিয়ান।

কিন্তু $A+B+C=\pi$

এখন $x^\circ = \frac{\pi x}{180}$ রেডিয়ান ; $x^g = \frac{\pi x}{200}$ রেডিয়ান ;

সুতরাং $\frac{\pi x}{180} + \frac{\pi x}{200} + x = \pi$ এবং তাহা হইলে $x = \frac{1800\pi}{1800+19\pi}$

$\therefore \quad A = x^\circ = \frac{\pi x}{180} = \frac{\pi}{180} \times \frac{1800\pi}{1800+19\pi} = \frac{10\pi^2}{1800+19\pi}$

অনুরূপে $B = x^g = \frac{9\pi^2}{1800+19\pi}$ এবং $C = x$ রেডিয়ান $= \frac{1800\pi}{1800+19\pi}$.]

11. দুইটি ত্রিভুজের প্রত্যেকটির কোণগুলি গুণোত্তর শ্রেণীতে আছে ; একটির ক্ষুদ্রতম কোণ অপরটির ক্ষুদ্রতম কোণের তিনগুণ এবং বৃহত্তম কোণ দুইটির সমষ্টি 240° ; প্রত্যেকটি কোণের রেডিয়ান মান নির্ণয় কর।

প্রশ্নমালা 1(B)

[নিম্নলিখিত ক্ষেত্রগুলিতে $\pi = \frac{22}{7}$ ধর]

1. একটি বৃত্তের ব্যাস 6000 কি.মি. ; উহার পরিধি নির্ণয় কর।

[**সমাধান ঃ** পরিধি $= 2\pi \times$ ব্যাসার্ধ $= 2\pi \times 3000$ কি. মি.

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3000$ কি.মি.

$= 18857\frac{1}{7}$ কি. মি. (অনুচ্ছেদ 1·3, তথ্য 2)।]

2. কোন বৃত্তাকার পথ বরাবর সম্পূর্ণ 4 পাক দৌড়াইলে এক দৌড়বীর **1 কি.মি.** দূরত্ব অতিক্রম করে ; পথটির ব্যাসার্ধ কত ?

3. কোন ট্রেনের চালনাকারী চাকার ব্যাসার্ধ 140 সে.মি.। **চাকাটি প্রতি মিনিটে** 360 বার আবর্তন করিলে ট্রেনটির গতিবেগ প্রতি ঘণ্টায় কত কিলোমিটার হইবে ?

[**সমাধান ঃ** প্রতি আবর্তনে চাকা $2\pi \times 140$ সে. মি. যায়

$\therefore$ প্রতি মিনিটে ট্রেন $280\pi \times 360$ সে. মি. যায়

সুতরাং প্রতি ঘণ্টায় ট্রেনটির বেগ $= \frac{280\pi \times 360 \times 60}{100 \times 1000}$ কি. মি.

$= 190{\cdot}08$ কি. মি.।

4. 70 মিটার ব্যাসবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার পথে ধাবমান এক ব্যক্তি 22 সেকেণ্ডে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাহা কেন্দ্রে 144° কোণ উৎপন্ন করে ; ঐ ব্যক্তির দৌড়ের বেগ নির্ণয় কর।

[**সমাধান ঃ** প্রতিজ্ঞা 2, অনুচ্ছেদ 1·3 দেখ।

$s = r\theta = 35 \times \frac{4\pi}{5} = 28 \times \left(\frac{22}{7}\right) = 88$ মিটার, কারণ $144^\circ = \frac{4\pi}{5}$.

ঐ ব্যক্তি এই দূরত্ব অতিক্রম করে 22 সেকেণ্ডে,

অতএব, তাহার নির্ণেয় বেগ $= \frac{88}{22} \times \frac{60 \times 60}{1000}$ বা 14·4 কি মি./ঘণ্টা।]

5. একটি গরু রজ্জুর সাহায্যে একটি খুঁটির সহিত বাঁধা আছে। রজ্জুটিকে সর্বদা টানটান রাখিয়া একটি বৃত্তাকার পথে চলিতে চলিতে গরুটি যখন 88 সে.মি. দীর্ঘ পথ অতিক্রম করিল তখন ঐ পথ বৃত্তটির কেন্দ্রে 72° কোণ উৎপন্ন করিল। রজ্জুটির দৈর্ঘ্য কত ?

6. একটি বৃত্তের কেন্দ্রে 30° কোণ ধারণক্ষম চাপ অপর একটি বৃত্তের কোনও চাপের দ্বিগুণ এবং দ্বিতীয় বৃত্তটির ব্যাসার্ধ প্রথমটির ব্যাসার্ধের তিনগুণ। দেখাও যে দ্বিতীয় বৃত্তটির ঐ চাপ কেন্দ্রে 5° কোণ ধারণ করে।

7. কোন ঘড়ির মিনিটের কাঁটা 12 সে.মি. দীর্ঘ। কাঁটাটির অগ্রভাগ 20 মিনিট সময়ে কত দূরত্ব যাইবে ?

[**সমাধান :** 20 মিনিটে কাঁটাটি 120° বা $\frac{2\pi}{3}$ কৌণিক দূরত্ব যায়,

সুতরাং কাঁটাটির অগ্রভাগ s দূরত্ব যাইলে

$s=r\theta=12\left(\frac{2\pi}{3}\right)=25\frac{1}{7}$ সে. মি.।]

8. 4 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি চাকা প্রতি মিনিটে 80 বার আবর্তন করিতেছে। বেড়ের (rim) উপর অবস্থিত একটি বিন্দু 1 সেকেণ্ডে কত দূরত্ব যাইতেছে ? (অর্থাৎ বিন্দুটির রৈখিক বেগ কত ?)

9. একটি মোটরের চাকার ব্যাস 77 সে.মি.। মোটরটির বেগ প্রতি ঘণ্টায় 72·6 কিলোমিটারে স্থির থাকিলে চাকাটি উহার অক্ষের চারিদিকে কি বেগে ঘুরিবে ? (অর্থাৎ প্রতি মিনিটে আবর্তন সংখ্যা কত হইবে ?)

10. সূর্যের চারিদিকে পৃথিবীর কক্ষপথে উহার (পৃথিবীর) বেগ প্রতি সেকেণ্ডে কত তাহা কিলোমিটারে নির্ণয় কর। দেওয়া আছে—পৃথিবীর প্রদক্ষিণ পথের ব্যাসার্ধ 15 কোটি কিলোমিটার এবং 1 বৎসর = 365 দিন।

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1(A)

1. (*a*) $\frac{\pi}{2}$ বা 1·5708 রেডিয়ান, 100^{g} ; (*b*) $\frac{\pi}{6}$ বা 0·5236 রেডিয়ান ; $33^{g}33^{`}33{\cdot}3^{``}$ ; (*c*) $3\pi/4$ বা 2·3562 রেডিয়ান, $150^{g}$ ; (*d*) 2·19 রেডিয়ান, $139^{g}44^{`}44{\cdot}4^{``}$.

2. (*a*) 45° ; (*b*) 100° ; (*d*) $76^\circ23'39{\cdot}7''$ বা $76^\circ23'40''$ (প্রায়)।

3. (*b*) $55'5{\cdot}8''$ (প্রায়) ; (*c*) $20'0{\cdot}4''$.

4. (*b*) $112^{g}50^{`}$ ; (*c*) $54^{g}16^{`}66{\cdot}6^{``}$ (প্রায়)।

5. (*a*) $15\pi/32$ বা 1·472625 ; (*c*) $25\pi/64$ বা 1·2272.

6. (*a*) $\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{9}$; (*b*) $\frac{\pi}{2}$.

7. (*a*) $66^g 66' 66{\cdot}6''$; (*b*) $45^\circ, 27^\circ$; (*c*) $\frac{\pi}{3}, 3\pi/10$;

(*e*) $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$; $33\frac{1}{3}^g, 66\frac{2}{3}^g, 100^g$; $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

8. 96°. 9. $45^\circ, 75^\circ, 105^\circ, 135^\circ$.

11. $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}$ এবং $\frac{\pi}{21}, \frac{4\pi}{21}, \frac{16\pi}{21}$.

প্রশ্নমালা 1(B)

2. $39\frac{17}{22}$ মি. । 5. 70 সে.মি. । 8. $16\frac{16}{21}$ সে.মি. । 9. 500 বার/মিনিট।
10. 29·9 কি.মি. (প্রায়)।

2

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
(TRIGONOMETRIC RATIOS)

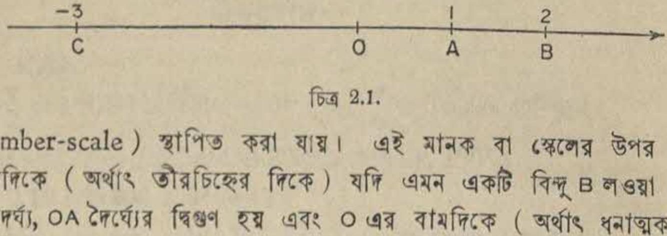
2·1. সূচনা

এই অধ্যায়ে প্রদত্ত কোন কোণের কতিপয় ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের পরিচয় দেওয়া হইবে। কোণটিকে সর্বদা **বাস্তব** বলিয়া গণ্য করা হইবে। বর্তমান অবস্থায় ত্রিকোণমিতির আলোচনা অধিকাংশে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্পর্কিত ধারণাকে কেন্দ্র করিয়াই অগ্রসর হইবে এবং এই অধ্যায়ে ঐ ধারণা ও সংশ্লিষ্ট বিবিধ বিষয় সংক্ষিপ্ত উপায়ে বিবেচনা করা হইবে। পরিশেষে ত্রিকোণমিতির অপেক্ষক রূপের (functional representation) সহিত পরিচিত করা হইবে।

2·2. ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric ratios): জ্যামিতিক সংজ্ঞা (Geometric definitions): চিহ্ন (Signs)

সংখ্যা-মানক (Number scale)

একটি **দিক-নির্দেশিত রেখা (directed line)** লইয়া শুরু করা যাক্। যে রেখার একটি দিককে ধনাত্মক এবং অপর দিককে ঋণাত্মক ধরা হয় তাহাকে দিক-নির্দেশিত বা নিয়ন্ত্রিত রেখা বলা হয়। ধনাত্মক দিকটিকে একটি **তীরচিহ্ন (arrowhead)** দ্বারা নির্দেশ করা হইবে। নিয়ন্ত্রিত রেখাটির উপর **মূলবিন্দু (origin)** বলিয়া কথিত একটি বিন্দু O এবং একক পরিমাণ সূচক একটি দূরত্ব, ধরা যাক্ OA (=1), পছন্দমত লইয়া (চিত্র 2.1) রেখাটির উপর একটি সংখ্যা-মানক

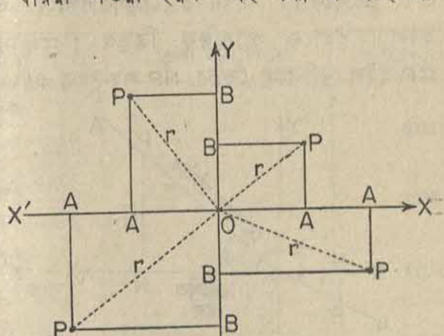


চিত্র 2.1.

(number-scale) স্থাপিত করা যায়। এই মানক বা স্কেলের উপর O এর দক্ষিণদিকে (অর্থাৎ তীরচিহ্নের দিকে) যদি এমন একটি বিন্দু B লওয়া হয় যে OB দৈর্ঘ্য, OA দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ হয় এবং O এর বামদিকে (অর্থাৎ ধনাত্মক দিকের বিপরীত দিকে) যদি C এমন বিন্দু হয় যে OC দৈর্ঘ্য, OA দৈর্ঘ্যের তিনগুন হয়, তবে নিয়ন্ত্রিত দূরত্ব $OB=+2$, এবং নিয়ন্ত্রিত দূরত্ব $OC=-3$ হইবে। প্রসঙ্গত লক্ষ্য করিতে হইবে যে $OB \neq BO$ এবং $OC \neq CO$; কারণ নিয়ন্ত্রিত দূরত্ব $OB=+2$, কিন্তু $BO=-2$ এবং নিয়ন্ত্রিত দূরত্ব $OC=-3$, কিন্তু $CO=3$; তাহা হইলে নিয়ন্ত্রিত দূরত্ব $CB=CO+OB=3+2=5$ এবং $BC=BO+OC=-2-3=-5$.

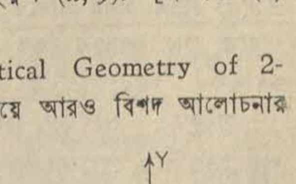
আয়ত স্থানাঙ্ক পদ্ধতি (Rectangular co-ordinate system)

দ্বিমাত্রিক ক্ষেত্রে এই পদ্ধতি অনুসারে **কোন সমতলে** দুইটি সংখ্যা-মানক (অক্ষ বলিয়া অভিহিত) লওয়া হয়—একটি অনুভূমিক এবং অপরটি উল্লম্ব; ইহাদের ছেদবিন্দুকে বলা হয় **মূলবিন্দু।** মূলবিন্দুটি **প্রত্যেক মানকেরও মূলবিন্দু।** 2.2 চিত্রে প্রদর্শিত পদ্ধতিতে (তীরচিহ্ন দ্বারা) প্রত্যেক অক্ষের ধনাত্মক দিক নির্দেশ করাই হইল প্রচলিত রীতি, অর্থাৎ অনুভূমিক অক্ষ বা x-অক্ষ বরাবর O বিন্দুর দক্ষিণদিককে ধনাত্মক এবং উল্লম্ব অক্ষ বা y-অক্ষ বরাবর O বিন্দুর উপরের দিককে ধনাত্মক ধরা হইয়া থাকে। অন্যরূপ বলা না থাকিলে প্রত্যেক অক্ষ সাধারণত একই মাপের একক ধরিয়া লওয়া হয়। এই পদ্ধতির সাহায্যে সমতলটিতে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর অবস্থানকে অক্ষদ্বয় হইতে বিন্দুটির দূরত্ব দুইটির (নিয়ন্ত্রিত) দ্বারা পাওয়া যায়; দূরত্ব দুইটিকে স্থানাঙ্ক (co-ordinates) বলা হয়। P বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক বা **ভুজ (abscissa)** বলা হয় নিয়ন্ত্রিত দূরত্ব BP = OA কে, যেখানে BP হইল P হইতে y-অক্ষের উপর লম্ব, আর y-স্থানাঙ্ক বা **কোটি (ordinate)** বলা হয় নিয়ন্ত্রিত দূরত্ব AP = OB কে, যেখানে AP হইল P হইতে x-অক্ষের উপর লম্ব। কোন বিন্দু P এর ভুজ OA $= x$ এবং কোটি AP $= y$ হইলে P এর অবস্থান নির্দেশ করিতে লেখা হয় P (x, y). [চিত্র 2.2(a) দ্রষ্টব্য]।



চিত্র 2.2(a).

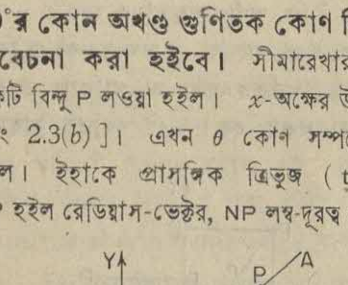
দ্বিমাত্রিক বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতি (Analytical Geometry of 2-dimensions) অধ্যয়নের সময় ছাত্রছাত্রীরা এ বিষয়ে আরও বিশদ আলোচনার সাক্ষাৎ পাইবে। এখন দেখা যায়, অক্ষদ্বয় উহাদের ধারক সমতলটিকে চারিটি অঞ্চলে বিভক্ত করিয়াছে—চিত্র 2.2(b)তে উহাদের প্রদর্শন করা হইয়াছে ও বর্ণনা দেওয়া হইয়াছে। অঞ্চল চারিটি চারিটি পাদ বলিয়া পরিচিত। মূলবিন্দু হইতে যে কোন বিন্দু P এর অনিয়ন্ত্রিত দূরত্ব OP $= r$ কে বলা হয় P এর রেডিয়াস-ভেক্টর (radius-vector)—**ইহাকে সকল সময় ধনাত্মক ধরা হয়, এমন কি উহা যখন ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত কোন দিকের সহিত সর্বাংশে মিলিয়া যায় তখনও।**



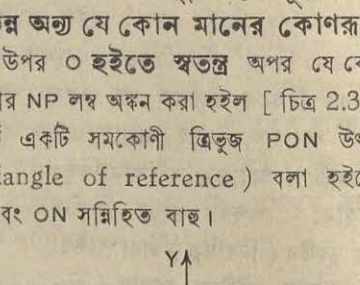
চিত্র 2.2 (b).

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত : সংজ্ঞা

ধরা যাক্ একটি অর্ধরেখা OA প্রারম্ভিক অবস্থানে OX এর সহিত সর্বাংশে মিলিত অবস্থায় আছে। এখন উহা ঘূর্নন-কেন্দ্র Oকে কেন্দ্র করিয়া ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত অভিমুখে ঘুরিয়া θ কোণ উৎপন্ন করিল। ইহার অর্থ, θ কোণ সম্পর্কে OX হইল প্রারম্ভিক রেখা এবং OA সীমারেখা। বর্তমান মুহূর্তে θকে **শূন্য অথবা 90°র কোন অখণ্ড গুণিতক কোণ ভিন্ন অন্য যে কোন মানের কোণরূপে বিবেচনা করা হইবে।** সীমারেখার উপর O **হইতে স্বতন্ত্র** অপর যে কোন একটি বিন্দু P লওয়া হইল। x-অক্ষের উপর NP লম্ব অঙ্কন করা হইল [চিত্র 2.3(a) এবং 2.3(b)]। এখন θ কোণ সম্পর্কে একটি সমকোণী ত্রিভুজ PON উৎপন্ন হইল। ইহাকে প্রাসঙ্গিক ত্রিভুজ (triangle of reference) বলা হইবে। OP হইল রেডিয়াস-ভেক্টর, NP লম্ব-দূরত্ব এবং ON সন্নিহিত বাহু।



চিত্র 2.3(a).



চিত্র 2.3(b).

আলোচনার সুবিধার জন্য এবং বিষয়টির সাধারণ প্রকৃতির কোনরূপ হানি না করিয়া O কে পূর্ববর্ণিত স্থানাঙ্কের মূলবিন্দুরূপে কল্পনা করা হইয়াছে। সুতরাং 2.3(a) চিত্রে প্রথম পাদতে ON এবং NP উভয়েই ধনাত্মক, 2.3(b) চিত্রে দ্বিতীয় পাদতে ON ঋণাত্মক কিন্তু NP ধনাত্মক এবং চতুর্থ পাদতে ON ধনাত্মক কিন্তু NP ঋণাত্মক। অনুরূপে 2.3(a) চিত্রে তৃতীয় পাদতে ON ঋণাত্মক এবং NPও ঋণাত্মক।

সংজ্ঞা : NP/OP, ON/OP, NP/ON, ON/NP, OP/NP, OP/ON এই অনুপাতগুলিকে, যেখানেই উহারা সংজ্ঞাত (defined), θ কোণের যথাক্রমে সাইন (sine), কোসাইন (cosine), ট্যানজেন্ট (tangent), কোট্যানজেন্ট (cotangent), কোসিক্যান্ট (cosecant) এবং সিক্যান্ট (secant) বলিয়া অভিহিত করা হয়। উহাদের যথাক্রমে $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ ($\csc\theta$) এবং $\sec\theta$, এই প্রকার সংক্ষিপ্ত আকারে লেখা হইয়া থাকে। সুতরাং ইহাও লেখা যায় যে

$$\sin\theta=\frac{\text{লম্ব}}{\text{রেডিয়াস-ভেক্টর}}=\frac{NP}{OP};\quad \cos\theta=\frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{রেডিয়াস-ভেক্টর}}=\frac{ON}{OP};$$

$$\tan\theta=\frac{\text{লম্ব}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}=\frac{NP}{ON};\quad \cot\theta=\frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{লম্ব}}=\frac{ON}{NP};$$

$\text{cosec } \theta = \frac{\text{রেডিয়াস-ভেক্টর}}{\text{লম্ব}} = \frac{OP}{NP}$; $\sec \theta = \frac{\text{রেডিয়াস-ভেক্টর}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} = \frac{OP}{ON}$.

ইহা হইতে সঙ্গে সঙ্গে নিম্নে প্রদত্ত সম্পর্কগুলি পাওয়া যায় যথা :—

$$\text{cosec } \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \ \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \ \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

এবং $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$, $\cot \theta = \cos \theta / \sin \theta$.

সাধারণভাবে প্রচলিত উপরের ছয়টি অনুপাতের সংজ্ঞা, তাহাদের তুল্য অনুপাত এবং সংক্ষিপ্ত পরিচয়গুলিকে তালিকার আকারে নিম্নে দেওয়া হইল :

তালিকা 2

নাম	সংজ্ঞা	তুল্য অনুপাত	সংক্ষিপ্ত পরিচয়
sine	লম্ব / রেডিয়াস-ভেক্টর	—	sin
cosine	সন্নিহিত বাহু / রেডিয়াস-ভেক্টর	—	cos
tangent	লম্ব / সন্নিহিত বাহু	sine / cosine	tan
cotangent	সন্নিহিত বাহু / লম্ব	cosine / sine, 1 / tangent	cot
secant	রেডিয়াস-ভেক্টর / সন্নিহিত বাহু	1 / cosine	sec
cosecant	রেডিয়াস-ভেক্টর / লম্ব	1 / sine	cosec, (csc)

এখন সীমারেখা—OX, OY, OX′, OY′এর সহিত সর্বাংশে মিলিয়া যাইবার সময় যে ক্ষেত্রগুলির উদ্ভব হয় তাহাদের সম্পর্কে বিবেচনা করিতে হইবে।

OX, OY, OX′, OY′এর সহিত সম্পূর্ণ মিলিত অবস্থায় সীমারেখা

সীমারেখাটি যখন OX, OY OX′, OY′এর সহিত পর পর সর্বাংশে মিলিয়া যায় তখন সেই সেই পরিপ্রেক্ষিতে উপরে প্রদত্ত সংজ্ঞাগুলির আরও পর্যালোচনার প্রয়োজন আছে। এইরূপ ক্ষেত্রগুলিতে θর মান 0°, 90°, 180°, 270°, 360° অথবা শূন্যসহ 90°এর যে কোন অখণ্ড গুণিতকের সমান হয়। এই কোণগুলিকে পাদ কোণ (quadrantal angles) বলা হয় এবং এই সমস্ত ক্ষেত্রে প্রাসঙ্গিক ত্রিভুজটি (triangle of reference) একটি সরলরেখায় পর্যবসিত হয়। লক্ষণীয় যে এইসব ক্ষেত্রে হয় লম্বটি নতুবা সন্নিহিত বাহুটি মানশূন্য হয়। এই সমস্ত কোণের ক্ষেত্রেও **পূর্বের সংজ্ঞাগুলি** প্রযোজ্য—কেবল যখন হরে শূন্য আসে তখন ঐ সংজ্ঞা অচল, কারণ **কোন অবস্থাতেই শূন্য দ্বারা ভাগের অর্থ নির্ণয় করা যায় নাই।**

উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, tan 90° অসংজ্ঞাত (undefined), কারণ এখানে হর অর্থাৎ "সন্নিহিত বাহু"র দৈর্ঘ্য শূন্য। অনুরূপভাবে cot 0°, cosec 0°, sec 90°, cot 180° এবং এইরূপ আরও অনেক অনুপাত অসংজ্ঞাত। পরবর্তী অধ্যায়ে ইহাদের বিষয়ে আরও পরিষ্কার ধারণা হইবে।

প্রসঙ্গত নিম্নে সময়ে সময়ে ব্যবহৃত আরও দুইটি সংজ্ঞার উল্লেখ করা হইল। যথা :—

ভার্স θ (vers θ) $=1-\cos\theta$ এবং কো-ভার্স θ (covers θ) $=1-\sin\theta$.

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন

OP যদি প্রথম পাদতে থাকে, যেমন 2.3(a) চিত্রে, তাহা হইলে OP, ON এবং NP সকলে ধনাত্মক এবং ফলে ছয়টি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রত্যেকে ধনাত্মক ;

যেমন,

$$\sin\theta=\frac{\text{NP}}{\text{OP}}=\frac{\text{ধনাত্মক রাশি}}{\text{ধনাত্মক রাশি}}=\text{ধনাত্মক রাশি}$$

অন্যান্য ক্ষেত্রেও একই প্রকার হইবে। দ্বিতীয় পাদতে, যেমন, 2.3(b) চিত্রে, NP ধনাত্মক কিন্তু ON ঋণাত্মক ; সুতরাং

$$\sin\theta=\frac{\text{NP}}{\text{OP}}=\frac{\text{ধনাত্মক রাশি}}{\text{ধনাত্মক রাশি}}=\text{ধনাত্মক রাশি}$$

$$\cos\theta=\frac{\text{ON}}{\text{OP}}=\frac{\text{ঋণাত্মক রাশি}}{\text{ধনাত্মক রাশি}}=\text{ঋণাত্মক রাশি}$$

$$\tan\theta=\frac{\text{NP}}{\text{ON}}=\frac{\text{ধনাত্মক রাশি}}{\text{ঋণাত্মক রাশি}}=\text{ঋণাত্মক রাশি}$$

এবং একইভাবে দেখা যায় যে cosec θ ধনাত্মক, কিন্তু sec θ ও cot θ প্রত্যেকে ঋণাত্মক। তৃতীয় পাদতেও সহজেই দেখা যাইবে যে tan θ এবং cot θ উভয়েই ধনাত্মক এবং বাকিগুলি ঋণাত্মক। আর চতুর্থ পাদতে cos θ এবং sec θ উভয়ে ধনাত্মক এবং বাকিগুলি ঋণাত্মক। নিম্নে প্রদত্ত তালিকাটি পাদ চারিটিতে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির চিহ্ন-নির্ণয় সম্পর্কে প্রয়োজনীয় সাহায্য করিবে। পাদ-কোণের (quadrantal angles) ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্পর্কে পরবর্তী অধ্যায়ে আলোচনা করা হইবে।

তালিকা 3

দ্বিতীয় পাদ sin এবং cosec (ধনাত্মক)	প্রথম পাদ সকলে (all) (ধনাত্মক)
তৃতীয় পাদ tan এবং cot (ধনাত্মক)	চতুর্থ পাদ cos এবং sec (ধনাত্মক)

ইহাকে সহজেই নিম্নে প্রদত্ত সরল নিয়মে স্মরণ রাখা যায় :

all, sin, tan, cos ;

সঙ্গে সঙ্গে ইহাও স্মরণ রাখিতে হইবে যে sine, cosine এবং tangent এর মান ধনাত্মক হইলে ইহাদের অন্যোন্যকগুলির, অর্থাৎ যথাক্রমে cosecant, secant এবং cotangent এর মানও ধনাত্মক হইবে, আর বাকিগুলি ঋণাত্মক হইবে।

মন্তব্য :

1. কোন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি সাংখ্য বা সংখ্যা-সূচক রাশিমাত্র অর্থাৎ বস্তুনিরপেক্ষ (abstract) বা বিশুদ্ধ সংখ্যা। ইহারা দৈর্ঘ্য নহে ; প্রত্যেকে দুইটি দৈর্ঘ্যের অনুপাত এবং সেইজন্য দৈর্ঘ্য দুইটিকে একই এককে পরিমাপ করিতে হইবে।

2. যাচাই করিয়া দেখা যায় যে $\sin \theta = \sin (360° + \theta) = \sin (\theta - 360°)$, $\cos \theta = \cos (720° + \theta)$, $\tan 20° = \tan 380°$, $\operatorname{cosec} (-40°) = \operatorname{cosec} 680°$, ইত্যাদি।

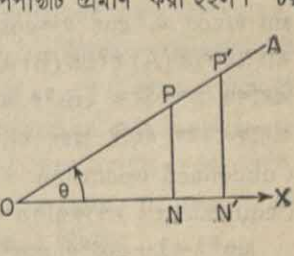
3. θ র পরিবর্তনের সহিত θ র ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মানেরও পরিবর্তন হয়।

এখন দেখা যাইবে, প্রদত্ত কোন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মান কিভাবে সীমারেখার উপর P বিন্দুর অবস্থান-স্থল সম্পর্কে **নিরপেক্ষ** (independent)।

2·3. একই কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি ধ্রুবক : অনন্যতা (Uniqueness)

উপপাদ্য। প্রদত্ত কোন কোণ θর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মানসমূহ যদি বিদ্যমান হয় (if they exist), তবে উহারা কোণটির সীমারেখার উপর কোন্ স্থানে P বিন্দু অবস্থিত তাহার উপর নির্ভর করে না।

প্রমাণ। θ কে ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ ধরিয়া উপপাদ্যটি প্রমাণ করা হইল। θর অন্যান্য সকল মানের ক্ষেত্রেও অনুরূপভাবে উহা প্রমাণ করা যাইবে।



চিত্র 2.4

পার্শ্বস্থ চিত্র 2.4-এ θ একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ। সীমারেখা OA এর উপর P এবং P′ দুইটি বিন্দু লওয়া হইল। প্রারম্ভিক সরলরেখার উপর NP এবং N′P′ লম্ব অঙ্কন করা হইল।

এখন যেহেতু $\angle ONP$ = এক সমকোণ = $\angle ON'P'$, $\angle NOP = \theta = \angle N'OP'$,

$\therefore \angle OPN = \angle OP'N'$.

সুতরাং OPN এবং OP'N' ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ অর্থাৎ উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী।

$$\therefore \quad \frac{NP}{OP}=\frac{N'P'}{OP'}, \frac{ON}{OP}=\frac{ON'}{OP'}, \frac{NP}{ON}=\frac{N'P'}{ON'}.$$

আবার, ইহাদের অন্যোন্যক অনুপাতগুলিও সমান। সুতরাং প্রদত্ত কোন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি ধ্রুবক ও অনন্য (unique)।

অতএব, উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

2·4. মৌলিক সূত্রাবলী : ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মানের সীমাবদ্ধতা (Restrictions)

ধরিয়া লওয়া হইল যে নিম্নলিখিত ভগ্নাংশগুলির হর শূন্য ভিন্ন অন্য কোন সংখ্যা। 2.3 চিত্র হইতে পাওয়া যায় যে

$$NP^2+ON^2=OP^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$\text{বা,} \quad \left(\frac{NP}{OP}\right)^2+\left(\frac{ON}{OP}\right)^2=1$$

$$\text{বা,} \quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \quad \cdots \quad \cdots \quad (A)$$

[**অঙ্কপাতন (Notations) :** $(\sin\theta)^2$ কে $\sin^2\theta$, $(\cos\theta)^3$ কে $\cos^3\theta$, $(\tan\theta)^{\frac{2}{5}}$ কে $\tan^{\frac{2}{5}}\theta$ ·····এইরূপ লেখা হইয়া থাকে।]

(1) হইতে ইহাও পাওয়া যায় যে

$$1+\left(\frac{NP}{ON}\right)^2=\left(\frac{OP}{ON}\right)^2$$

$$\text{বা,} \quad 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta \quad \cdots \quad \cdots \quad (B)$$

NP^2 দ্বারা ভাগ করিয়া (1) হইতে পাওয়া যায় যে

$$1+\left(\frac{ON}{NP}\right)^2=\left(\frac{OP}{NP}\right)^2$$

$$\text{বা,} \quad 1+\cot^2\theta=\text{cosec}^2\theta \quad \cdots \quad \cdots \quad (C)$$

তালিকা 2-এ প্রদত্ত সম্পর্কগুলি যদি স্মরণ করা যায়, যথা : $\tan\theta=\sin\theta/\cos\theta$, $\cot\theta=\cos\theta/\sin\theta$, $\sec\theta=1/\cos\theta$ ইত্যাদি, তবে ইহাদের সাহায্যে সূত্র (A) হইতে (B) এবং (C) সূত্র দুইটি নির্ণয় করা যায়। যেমন, (A)তে প্রদর্শিত সম্পর্কটিকে $\cos^2\theta$ দ্বারা ভাগ করিয়া (B) সম্পর্কটি পাওয়া যায়। এ প্রসঙ্গে কেবল ইহাই স্মরণ রাখিতে হইবে যে শূন্য দ্বারা ভাগ একটি অসংজ্ঞেয় কার্য (undefined operation)। (A) হইতে (C) সূত্র তিনটি হইতে নিম্নলিখিত তুল্য (equivalent) সম্পর্কগুলিও পাওয়া যায়, যথা :

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta,\ \cos^2\theta=1-\sin^2\theta,\ \sec^2\theta-\tan^2\theta=1=\text{cosec}^2\theta-\cot^2\theta,$$

$\sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$, $\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$, $\sec\theta=\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}$, ইত্যাদি।

পাদকোণসমূহের (quadrantal angles) ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্পর্কে সংশ্লিষ্ট সূত্রগুলি পরে বিষয়টির অগ্রগতির সহিত বিবেচনা করা হইবে।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের মানের সীমা (limits) :

সর্বপ্রথমে কোন কোণ θর sine এবং cosine অনুপাতের মানের কোন সীমাবদ্ধতা আছে কি না এবং থাকিলে তাহা কি, সে সম্পর্কে বিবেচনা করা যাক্। যেহেতু সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ বৃহত্তম বাহু, সুতরাং 2.3 চিত্রে প্রাসঙ্গিক ত্রিভুজ (triangle of reference) OPNএর রেডিয়াস-ভেক্টর OP, ON এবং NPএর সংখ্যাগত পরম মান দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর। কেবল পাদকোণসমূহের (quadrantal angles) ক্ষেত্রে ON অথবা NPএর সংখ্যাগত পরম মান OPএর সমান হইতে পারে। সুতরাং $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ প্রত্যেকের সংখ্যাগত পরম মান, 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অথবা 1এর সমান। ইহার অর্থ এই যে

$$-1 \leq \sin\theta \leq +1 \text{ এবং } -1 \leq \cos\theta \leq +1.$$

(A) হইতেও ভিন্ন পদ্ধতিতে এই সম্পর্কগুলি প্রমাণ করা যায় ; যথা :

যেহেতু $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ এবং $\sin^2\theta$ ও $\cos^2\theta$ উভয়ে অ-ঋণাত্মক রাশি, সুতরাং অবশ্যই

$$-1\leq \sin\theta, \cos\theta\leq +1, \text{ বা, } |\sin\theta| \leq 1 \text{ এবং } |\cos\theta| \leq 1.$$

['মডিউলাস' বা পরম মানের অঙ্কপাতন (Notation) প্রয়োগ করিয়া।]

এখন $\operatorname{cosec}\theta$ এবং $\sec\theta$ যথাক্রমে $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$র অন্যোন্যক (reciprocal) বলিয়া ইহাদের সংখ্যাসূচক পরম মান অবশ্যই 1 অপেক্ষা বৃহত্তর অথবা 1এর সমান হইবে। ইহার অর্থ এই যে,

$$\operatorname{cosec}\theta, \sec\theta\geqslant 1 \text{ এবং } \leq -1, \text{ বা } |\operatorname{cosec}\theta| \geqslant 1 \text{ এবং } |\sec\theta| \geqslant 1.$$

কিন্তু $\tan\theta$ এবং $\cot\theta$র **সকল** ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক মান থাকিতে পারে।

2·5. অপেক্ষক সংক্রান্ত সংজ্ঞাসমূহ (Functional Definitions) :

বাস্তব চলরাশি (real variable), স্থির (fixed) এবং ইচ্ছামত নির্বাচিত (arbitrary) ধ্রুবক, অপেক্ষক (function), অপেক্ষকের কার্যকারিতার ক্ষেত্র বা এলাকা (domain of definition of a function) প্রভৃতির সংজ্ঞাগুলির সহিত বীজগণিত অধ্যয়নকালে ছাত্রছাত্রীরা পরিচিত হইয়াছে। এস্থলে কেবল খুবই সংক্ষিপ্ত আকারে একটিমাত্র বাস্তব চলের অপেক্ষক (function of a single real variable) সম্বন্ধে কতিপয় ধারণার (notion) কথা স্মরণ করাইয়া দেওয়া হইবে।

1. মূলদ (rational) ও অমূলদ (irrational) সংখ্যা সামগ্রিকভাবে লইয়া **বাস্তব সংখ্যামণ্ডল** (system of real numbers) গঠিত।

2. বাস্তব সংখ্যার কোন একটি সেট্ (set) S বিবেচনা করা যাক্। x যদি এই সেটের যে কোন একটি **অনির্দিষ্ট** (unspecified) সভ্য (member) হয় এবং উহার দ্বারা যদি S এর প্রত্যেক সভ্যকে **পর্যায়ক্রমে** (in turn) বুঝান যায় তবে x

একটি বাস্তব চল (real variable), আর ঐ প্রত্যেক সভ্যকে বলা হয় x এর **মান** (values)। x এর সমগ্র মানের ধারক ঐ সেট Sকে বলা হয় x এর মানের **ব্যাপ্তি** (range) বা **এলাকা** (domain)—বলা হয়, এই ব্যাপ্তি বা এলাকার মধ্যেই x পরিবর্তিত হয়।

3. যখন কোন বাস্তব চল x, দুইটি প্রদত্ত বাস্তব সংখ্যা a এবং b এর মধ্যবর্তী সমুদয় বাস্তব মান গ্রহণ করে তখন বলা হয় যে x, a হইতে b এর অন্তর্বর্তী দেশে (in the interval from a to b) **অবিচ্ছিন্নভাবে** (continuously) **পরিবর্তিত হয়।**

4. নির্দিষ্ট সংখ্যাসমূহকে (যেমন 2, −3, $\sqrt{5}$ প্রভৃতি) **ধ্রুবক** বলা হয়। যে কোন গাণিতিক তথ্য পরীক্ষা বা অনুসন্ধান (under any set of mathematical investigations) কালে এইরূপ রাশিগুলি স্থির থাকে বলিয়া ইহাদের **স্থির** (fixed) বা **শর্তনিরপেক্ষ** (absolute) ধ্রুবক বলা হয়। কখনও কখনও কোন একটি বিশেষ গাণিতিক তথ্য পরীক্ষা বা অনুসন্ধানের সময় **প্রথম হইতে শেষ পর্যন্ত কতকগুলি সাংখ্য বা সংখ্যাসূচক রাশিকে (numerical quantities) স্থির বলিয়া ধরিয়া লইতে হয়** এবং উহাদের নির্দেশ করিবার জন্য a, b, c, d, l, m, n প্রভৃতি প্রতীক ব্যবহার করা হয়। এইগুলিকে ইচ্ছামত নির্বাচিত ধ্রুবক (arbitrary constants) বলা হয়।

5. **কোন একটি নিয়মসূত্রে পরস্পর বদ্ধ** (related by some rule) দুইটি বাস্তব চল x এবং y সম্বন্ধে বিবেচনা করা যাক্। বাস্তব সংখ্যার কোন একটি সেট্ S এর ব্যাপ্তি বা এলাকা মধ্যস্থ x এর **প্রতিটি মানের জন্য** যদি y এর **একটি মাত্র নির্দিষ্ট** মান পাওয়া যায়, তবে বলা হয় যে x এর S ব্যাপ্তির মধ্যে y, x এর অপেক্ষক (y is a function of x over S)। সেট্ Sকে বলা হয় অপেক্ষকটির কার্যকারিতার এলাকা (the domain of definition of the function)। কোন অপেক্ষকমূলক সম্পর্কের (functional relation) ক্ষেত্রে যে চলটির মান ইচ্ছামত ধার্য করা হয় তাহাকে **স্বাধীন চল** (independent variable) বলা হয় এবং অপর চলটিকে **অধীন চল** (dependent variable) বলা হয়।

'ক্যালকুলাস' (Calculus) বা কলনগ্রন্থ পড়িবার সময় এইগুলি সম্পর্কে ধারণা স্পষ্ট হইবে (লেখকদ্বয়ের Calculus পুস্তক দ্রষ্টব্য)। কোন অপেক্ষক সম্পর্কে অত্যাবশ্যক বিষয়টি হইল এই যে যখন স্বাধীন চল x এর উহার এলাকাধীন কোন মান ধার্য করা হয়, তখন অপর চল y এর মান যেন **দ্ব্যর্থহীনভাবে (uniquely) নির্ণীত হয়।** উদাহরণস্বরূপ দুইটি চল x এবং y সম্পর্কে একটি সমীকরণ $y=3x+2$ লওয়া হইল। ইহা x এবং y এর মধ্যে একটি অপেক্ষকমূলক সম্পর্ক—এখানে xকে স্বাধীন চল মনে করা যায়, সুতরাং y তখন অধীন চল। এই অপেক্ষকটির কার্যকারিতার এলাকা হইল সমুদয় বাস্তব সংখ্যার সেট। যেমন $x=2$ লইলে, সম্পর্কটি হইতে y এর একটি এবং কেবলমাত্র একটি মান পাওয়া যায়। যথা : $3.2+2=8$; সুতরাং $x=2$ লইলে

4 হইল অপেক্ষকটির মান। অপেক্ষকমূলক সম্পর্ককে নির্দিষ্টরূপে প্রকাশ করিবার জন্য ইচ্ছামত অক্ষর ব্যবহার করা যায়। প্রায়ই ব্যবহৃত দুইটি অক্ষর হইল f এবং F ("function"এর আদি অক্ষর), কিন্তু g, h, ϕ, ψ প্রভৃতিও ব্যবহৃত হয়। তবে কোন একটি প্রদত্ত প্রশ্নে f সর্বদা একই সম্পর্ককে নির্দেশ করিবে; ভিন্ন সম্পর্ককে নির্দেশ করিবার জন্য ভিন্ন একটি অক্ষর ব্যবহার করিতে হইবে। এখন উপরের উদাহরণটিকে তাহা হইলে লেখা যায় $y=f(x)=3x+2$.

এখন ত্রিকোণমিতিক সম্পর্ক বিষয়ে ফিরিয়া আসা যাক্। সর্বপ্রথমে বিবেচনা করা যাক নিম্নে প্রদত্ত সম্পর্কটি। যথা :

$$y=\sin x.$$

এখানে জানিতে আগ্রহ হইবে যে x দেওয়া থাকিলে $\sin x$ বা y কিভাবে নির্ণয় করা হয়। দুইটি সংখ্যাসূচক চল x এবং yএর মধ্যে অপেক্ষকমূলক সম্পর্কটি সুস্পষ্টভাবে নির্দেশ করিবার পক্ষে কেবল $y=\sin x$ এই উক্তিটি যথেষ্ট নয়, যদি না স্বীকার করিয়া লওয়া হয় যে x একটি কোণ, যেমন x রেডিয়ান। এক্ষেত্রে তাহাই করা হইবে অর্থাৎ স্বীকার করিয়া লওয়া হইল যে

$y=\sin x$, যেখানে x কে রেডিয়ানে প্রকাশ করা হইয়াছে।

ইতিপূর্বে দেখা গিয়াছে যে যখনই xএর একটি বাস্তব মান ধার্য করা হয়, $\sin x$ এর মান দ্ব্যর্থহীনভাবে (uniquely) নির্ণীত হয় (পরবর্তী অধ্যায়গুলিতে ইহা পরিষ্কার বুঝা যাইবে)। সুতরাং বলা যায় যে $y=\sin x$ হইল x এবং y এর মধ্যে একটি অপেক্ষকমূলক সম্পর্ক এবং অপেক্ষকটির কার্যকারিতার এলাকা সকল বাস্তব সংখ্যার সেট্। অনুরূপ xএর সকল বাস্তব মানের ক্ষেত্রে $y=\cos x$ হইল x ও y এর মধ্যে একটি অপেক্ষকমূলক সম্পর্ক। x এর যে মানগুলির জন্য $\cos x=0$, সেই মানগুলি ভিন্ন x এর অবশিষ্ট সকল বাস্তব মানের জন্য $y=\tan x$ এবং $y=\sec x$ হইল x ও yএর মধ্যে অপেক্ষকমূলক সম্পর্ক। একইভাবে x এর যে মানগুলির ক্ষেত্রে $\sin x=0$ সেইগুলি ভিন্ন x এর অবশিষ্ট সকল বাস্তব মানের জন্য $y=\cot x$ এবং $y=\operatorname{cosec} x$ হইল x এবং y এর মধ্যে অপেক্ষকমূলক সম্পর্ক। ছাত্রছাত্রীরা ইহাদের তাৎপর্য পরে অনুধাবন করিবে।

এ-পর্যন্ত সম্পূর্ণ জ্যামিতিক অনুপাতরূপে অপেক্ষকগুলির আলোচনা করা হইল। ছাত্রছাত্রীগণের কৌতূহল নিবৃত্তির জন্য এখানে বলা যাইতে পারে যে অসীম শ্রেণীরূপেও sine এবং cosine অপেক্ষকগুলিকে (সুতরাং অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক) নির্দিষ্টরূপে ব্যাখ্যা করা সম্ভব। যেমন—

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

অপেক্ষকগুলির অন্যান্য সংজ্ঞাও বর্তমান। কিন্তু এইগুলি বর্তমান পুস্তকের আলোচ্য বিষয় বহির্ভূত।

প্রশ্নমালা II(A)

1. আয়ত স্থানাঙ্ক পদ্ধতি (rectangular co-ordinate system) সম্পর্কে একটি কোণকে **প্রচলিত আদর্শ অবস্থানে** (in standard position) অবস্থিত বলা হয়, যখন উহার শীর্ষ মূল বিন্দুতে এবং প্রারম্ভিক রেখা (initial line) x-অক্ষের ধনাত্মক অংশের সহিত মিলিত অবস্থায় থাকে এবং এইরূপ আদর্শ অবস্থানে অবস্থিত দুইটি কোণের সীমারেখা (bounding lines) দুইটি যদি পরস্পর মিলিয়া যায় তবে কোণ দুইটিকে **সম-প্রান্তরেখ বা সম-সীমারেখ (co-terminal)** বলা হয়। এই সংজ্ঞা অনুসারে নিম্নলিখিত কোণগুলি হইতে প্রতিটি সম-সীমারেখ কোণযুগল নির্ণয় কর :

$30°, 126°, -330°, 212°, -954°, 572°, 5°, 725°, -36°, 324°.$

[সমাধান : $30°$ এবং $-330° = 30° - 360°$ হইল সম-সীমারেখ কোণদ্বয়। তদ্রূপ $126°$ এবং $-954° = 126° - 3.360°$; $212°$ এবং $572° = 212° + 360°$; $5°$ এবং $725° = 5° + 2.360°$; $-36°$ এবং $324° = 360° - 36°$ সম-সীমারেখ কোণদ্বয়সমূহ।]

2. নিম্নের প্রত্যেকটি কোণের সহিত সম-সীমারেখ চারিটি কোণ নির্ণয় কর :
$10°, 100°, -20°, -400°$ এবং $270°$.

3. নিম্নলিখিত শর্ত অনুসারে θ কোণের সীমারেখা কোন্ পাদ বা পাদসমূহে অবস্থিত হইবে তাহা নিম্নের তালিকায় টিক ($\surd$) চিহ্ন দ্বারা দেখাও :

(*a*) $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ উভয়ে ঋণাত্মক ; (*b*) $\sin\theta$ ঋণাত্মক, $\cos\theta$ ধনাত্মক ;
(*c*) $\sin\theta = +, \cos\theta = -$; (*d*) $\sin\theta = +, \tan\theta = +$;
(*e*) $\tan\theta = +, \sec\theta = -$; (*f*) $\sec\theta = -, \tan\theta = -$;
(*g*) $\sec\theta = -, \cot\theta = -$; (*h*) $\tan\theta = -, \text{cosec}\,\theta = -$;
(*i*) $\sin\theta = +$; (*j*) $\cos\theta = -$; (*k*) $\tan\theta$ ঋণাত্মক ;
(*l*) $\sec\theta$ ধনাত্মক।

পাদ (quadrant)	(*a*)	(*b*)	(*c*)	(*d*)		(*f*)	(*g*)	(*h*)	(*i*)	(*j*)	(*k*)	(*l*)
প্রথম									$\surd$			
দ্বিতীয়									$\surd$			
তৃতীয়	$\surd$											
চতুর্থ												

4. $\sin\theta = 4/5$ হইলে এবং θ প্রথম পাদতে থাকিলে $\cos\theta$র মান নির্ণয় কর।

[**সমাধান :** $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - 16/25 = 9/25$ বা $\cos\theta = 3/5$, কারণ প্রথম পাদতে অবস্থিত বলিয়া $\cos\theta$ ধনাত্মক।]

5. $\cos\theta = 5/13$ হইলে $\sin\theta$, $\tan\theta$ এবং $\sec\theta$র মান নির্ণয় কর।

[**সমাধান :** $\because$ $\cos\theta$ ধনাত্মক, $\therefore$ θ, প্রথম অথবা চতুর্থ পাদতে অবস্থিত।

θ প্রথম পাদতে থাকিলে, $\sin\theta = +\sqrt{1-\cos^2\theta} = 12/13$; $\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta = 12/5$ এবং $\sec\theta = 1/\cos\theta = 13/5$ (সমুদয় অনুপাত এই পাদতে ধনাত্মক বলিয়া।)

আবার θ চতুর্থ পাদতে থাকিলে $\sin\theta$ এবং $\tan\theta$ উভয়েই ঋণাত্মক, সুতরাং $\sin\theta = -12/13$, $\tan\theta = -12/5$, $\sec\theta = 13/5$ (ধনাত্মক বলিয়া)।]

6. $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$র মান নির্ণয় কর, যখন $\tan\theta = -3/4$.

7. প্রদত্ত : $\cos\theta = -63/65$ এবং $\tan\theta$ ধনাত্মক ; $\sin\theta$ নির্ণয় কর।

8. θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মান নির্ণয় কর যখন

(a) $\cot\theta = 4/3$; (b) $\sec\theta = -\sqrt{5}$; (c) $\text{cosec}\,\theta = -2/\sqrt{3}$.

9. $\sin\theta$র সর্বোচ্চ মান কত? ইহার ন্যূনতম মানও নির্ণয় কর। যাচাই করিয়া দেখাও যে $\cos\theta$র মান -1 এবং 1 এর মধ্যে দোলনশীল (oscillates)।

10. প্রমাণ কর যে $\text{cosec}\,\theta$ এবং $\sec\theta$ যেখানেই সংজ্ঞাত (defined), সেখানে উহাদের সংখ্যাগত পরম মান (numerical values) $\geqslant 1$.

প্রশ্নমালা II(B)

1 যদি x এবং y শূন্য নহে (non-zero) এমন দুইটি বাস্তব রাশি হয় তবে দেখাও যে $\sin^2\theta = (x+y)^2/4xy$ সমীকরণ সম্ভব, কেবল যখন $x = y$.

[**সমাধান :** যেহেতু $0 \leqslant \sin^2\theta \leqslant 1$, $\text{cosec}^2\theta \geqslant 1$ বা $4xy/(x+y)^2 \geqslant 1$ বা $(x+y)^2 \leqslant 4xy$, অর্থাৎ, $(x+y)^2 - 4xy \leqslant 0$, বা $(x-y)^2 \leqslant 0$.

কিন্তু x এবং y উভয়ে শূন্য নহে এমন বাস্তব রাশি, $\therefore$ $(x-y)^2$ অবশ্যই 0 হইবে, অর্থাৎ $x = y$.]

2. যদি a এবং b শূন্য নহে এমন দুইটি অসমান বাস্তব রাশি হয়, তবে দেখাও যে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি অসম্ভব :

(i) $\sec^2\theta = \dfrac{4ab}{(a+b)^2}$; (ii) $\cos\theta = a + \dfrac{1}{a}$;

(iii) $\text{cosec}^2\theta = \dfrac{4ab}{(a+b)^2}$

3. a এবং b শূন্য নহে এমন বাস্তব রাশি হইলে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি যুক্তিসিদ্ধ (valid) কি না পরীক্ষা কর :

(i) $\sin A = 2ab/(a^2+b^2)$; (ii) $3\sec\phi = 4$; (iii) $\sin 2\theta = 2$.

[**(i) এর ইঙ্গিত :** $(a-b)^2 \geqslant 0$, বা, $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, বা, $2ab/(a^2+b^2) \leqslant 1$, ইত্যাদি।]

4. যদি $0 < \theta < 90^\circ$ হয় তবে সংজ্ঞা হইতে দেখাও যে $\sin\theta + \cos\theta > 1$.

[ইঙ্গিত : চিত্র 2.1(a) দেখ। $\sin\theta + \cos\theta = NP/OP + ON/OP = (NP+ON)/OP > 1$, ইত্যাদি।]

5. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে θ অথবা ϕ (প্রশ্ন অনুসারে) অপনয়ন কর :
(a) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$; (b) $x=a\cos\phi,\ y=b\sin\phi$;
(c) $x=c(\sec\theta+\tan\theta),\ y=c(\sec\theta-\tan\theta)$.

[(c) এর সমাধান : $xy=c^2(\sec^2\theta-\tan^2\theta)=c^2$.]

6. $\tan x$ কে অন্য পাঁচটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ কর।

[সমাধান : $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\pm\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$, বা, $=\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$;

আবার $\tan x=1/\cot x$; যেহেতু $1+\tan^2 x=\sec^2 x$,
$\therefore \tan x=\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$; যেহেতু $1+\cot^2 x=\operatorname{cosec}^2 x$,

$\therefore \tan x=\dfrac{1}{\cot x}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x-1}}$. কিন্তু চিহ্ন ঠিক করিবার জন্য x কোন্ পাদতে অবস্থিত তাহা বিবেচনা করিতে হইবে।]

7. $\sin\theta$ এবং $\cot\theta$ কে $\sec\theta$ তে প্রকাশ কর।

8. প্রদত্ত : $\sin\phi-\cos\phi=0$; $\operatorname{cosec}\phi$ নির্ণয় কর।

9. $\sin A=m/n$ হইলে প্রমাণ কর যে $\sqrt{n^2-m^2}.\tan A=m$.

10. $\sec\alpha=13/5$ হইলে প্রমাণ কর যে $\dfrac{2\sin\alpha-3\cos\alpha}{4\sin\alpha-9\cos\alpha}$ এর একটি মান 3.

11. $\tan x=-\frac{4}{3}$ এবং x দ্বিতীয় অথবা চতুর্থ পাদতে হইলে $\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$ এর মান নির্ণয় কর।

ত্রিকোণমিতিক অভেদ (Trigonometric Identities) **:** ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকসমূহ অন্তর্ভুক্ত, এমন কোন সম্পর্ক (relation) যদি সংশ্লিষ্ট কোণটির যে মানগুলিতে অপেক্ষকগুলি সংজ্ঞাত (defined) এইরূপ সকল মানে যুক্তিসিদ্ধ (valid) হয়, তবে ঐ সম্পর্ককে ত্রিকোণমিতিক অভেদ বলা হয়। ত্রিকোণমিতিক অভেদের সত্যতা যাচাই করা হয় ইচ্ছামত কোন এক পক্ষকে অপর পক্ষে রূপান্তরিত করিয়া। সাধারণত অপেক্ষাকৃত জটিলতর পক্ষটি লইয়া কার্যটি আরম্ভ করা হয়। নিম্নে কতিপয় দৃষ্টান্ত দেওয়া হইল।

নিম্নলিখিত অভেদগুলি প্রমাণ কর (অনুশীলনী 12—44) :

12. $(1-\cos^2 A)(1+\cot^2 A)=1$.

13. $\sin\theta.\sec\theta\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}=1$.

14. $\sin^4 A-\cos^4 A=2\sin^2 A-1=1-2\cos^2 A$.

15. $\sec^4 A-1=2\tan^2 A+\tan^4 A$.

16. $(\tan\phi\operatorname{cosec}\phi)^2-(\sin\phi\sec\phi)^2=1$.

17. $\dfrac{1}{1-\sin A}+\dfrac{1}{1+\sin A}=2\sec^2 A.$

18. $\cot A+\tan A=\sec A \operatorname{cosec} A.$

19. $\dfrac{1}{\cos^2 A}-\dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2 A-1}=1.$

20. $\dfrac{\tan\theta-\cot\theta}{\tan\theta+\cot\theta}=2\sin^2\theta-1.$

[সমাধান : $\text{L. H. S.}=\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\Big/\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$=(\sin^2\theta-\cos^2\theta)/(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$=\sin^2\theta-\cos^2\theta=\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)$

$=2\sin^2\theta-1=\text{R H.S.}$]

21. $\cot\theta+\tan\theta=\sec\theta\operatorname{cosec}\theta.$

22. $\dfrac{1}{1+\sin^2 A}+\dfrac{1}{1+\operatorname{cosec}^2 A}=1.$

23. $(\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta)(\sin\theta+\cos\theta)=\sec\theta\operatorname{cosec}\theta+2.$

24. $(\sec\theta+\tan\theta-1)(\sec\theta-\tan\theta+1)=2\tan\theta.$

[সমাধান : $\text{L.H.S.}=\{\sec\theta+(\tan\theta-1)\}\times\{\sec\theta-(\tan\theta-1)\}$

$=\sec^2\theta-(\tan\theta-1)^2$

$=\sec^2\theta-\tan^2\theta+2\tan\theta-1$

$=\sec^2\theta-(1+\tan^2\theta)+2\tan\theta$

$=2\tan\theta=\text{R. H. S.}$]

25. $(\sin A+\operatorname{cosec} A)^2+(\cos A+\sec A)^2=\tan^2 A+\cot^2 A+7.$

26. $(1-\sin A+\cos A)^2=2(1-\sin A)(1+\cos A).$

27. $\sin\theta(1+\tan\theta)+\cos\theta(1+\cot\theta)=\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta.$

[সমাধান : $\text{L.H.S.}=\sin\theta+\sin\theta\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\cos\theta+\cos\theta.\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\left(\sin\theta+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)+\left(\cos\theta+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)$

$=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta}+\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}=\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta=\text{R.H.S.}$]

28. $(\tan\theta+\sec\theta)^2=\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}.$

[সমাধান : $\text{R. H. S.}=\dfrac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}=\left(\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$

$=(\tan\theta+\sec\theta)^2=\text{L. H. S.}$]

29. $\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=(\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta)^2.$

30. $\sin^6 A+\cos^6 A=1-3\sin^2 A\cos^2 A.$

31. $\operatorname{cosec}^6\theta-\cot^6\theta=1+3\operatorname{cosec}^2\theta\cot^2\theta.$

32. $(1+\tan\theta+\sec\theta)(1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta)=2.$

33. $\dfrac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}.$

[**সমাধান :** L. H. S. $=\dfrac{\tan\theta+\sec\theta-(\sec^2\theta-\tan^2\theta)}{\tan\theta-\sec\theta+1}$

$$=\frac{(\tan\theta+\sec\theta)-(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)}{\tan\theta-\sec\theta+1}$$

$$=\frac{(\tan\theta+\sec\theta)(1-\sec\theta+\tan\theta)}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\tan\theta+\sec\theta$$

$=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=$ R. H. S.]

34. $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}}-\sec A=\sec A-\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}}.$

35. $\dfrac{\sec\theta+\tan\theta}{\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta}-\dfrac{\sec\theta-\tan\theta}{\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta}=2(\sec\theta-\operatorname{cosec}\theta).$

36. $\dfrac{\tan A}{\sec A-1}-\dfrac{\sin A}{1+\cos A}=2\cot A.$

37. $\dfrac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\sin A\cos^2 A-\cos A\sin^2 A}=\operatorname{cosec} A+\sec A.$

[**সমাধান :** L. H. S. $=\dfrac{(\cos A-\sin A)(\cos A+\sin A)}{\sin A\cos A(\cos A-\sin A)}=$ ইত্যাদি।]

[নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলিতে (38—44) দুইটি কোণের অপেক্ষক আছে ; প্রতিক্ষেত্রে কোণ দুইটি পরস্পর নিরপেক্ষ (independent of each other)।]

38. $\tan^2\theta+\sec^2\phi=\sec^2\theta+\tan^2\phi.$

39. $\dfrac{\cot A+\tan B}{\tan A+\cot B}=\cot A\tan B.$

[**সমাধান :** L. H. S $=\left(\dfrac{\cos A}{\sin A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}\right)\Big/\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos B}{\sin B}\right)$

$=\dfrac{\cos A\sin B}{\sin A\cos B}=\cot A\tan B=$ R.H.S.]

40. $\dfrac{\tan A-\tan B}{\sec A+\sec B}=\dfrac{\sec A-\sec B}{\tan A+\tan B}.$

41. $\cot A+\cot B=\cot A\cot B(\tan A+\tan B).$

42. $\dfrac{\cos\theta+\cos\phi}{\sin\theta-\sin\phi}=\dfrac{\sin\theta+\sin\phi}{\cos\phi-\cos\theta}$.

43. $\sec^2\alpha\tan^2\beta-\tan^2\alpha\sec^2\beta=\tan^2\beta-\tan^2\alpha$.

44. $(\tan x+\tan y)(1-\cot x\cot y)$
$+(\cot x+\cot y)(1-\tan x\tan y)=0$.

45. দেখাও যে

(i) $(x\sin\theta-y\cos\theta)^2+(x\cos\theta+y\sin\theta)^2=x^2+y^2$.

(ii) $(2r\sin\theta\cos\theta)^2+r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2=r^2$.

(iii) $(r\sin\theta\cos\phi)^2+(r\sin\theta\sin\phi)^2+(r\cos\theta)^2=r^2$.

[**(ii)এর ইঙ্গিত :** L.H.S. $=r^2\{4\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta+\sin^4\theta$
$-2\sin^2\theta\cos^2\theta\}$
$=r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2=r^2$]

46 (i) যদি $\sin A+\sin^2 A=1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে
$\cos^2 A+\cos^4 A=1$.

(ii) $\sin\theta-\cos\theta=0$ হইলে দেখাও যে $\sec\theta=\pm\sqrt{2}$.

(iii) $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$ হইলে প্রমাণ কর যে
$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta$.

(iv) যদি $\cos\theta+\sec\theta=2$ হয়, তবে দেখাও যে rএর সকল অখণ্ড মানের জন্য $\cos^r\theta+\sec^r\theta=2$.

(v) যদি $\cos^2 x+\cos^4 x=1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\sin^2 x\pm\sin x=1$; এখানে $\sin x$ ধনাত্মক হইলে ধনাত্মক চিহ্নটি এবং $\sin x$ ঋণাত্মক হইলে ঋণাত্মক চিহ্নটি লইতে হইবে।

ইহাও প্রমাণ কর যে প্রদত্ত সর্ত অনুসারে $\tan^2 x+\tan^4 x=1$.

[**(iv)এর ইঙ্গিত :** $\cos\theta+1/\cos\theta=2$,
বা, $\cos^2\theta-2\cos\theta+1=0$,
অর্থাৎ, $(\cos\theta-1)^2=0$, বা, $\cos\theta=1$, ইত্যাদি।]

47. (i) যদি $7\sin^2\theta+3\cos^2\theta=4$ হয়, তবে দেখাও যে $\tan\theta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

(ii) $2\sec^2 A-7\tan A+1=0$ হইলে প্রমাণ কর যে $\cot A$র মান দুইটির মধ্যে একটি হইল 2; অপর মানটিও নির্ণয় কর।

(iii) $\tan\theta=\dfrac{a}{b}$ হইলে $\dfrac{a\sin\theta-b\cos\theta}{a\sin\theta+b\cos\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

(iv) যদি $\tan\theta+\sec\theta=x$ হয়, তবে দেখাও যে
$\sin\theta=(x^2-1)/(x^2+1)$.

(*v*) যদি $1+4x^2=4x \sec \theta$ হয়, তবে দেখাও যে
$\tan \theta+\sec \theta=2x$, বা, $1/2x$.

[**(iii)এর ইঙ্গিত :** প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{a \tan \theta-b}{a \tan \theta+b}$ (লব ও হর কে $\cos \theta$ দ্বারা ভাগ করিয়া) ইত্যাদি।]

48. পূর্ণ বর্গের আকারে প্রকাশ কর :
(*i*) $1 \pm 2 \sin A \cos A$; (*ii*) $1+4 \sec^2\theta \tan^2\theta$.

49. যদি $\dfrac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta}+\dfrac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta}=1$ হয়, তবে দেখাও যে $\dfrac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}=1$.

50. যদি $\tan \theta+\sin \theta=m$ এবং $\tan \theta-\sin \theta=n$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $m^2-n^2=4\sqrt{mn}$.

51. যদি $\tan \theta=\dfrac{\sin A-\cos A}{\sin A+\cos A}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\sqrt{2} \cos \theta=\sin A+\cos A.$$

52. (*i*) যদি $x \sin^3\theta+y \cos^3\theta=\sin \theta \cos \theta$ এবং $x \sin \theta-y \cos \theta=0$ হয়, তবে দেখাও যে $x^2+y^2=1$.

(*ii*) যদি $ay \cos \theta=bx \sin \theta$ এবং $ax \sec \theta-by \operatorname{cosec} \theta=a^2-b^2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $x^2/a^2+y^2/b^2=1$,

(*iii*) প্রদত্ত : $\tan^2\theta=(1-e^2)$, দেখাও যে

$$\sec \theta+\tan^3\theta \operatorname{cosec} \theta=\pm(2-e^2)^{3/2}.$$

[**(i)এর সমাধান :** $x \sin \theta=y \cos \theta$, বা, $\sin \theta=(y\ x) \cos \theta$; প্রথম সম্পর্কটিতে এই মান বসাইয়া এবং সরল করিয়া পাওয়া যায় $\cos \theta=x/(x^2+y^2)$, সুতরাং $\sin \theta=y/(x^2+y^2)$; যেহেতু $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, সুতরাং নির্ণেয় সম্পর্কটি পাওয়া যাইবে।]

53. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে θ অপনয়ন কর :
(*i*) $a \cos \theta+b \sin \theta+c=0,\ a' \cos \theta+b' \sin \theta+c'=0$.
(*ii*) $a \tan^2\theta+b \tan \theta+c=0=a' \cot^2\theta+b' \cot \theta+c'$

[**(i)এর ইঙ্গিত :** বজ্রগুণন দ্বারা, $\dfrac{\cos \theta}{bc'-b'c}=\dfrac{\sin \theta}{ca'-c'a}=\dfrac{1}{ab'-a'b}$; এখন স্মরণ কর যে $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ এবং সম্পূর্ণ কর।]

54. যদি $x=\dfrac{1+\sin \theta}{\cos \theta}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-\sin \theta}{\cos \theta}$

55. যদি $\tan^2 A=1+2 \tan^2 B$ হয়, তবে দেখাও যে $\cos^2 B=2 \cos^2 A$.

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা II(A)

2. 10°, 370°, 730°, −35°, 1090° (অনুরূপভাবে অন্যগুলি হইবে)।

3. (*b*) চতুর্থ, (*c*) দ্বিতীয়, (*d*) প্রথম, (*e*) তৃতীয়, (*f*) দ্বিতীয়, (*g*) দ্বিতীয়, (*h*) চতুর্থ, (*j*) দ্বিতীয় এবং তৃতীয়, (*k*) দ্বিতীয় ও চতুর্থ, (*l*) প্রথম ও চতুর্থ।

6. দ্বিতীয় পাদতে, $\sin\theta=3/5$, $\cos\theta=-4/5$ এবং চতুর্থ পাদতে, $\sin\theta=-3/5$, $\cos\theta=4/5$.

7. $-16/65$. 8 (*a*) ক্রম অনুসারে sin, cos, tan, cot, cosec, sec : প্রথম পাদ : 3/5, 4/5, 3/4, 4/3, 5/3, 5/4 এবং তৃতীয় পাদতে : −3/5, −4/5, 3/4, 4/3, −5/3, −5/4 ; (*b*) দ্বিতীয় : $2/\sqrt{5}$, $-1/\sqrt{5}$, −2, −1/2, $\sqrt{5}/2$, $-\sqrt{5}$; তৃতীয় : $-2/\sqrt{5}$, $-1/\sqrt{5}$, 2, 1/2, $-\sqrt{5}/2$, $-\sqrt{5}$; (*c*) তৃতীয় : $-\sqrt{3}/2$, −1/2, $\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$, $-2\sqrt{3}$, −2 ; চতুর্থ : $-\sqrt{3}/2$, 1/2, $-\sqrt{3}$, $-1/\sqrt{3}$, $-2/\sqrt{3}$, 2.

প্রশ্নমালা II(B)

3. (*i*) এবং (*ii*) সম্ভব ; (*iii*) সম্ভব নয়।

5. (*a*) $x^2+y^2=r^2$; (*b*) $x^2/a^2+y^2/b^2=1$.

7. $\sqrt{\sec^2\theta-1}/\sec\theta$; $1/\sqrt{\sec^2\theta-1}$. 8. $\pm\sqrt{2}$. 11 −3.

47. (*ii*) 1/3, (*iii*) $(a^2-b^2)/(a^2+b^2)$. 48. (*i*) $(\cos A\pm\sin A)^2$; (*ii*) $(2\tan^2\theta+1)^2$ বা $(2\sec^2\theta-1)^2$.

53. (*i*) $(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2=(ab'-a'b)^2$;
(*ii*) $(a'b-b'c)(ab'-bc')=(aa'-cc')^2$.

3

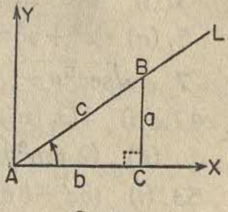
ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ (Positive Acute Angles) : সমকোণী ত্রিভুজের সমাধান (Solution of Right Triangles) : উচ্চতা ও দূরত্ব সম্পর্কীয় সরল প্রশ্নসমূহ (Simple Problems in Heights and Distances)

3·1. সূচনা

বর্তমান অধ্যায়ে সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক কোণ এবং 0°, 90°, 180° এবং 270° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্পর্কে বিবেচনা করা হইবে। এই অনুপাতগুলি, যেখানেই বিদ্যমান, একবার নির্ণয় করিতে পারিলে উহাদের সাহায্যে অপর যে কোন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত কিভাবে নির্ণয় করা যায় তাহা পরবর্তী অধ্যায়ে দেখা যাইবে। এই অধ্যায়ের শেষাংশে অনুপাতগুলির ব্যবহারিক প্রয়োগ সম্পর্কে আলোচনা করা হইয়াছে এবং এই প্রয়োগের সুবিধার জন্য সমকোণী ত্রিভুজের সমাধান পদ্ধতিও যুক্ত করা হইয়াছে।

3·2. কোন ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

প্রচলিত আদর্শ অবস্থানের (in the standard position) ধনাত্মক সূক্ষ্ম কোণ সর্বদা প্রথম পাদতে অবস্থিত। ইতিপূর্বে প্রদত্ত সাধারণ সংজ্ঞাসমূহ হইতে কোন ধনাত্মক সূক্ষ্ম কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি পাওয়া যায়। এই কোণটির প্রাসঙ্গিক সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষগুলিকে A, B, C দ্বারা নির্দেশ করা সুবিধাজনক। চিত্র 3.1 এ C = 90° ধরা হইয়াছে।



চিত্র 3.1.

এখানে AX প্রারম্ভিক রেখা ; AB, সীমারেখা ALএর উপর অবস্থিত, ঘূর্ণন ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত অভিমুখী ∠CAB ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ। এ পর্যন্ত রেডিয়াস-ভেক্টররূপে পরিচিত ABকে কিন্তু অতিভুজ (hypotenuse) বলিয়া অভিহিত করা যায়। লক্ষণীয়, ∠ABCও সূক্ষ্মকোণ। ABC ত্রিভুজের কোণগুলিকে A, B, C দ্বারা এবং উহাদের বিপরীত বাহুগুলিকে যথাক্রমে a, b, c দ্বারা সাধারণত নির্দেশ করা হয়। তাহা হইলে

$$\sin A = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{a}{c},\ \cos A = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{b}{c},\ \text{ইত্যাদি।}$$

পূরক (Complementary) কোণসমূহের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত : সহ-অপেক্ষক (Co-functions) :

সংজ্ঞা। কোন কোণের পূরক (complement) হইল সমকোণ হইতে কোণটির যতটুকু **অভাব (defect)**। দুইটি কোণের সমষ্টি এক সমকোণ হইলে কোণ দুইটিকে পরস্পর **পূরক** বলা হয়।

সুতরাং সমকোণী ত্রিভুজ ABCর সূক্ষ্মকোণদ্বয় A এবং B পরস্পর পূরক। এখন সমগ্র ABC ত্রিভুজ প্রথম পাদতে অবস্থিত হওয়ায় B কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলিকে সাধারণ পদ্ধতিতে বিবেচনা করিতে কোন বাধা নাই। সুতরাং B কোণ সম্পর্কে লম্ব $=b$, অতিভুজ $=c$ এবং সন্নিহিত বাহু $=a$ এবং ইহারা সকলেই ধনাত্মক। সুতরাং

$\sin B=b/c$, $\cos B=a/c$, $\tan B=b/a$, $\cot B=a/b$, $\operatorname{cosec} B=c/b$, $\sec B=c/a$, যেখানে $\sin A=a/c$, $\cos A=b/c$, $\tan A=a/b$, $\cot A=b/a$, $\operatorname{cosec} A=c/a$, $\sec A=c/b$ এবং $B=90^\circ-A$.

সুতরাং $\sin A=\cos B=\cos(90^\circ-A)$, $\cos A=\sin B=\sin(90^\circ-A)$, $\tan A=\cot B=\cot(90^\circ-A)$, $\cot A=\tan B=\tan(90^\circ-A)$, $\operatorname{cosec} A=\sec B=\sec(90^\circ-A)$, $\sec A=\operatorname{cosec} B=\operatorname{cosec}(90^\circ-A)$.

এই সম্পর্কগুলি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ছয়টির মধ্যে দুই দুইটিকে পরস্পর সম্বন্ধযুক্ত করে, যথা, sin এবং cosine, tangent এবং cotangent, secant এবং cosecant, ; এই প্রতি যুগ্ম অপেক্ষকের মধ্যে একটিকে অপরটির **সহ-অপেক্ষক** (co-function) বলে। সুতরাং **কোন সূক্ষ্মকোণের যে কোন অপেক্ষক, কোণটির পূরকের অনুরূপ সহ-অপেক্ষকের সহিত সমান।**

এখন বিষয়টির পরবর্তী অগ্রগতির পক্ষে প্রয়োজনীয় সূক্ষ্মকোণগুলির বিষয়ে আলোচনা করা যাক্।

(A) 45° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

$A=45^\circ$ এবং $C=90^\circ$ ধরিয়া ABC সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করা হইল (চিত্র 3.2)। সুতরাং $B=45^\circ$; তাহা হইলে ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। কোণের বিপরীত বাহুকে অনুরূপ ক্ষুদ্র অক্ষর দ্বারা নির্দেশ করিলে ইহা সুস্পষ্ট যে $b=a$ এবং $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$; স্মরণ করিতে হইবে যে এখানে সকল কোণ এবং বাহুকে ধনাত্মক বিবেচনা করিতে হইবে। সুতরাং

$$\sin 45^\circ=\sin A=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

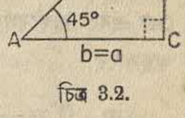
$$\cos 45^\circ=\cos A=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ=\tan A=\frac{a}{a}=1$$

$$\cot 45^\circ=\cot A=\frac{a}{a}=1$$

$$\sec 45^\circ=\sec A=\frac{\sqrt{2}a}{a}=\sqrt{2}$$

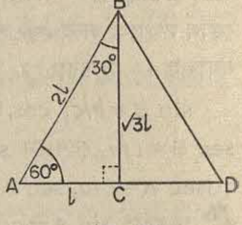
$$\operatorname{cosec} 45^\circ=\operatorname{cosec} A=\frac{\sqrt{2}a}{a}=\sqrt{2}.$$



চিত্র 3.2.

(B) 30° এবং 60°র ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

প্রতি কোণ 60° করিয়া একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABD অঙ্কন করা হইল। B হইতে ADর উপর BC লম্বপাত করা হইল—উহা ADকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে AC=CD এবং ∠ABC=30°.



চিত্র 3.3.

এখন ABC ত্রিভুজের প্রতি দৃষ্টি নিবদ্ধ রাখিয়া AC=l ধরা হইল। তাহা হইলে AB=AD=$2l$ এবং BC=$\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{4l^2-l^2}=\sqrt{3}l$; সকল বাহু এবং কোণ ধনাত্মক—ইহা স্মরণ রাখিয়া বলা যায় যে

$$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}l}{2l}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60^\circ=\frac{l}{2l}=\frac{1}{2},\ \tan 60^\circ=\frac{\sqrt{3}l}{l}=\sqrt{3},$$

$$\cot 60^\circ=\frac{l}{\sqrt{3}l}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sec 60^\circ=\frac{2l}{l}=2,\ \text{cosec } 60^\circ=\frac{2l}{\sqrt{3}l}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

আবার,

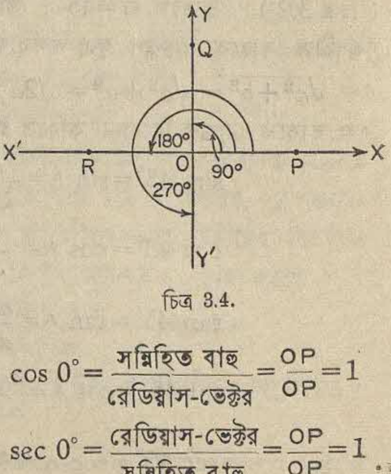
$$\sin 30^\circ=\frac{l}{2l}=\frac{1}{2},\ \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}l}{2l}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \tan 30^\circ=\frac{l}{\sqrt{3}l}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cot 30^\circ=\frac{\sqrt{3}l}{l}=\sqrt{3},\ \sec 30^\circ=\frac{2l}{\sqrt{3}l}=\frac{2}{\sqrt{3}},\ \text{cosec } 30^\circ=\frac{2l}{l}=2.$$

(C) 0°, 90°, 180°, 270°র ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

অনুচ্ছেদ 22 দ্রষ্টব্য। সীমারেখার উপর O হইতে স্বতন্ত্র একটি বিন্দু P লওয়া হইল।

0°র ক্ষেত্রে, ∠XOP হইল 0°র পরিমাপ। এখানে প্রাসঙ্গিক ত্রিভুজ POP একটি সরলরেখায় পর্যবসিত হইয়াছে, কারণ সীমারেখা OP, OXএর সহিত সর্বাংশে মিলিয়া গিয়াছে। সুতরাং রেডিয়াস-ভেক্টর হইল OP, সন্নিহিত বাহু OP এবং লম্বদৈর্ঘ্য শূন্য। অতএব সংজ্ঞা অনুসারে



চিত্র 3.4.

$$\sin 0^\circ=\frac{\text{লম্ব}}{\text{রেডিয়াস-ভেক্টর}}=\frac{0}{OP}=0,\ \cos 0^\circ=\frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{রেডিয়াস-ভেক্টর}}=\frac{OP}{OP}=1$$

$$\tan 0^\circ=\frac{\text{লম্ব}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}=\frac{0}{OP}=0,\quad \sec 0^\circ=\frac{\text{রেডিয়াস-ভেক্টর}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}=\frac{OP}{OP}=1$$

কিন্তু $\cot 0^\circ=\frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{লম্ব}}=\frac{OP}{0}$ হইল অসংজ্ঞাত (undefined)

এবং $\operatorname{cosec} 0^\circ = \frac{\text{রেডিয়াস-ভেক্টর}}{\text{লম্ব}} = \frac{OP}{0}$ হইল অসংজ্ঞাত (undefined),
কারণ শূন্য দ্বারা ভাগক্রিয়া অসংজ্ঞাত (undefined)।

90°র ক্ষেত্রে, সীমারেখাটি OY এর সহিত সর্বাংশে মিলিয়া যায়। ঐ সীমারেখার উপর O হইতে স্বতন্ত্র Q একটি বিন্দু লওয়া হইল। এখানে প্রাসঙ্গিক ত্রিভুজ QOQ একটি সরলরেখায় পর্যবসিত হইয়াছে, রেডিয়াস-ভেক্টর হইল OQ, সন্নিহিত বাহু=0 এবং লম্ব দৈর্ঘ্য=OQ ; সুতরাং

$\sin 90^\circ = OQ/OQ = 1$; $\cos 90^\circ = 0/OQ = 0$; $\tan 90^\circ = OQ/0$, অসংজ্ঞাত ;

$\cot 90^\circ = 0/OQ = 0$; $\operatorname{cosec} 90^\circ = OQ/OQ = 1$; $\sec 90^\circ = OQ/0$, অসংজ্ঞাত।

180°র ক্ষেত্রে, সীমারেখাটি OX′ এর সহিত সর্বাংশে মিলিয়া যায়; যদি এই সীমারেখার উপর O হইতে স্বতন্ত্র কোন বিন্দু R লওয়া হয়, তবে

$\sin 180^\circ = 0/OR = 0$, $\cos 180^\circ = -OR/OR = -1$, $\tan 180^\circ = 0/-OR = 0$,

$\sec 180^\circ = OR/-OR = -1$, কিন্তু $\cot 180^\circ$ এবং $\operatorname{cosec} 180^\circ$ অসংজ্ঞাত।

270°র ক্ষেত্রে, সীমারেখা OY′ এর উপর O হইতে স্বতন্ত্র কোন বিন্দু S লইয়া দেখা যায়

$\sin 270^\circ = -1$, $\cos 270^\circ = 0$, $\cot 270^\circ = 0$, $\operatorname{cosec} 270^\circ = -1$, কিন্তু $\tan 270^\circ$ এবং $\sec 270^\circ$ অসংজ্ঞাত।

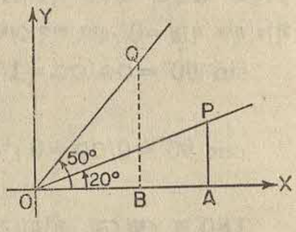
এ পর্যন্ত আলোচিত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মানসমূহ স্মরণ রাখিতে নিম্নলিখিত তালিকাটি সাহায্য করিবে :

তালিকা 4

θ	0° বা 0	30° বা $\frac{\pi}{6}$	45° বা $\frac{\pi}{4}$	60° বা $\frac{\pi}{3}$	90° বা $\frac{\pi}{2}$	180° বা π	270° বা $\frac{3\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞাত	0	অসংজ্ঞাত
cot	অসংজ্ঞাত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	অসংজ্ঞাত	0
cosec	অসংজ্ঞাত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	অসংজ্ঞাত	−1
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞাত	−1	অসংজ্ঞাত

প্রশ্নমালা III(A)

1. চাঁদার সাহায্যে প্রচলিত আদর্শ অবস্থানে 20° কোণ অঙ্কন কর। O কে কেন্দ্র করিয়া 10 একক ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত চাপ অঙ্কন কর, যেন উহা সীমারেখাকে P বিন্দুতে ছেদ করে। P বিন্দু হইতে x অক্ষের উপর একটি লম্ব পাত কর ; লম্বটি x অক্ষকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন OA এবং AP পরিমাপ কর এবং ইহা হইতে 20° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি নির্ণয় কর।



চিত্র 3.5.

[**সমাধান :** OA এবং APর মাপের আসন্ন মান যথাক্রমে 9·4 এবং 3·4 ; সুতরাং $\sin 20° = 3{\cdot}4/10 = 0{\cdot}34$ (প্রায়), $\cos 20° = 9{\cdot}4/10 = 0{\cdot}94$ (প্রায়) ইত্যাদি]

2. প্রশ্ন 1এর ন্যায় 50° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি নির্ণয় কর।

[ইঙ্গিত: OQ = 10 একক লও এবং যাচাই করিয়া দেখ OB = 6·4 এবং BQ = 7·7 (প্রায়) ; এখন অনুপাতগুলি নির্ণয় কর।]

মন্তব্য : পূর্ববর্তী উদাহরণ দুইটিতে প্রদর্শিত পদ্ধতি অবলম্বন করিয়া যে কোন সূক্ষ্ম কোণের sin, cosine প্রভৃতি অনুপাতগুলির মান নির্ণয় সম্ভব। যদিও উহারা আসন্ন মান মাত্র, তথাপি মানগুলিকে আরও সূক্ষ্ম আকারে নির্ণয় করা যায় এবং ছাত্রছাত্রীদের এবিষয়ে কিছু অভ্যাস করিতে পরামর্শ দেওয়া যাইতেছে।

3. নিম্নলিখিত রাশিগুলির প্রত্যেকটির মান নির্ণয় কর :

(*i*) $\sin 30° \cos 60° + \cos 30° \sin 60°$;

(*ii*) $\sin^2 30° + \sin^2 45° + \sin^2 60°$;

(*iii*) $\cos^2 0° + \cos^2 45° + \cos^2 90°$;

(*iv*) $\tan^2 30° + \tan^2 45° + \tan^2 60°$;

(*v*) $3\tan^2 45° - \sin^2 60° - \frac{1}{2}\cot^2 30° + \frac{1}{8}\sec^2 45° - \operatorname{cosec} 90°$;

(*vi*) $\tan 180° - 2\cos 180° + 3\operatorname{cosec} 270° + \sin 90°$.

4. উভয় পক্ষের সমতা যাচাই কর :

(*i*) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, যখন $\theta = \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{6}\pi$.

(*ii*) $\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan\dfrac{A+B}{2}$, যখন $A = \dfrac{\pi}{6}$, $B = \dfrac{\pi}{3}$.

(*iii*) $\dfrac{\cos 60° + \cos 30°}{\sec 60° + \operatorname{cosec} 60°} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

(*iv*) $\operatorname{cosec}^2\dfrac{\pi}{4} - \sec^2\dfrac{\pi}{6} + 2\cot^2\pi - \sin^2\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{3}$

[(*iv*)এর **সমাধান :**

$$\text{L.H.S.} = (\sqrt{2})^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - (1)^2 = 2 - \tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{3} - 1 = \tfrac{1}{3}\ ]$$

5. নিম্নলিখিত সমীকরণ হইতে x নির্ণয় কর :

(i) $x \sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan 60^\circ = \tan^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ$

(ii) $\operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{6} + 2\tan^2 \frac{\pi}{4} - \tan^2 \frac{\pi}{3} = 3(x-1)\cot^4 \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3}$

6. θ অথবা x নির্ণয় কর, যখন $0 \leqslant \theta,\ x \leqslant 90^\circ$:

(i) $2\cos\theta - 1 = 0$; (ii) $\cos^2\theta + \sin\theta = 1$;

(iii) $\tan\theta + \cot\theta = 2$; (iv) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{1}{2}$;

(v) $6\sin^2\theta - 11\sin\theta + 4 = 0$; (vi) $3\sec x - 2\cos x = 5$.

[**(*vi*) এর সমাধান :** প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়

$3/\cos x - 2\cos x = 5$

বা $2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$, বা $(2\cos x - 1)(\cos x + 3) = 0$

ইহার অর্থ, হয় $\cos x = 1/2$, $\therefore\ x = 60^\circ$, অথবা, $\cos x = -3$, কিন্তু -3 মান অসম্ভব।]

7. $0 \leqslant x \leqslant 90^\circ$ হইলে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে যেখানে সম্ভব x নির্ণয় কর :

(i) $\sin^2 x + 4\sin x + 12 = 0$; (ii) $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{2}$;

(iii) $3\sin x + 2\cos^2 x = 3$;

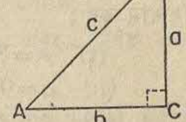
(iv) $\sin x \cos x - 5\sin x - 2\cos x = 10$.

[**(*i*) এর সমাধান :** $\sin x = (-4 \pm \sqrt{16-48})/2$ বাস্তব নহে, সুতরাং কোন বাস্তব সমাধান সম্ভব নহে।]

3·3 সমকোণী ত্রিভুজের সমাধান (Solution of right-angled triangles)

ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ, যথা তিনটি বাহু এবং তিনটি কোণ। যদি কোন ত্রিভুজের উপযুক্ত কতিপয় অঙ্গের মান প্রদত্ত হয় তবে ত্রিভুজটির অবশিষ্ট অঙ্গগুলির মান নির্ণয় সম্ভব। যে পদ্ধতিতে এই মান নির্ণয় করা হয় তাহাকে **ত্রিভুজটির সমাধান** বলা হয়। ত্রিভুজের সাধারণ সমাধান সম্পর্কে পরবর্তী একটি অধ্যায়ে আলোচনা করা হইবে ; বর্তমানে কেবল সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে বিবেচনা সীমিত রাখা হইবে।

ইতিপূর্বেই সমকোণী ত্রিভুজ ABC'র কোণ তিনটিকে A, B, C দ্বারা এবং উহাদের বিপরীত অনুরূপ বাহুগুলিকে যথাক্রমে a, b, c দ্বারা নির্দেশ করা হইয়াছে (এখানে চিত্র 3.6 দ্রষ্টব্য)। দেখা যায়, সমকোণী ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহু দেওয়া থাকিলে তৃতীয় বাহুটি নির্ণয় করা যায়। যেমন সংলগ্ন চিত্রটিতে $c^2 = a^2 + b^2$, যেখানে C সমকোণ। সুতরাং a, b, c এই রাশি তিনটির যে কোন দুইটির মান প্রদত্ত হইলে তৃতীয়টির মান জানা যায়। আবার ত্রিভুজটির সূক্ষ্মকোণ দুইটি পরস্পর



চিত্র 3.6.

পূরক বলিয়া যদি একটির মান দেওয়া থাকে তবে অপরটি জানা যায়। সুতরাং সমকোণী ত্রিভুজের সমাধানের বিষয়ে প্রকৃতপক্ষে কেবল দুইটি ক্ষেত্র বিবেচনা করিতে হইবে :

ক্ষেত্র I : সমকোণী ত্রিভুজের দুইটি বাহু দেওয়া থাকিলে উহার সমাধান :

চিত্র 3.6 হইতে ইহা সুস্পষ্ট যে $c^2=a^2+b^2$ এই সমীকরণ হইতে ABC ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটি নির্ণয় করা যাইবে।

আবার $\sin A=a/c$, $\cos A=b/c$. বা $\tan A=a/b$ এর যে কোন একটি সম্পর্ক হইতে A নির্ণয় করা সম্ভব। পুনরায় $B=90°-A$ এবং $C=90°$; সুতরাং সকল বাহু এবং কোণ নির্ণয় করা যাইবে।

ক্ষেত্র II : সমকোণী ত্রিভুজের একটি বাহু এবং একটি সূক্ষ্ম কোণ প্রদত্ত হইলে উহার সমাধান :

মনে করা যাক্, b এবং A প্রদত্ত। এখন $C=90°$, সুতরাং $B=90°-A$. আবার $\cos A=b/c$, $\sec A=c/b$, $\tan A=a/b$ অথবা $\cot A=b/a$ এর যে কোন একটির সাহায্যে a এবং c নির্ণয় করা যাইবে।

প্রশ্নমালা III(B)

[নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলিতে অন্যভাবে বলা না থাকিলে সাধারণ অঙ্কপাতন (usual notations) হিসাবে প্রতীকগুলিকে গ্রহণ করিতে হইবে]

1. ত্রিভুজগুলি সমাধান কর যখন

(*i*) $a=20, b=40, B=90°$; (*ii*) $A=90°, a=4, b=2\sqrt{3}$

(*iii*) $b=c=2, A=90°$; (*iv*) $b=2c=6\sqrt{3}, B=90°$.

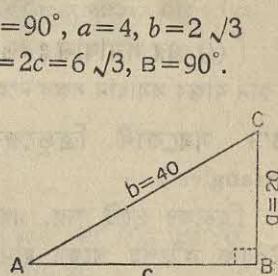
[**(i)এর সমাধান :**

$c^2=b^2-a^2=1600-400=1200$,

সুতরাং $c=20\sqrt{3}$;

আবার $\sin A=20/40=1/2$

অর্থাৎ $A=30°$ এবং $C=90°-A=60°$.



চিত্র 3.7.

বিকল্প পদ্ধতি : জ্যামিতিক ধর্মের সাহায্য না লইয়াও সমাধান করা যায়। যেহেতু $\cos C=20/40=1/2$, সুতরাং $C=60°$, $A=90°-60°=30°$; আবার $\cos A=c/40$ বা $\cos 30°=c/40=\sqrt{3}/2$, অর্থাৎ $c=20\sqrt{3}$]

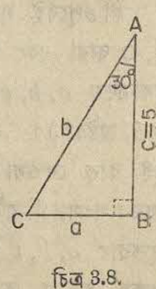
2. নিম্নলিখিত অঙ্গগুলি দেওয়া আছে ; প্রতিক্ষেত্রে ত্রিভুজটি সমাধান কর :

(*i*) $A=30°, B=90°, c=5$;

(*ii*) $a=9\sqrt{3}, A=30°, C=90°$

(*iii*) $B=C=45°, c=4$;

(*iv*) $2B=C=60°, a=8$.



চিত্র 3.8.

[**(i) এর সমাধান :** $C=90°-30°=60°$;

আবার $\tan 30^\circ = a/5 = 1/\sqrt{3}$, অর্থাৎ $a = 5/\sqrt{3}$
পুনরায় $\sec 30^\circ = b/5 = 2/\sqrt{3}$, স্থতরাং $b = 10/\sqrt{3}$]

3. যদি $B = 90^\circ$, $A = 36^\circ$ এবং $c = 100$ হয় তবে ত্রিভুজটি সমাধান কর। দেওয়া আছে $\tan 36^\circ = 0{\cdot}73$, $\sec 36^\circ = 1{\cdot}24$

4. যদি $A = 90^\circ$, $c = 37$, $a = 100$ হয় তবে ত্রিভুজটি সমাধান কর, যেখানে $\sin 21^\circ 43' = 0{\cdot}37$ এবং $\cos 21^\circ 43' = 0{\cdot}93$.

[কখনও কখনও দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ সমাধান করিয়া প্রশ্নটির উত্তর নির্ণয় করা যায় : নিম্নে কয়েকটি দৃষ্টান্ত দেওয়া হইল।]

5. ABC ত্রিভুজে (চিত্র 3.9) A এবং B কোণ যথাক্রমে 30° এবং 135° (চিত্রে প্রদর্শিত) এবং AB বাহু 500 সে.মি. ; C হইতে বর্ধিত ABর উপর অঙ্কিত লম্বটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[**সমাধান :** ধরা যাক্ $CD = h$; এখন $\angle CBD = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

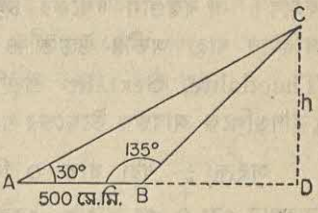
স্থতরাং $BD = CD = h$;

এখন $\tan DAC = \tan 30^\circ = h/AD$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{h}{500+h}$; ইহা হইতে

$h = 250(\sqrt{3}+1)$ সে.মি.

বা $h = 250 \times 2{\cdot}732$ সে.মি. (প্রায়) $= 683$ সে.মি. (প্রায়)।]

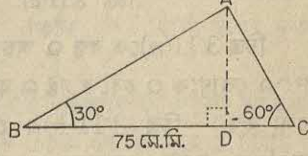


চিত্র 3.9.

6. ABC ত্রিভুজে বর্ধিত ACর উপর BD লম্ব ; $A = 30^\circ$, $\angle BCA = 120^\circ$ এবং $AC = 100$ হইলে BD নির্ণয় কর।

7. ABC ত্রিভুজে BCর উপর AD লম্ব এবং $BD = 75$ সে.মি. ; B এবং C যথাক্রমে 30° এবং 60° হইলে AB, AC এবং AD দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[**সমাধান :** চিত্র 3.10 দ্রষ্টব্য। ABD ত্রিভুজে $\sec 30^\circ = AB/75 = 2/\sqrt{3}$, স্থতরাং $AB = 50\sqrt{3}$ সে.মি. $= 50 \times 1{\cdot}732$ সে.মি. $= 86{\cdot}6$ সে.মি ; $\tan 30^\circ = AD/75$ অর্থাৎ $AD = 75 \tan 30^\circ = 75/\sqrt{3} = 25\sqrt{3} = 43{\cdot}3$ সে.মি.। আবার ACD ত্রিভুজ হইতে $\operatorname{cosec} 60^\circ = AC/AD$; স্থতরাং $AC = 25\sqrt{3}(2/\sqrt{3}) = 50$ সে.মি.।]



চিত্র 3.10.

8. ABC ত্রিভুজের AC ভূমির উপর BD লম্ব হইলে a এবং c নির্ণয় কর ; দেওয়া আছে $A = 30^\circ$, $C = 45^\circ$ এবং $BD = 10$.

9. সমকোণী ত্রিভুজ ABC এর অতিভুজ ACর উপর B হইতে লম্ব অঙ্কিত হইল ; অতিভুজটির অংশ দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। দেওয়া আছে $BC = 8$, $\angle BCA = 60^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$.

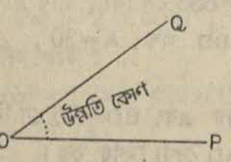
10. ABC ত্রিভুজে $a=9{\cdot}6$ সে মি., $c=5{\cdot}4$ সে.মি, $B=37^\circ$; দেখাও যে A হইতে BCর উপর অঙ্কিত লম্ব ADর দৈর্ঘ্য 3·25 সে.মি. (প্রায়) এবং BDর দৈর্ঘ্য 4·31 সে.মি. (প্রায়)।

ইহা হইতে দেখাও যে $\tan ACD=0{\cdot}6144$ (প্রায়) এবং A ও C এর মান আসন্ন ডিগ্রীতে নির্ণয় কর। [প্রদত্ত $\cos 37^\circ=0{\cdot}7986$, $\sin 37^\circ=0{\cdot}6018$, $\tan 32^\circ=0{\cdot}6144$ (আসন্ন ডিগ্রীতে)]।

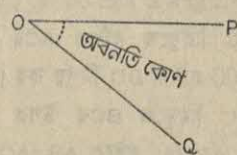
3·4. প্রয়োগ (Applications) : উচ্চতা ও দূরত্ব বিষয়ক সরল প্রশ্ন (Simple problems in Heights and Distances)

বস্তুসমূহের উচ্চতা ও দূরত্ব যেক্ষেত্রে সরাসরি পরিমাপ করা সম্ভব নহে, সেইক্ষেত্রে সংশ্লিষ্ট প্রশ্নগুলির সমাধানে এ পর্যন্ত আলোচিত সূত্র ও নীতিগুলি এখন প্রয়োগ করা হইবে। ঐ বস্তুগুলি দর্শকের চক্ষুকেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাহাদের পর্যবেক্ষণ ও পরিমাপ দ্বারা অভীষ্ট উচ্চতা ও দূরত্ব নির্ণয় করা হয়। ধরিয়া লওয়া হইবে যে Theodolite, Sextant প্রভৃতি উপযুক্ত যন্ত্রের সাহায্যে প্রয়োজনীয় রেখা ও কোণগুলিকে আবশ্যক উদ্দেশ্যের পক্ষে যথেষ্ট সূক্ষ্মভাবে পরিমাপ করা যায়।

সংজ্ঞা : ধরা যাক O বিন্দু দর্শকের অবস্থান নির্দেশ করে, Q বিন্দু বস্তুর অবস্থান এবং Q এর সহিত একই উল্লম্ব সমতলে অবস্থিত OP অনুভূমিক অর্ধ-রেখা। OQ যুক্ত করা হইল।



চিত্র 3.11(*a*).



চিত্র 3.11(*b*).

চিত্র 3·11(*a*)তে বস্তু Q অনুভূমিক অর্ধরেখা OPর **উপরে** অবস্থিত ; এক্ষেত্রে POQ কোণকে O হইতে দৃষ্ট Q বস্তুর **উন্নতি কোণ** (angle of elevation) বলা হয়। চিত্র 3·11(*b*)এ যেখানে Q বস্তু অনুভূমিক অর্ধরেখা OP এর নিচে অবস্থিত, POQ কোণকে O হইতে দৃষ্ট Q বস্তুর **অবনতি কোণ** (angle of depression) বলা হয়।

উদাহরণের সাহায্যে বিষয়টি পরিস্ফুট করা যাক্।

প্রশ্নমালা III(C)

1. অনুভূমিক সমতলের উপর একটি উল্লম্ব খুঁটি দণ্ডায়মান ; ইহার পাদবিন্দু হইতে 200 সে.মি. দূরবর্তী ঐ অনুভূমিক তলটির উপর অবস্থিত কোন বিন্দু হইতে উহার শীর্ষের উন্নতি কোণ 60° বলিয়া দেখা গেল। খুঁটিটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

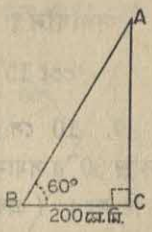
[**সমাধান :** চিত্র 3.12 দ্রষ্টব্য। এখানে

$$\tan 60^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{200} = \sqrt{3}$$

∴ খুঁটিটির উচ্চতা $= AC = 200\sqrt{3}$ সে.মি.

$= 200 \times 1{\cdot}732$ (প্রায়)

$= 346{\cdot}4$ সে.মি. (প্রায়)]

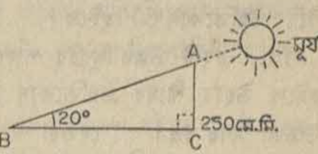


চিত্র 3.12.

2. একটি উল্লম্ব চিম্‌নি (chimney) হইতে 30 মিটার দূরবর্তী কোন বিন্দুতে চিম্‌নিটির শীর্ষের উন্নতিকোণ 30° ; চিমনিটির উচ্চতা এবং উহার শীর্ষ হইতে দর্শকের দূরত্ব নির্ণয় কর। [ধরিয়া লও, দর্শক চিমনিটির পাদ বিন্দুগামী অনুভূমিক তলে অবস্থিত।]

3 একটি উড্ডীয়মান ঘুড়ির দড়ি (সরলরেখায় অবস্থিত বলিয়া মনে করিতে হইবে) 600 মিটার দীর্ঘ এবং দড়িটি অনুভূমিক ভূমিস্থিত কোন বিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন করে তাহার সাইন অনুপাত হইল 5/12 ; ঘুড়িটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

4. সূর্য দিগন্ত রেখার (horizon) 20° উপরে অবস্থিত হইলে 250 সে.মি. উচ্চ একটি উল্লম্ব খুঁটির পিছনে ছায়ার দৈর্ঘ্য কত হইবে ? (প্রদত্ত $\cot 20^\circ = 2{\cdot}7$)



চিত্র 3.13.

[**সমাধান :** চিত্র 3.13 দ্রষ্টব্য। ছায়ার দৈর্ঘ্য $= BC$

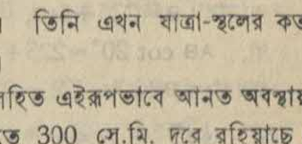
$$\cot 20^\circ = \frac{BC}{250},\ BC = 250 \times 2{\cdot}7 = 675 \text{ সে.মি.}]$$

5. সূর্যের উন্নতিকোণ কত হইলে একটি উল্লম্ব খুঁটির পিছনে ছায়ার দৈর্ঘ্য, খুঁটিটির উচ্চতার $\sqrt{3}$ গুণ হইবে ?

6. অনুভূমিক তলের সহিত 20° কোণে নত একটি রাস্তা বরাবর গাড়ী চালাইয়া এক ব্যক্তি 1500 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করিলেন। তিনি এখন যাত্রা-স্থলের কত উচ্চে রহিয়াছেন ? (প্রদত্ত : $\sin 20^\circ = 0{\cdot}34$)।

7. একটি মইকে কোন বাড়ীর দেওয়ালের সহিত এইরূপভাবে আনত অবস্থায় রাখা হইয়াছে যে মইটির পাদদেশ দেওয়াল হইতে 300 সে.মি. দূরে রহিয়াছে। মইটি জমির সহিত 70° কোণ করিলে উহার শীর্ষ জমি হইতে কত উচ্চে অবস্থিত এবং উহার দৈর্ঘ্য কত ? [ধরিয়া লও : $\tan 70^\circ = 2{\cdot}7$ এবং $\sec 70^\circ = 2{\cdot}9$].

8. সমুদ্র-পৃষ্ঠ হইতে একটি আলোকগৃহের শীর্ষের উচ্চতা 300 সে.মি. এবং ঐ শীর্ষ হইতে কোন একটি নৌকার অবনতি কোণ 15° ; $\cot 15^\circ = 3{\cdot}7$ ধরিয়া আলোকগৃহের পাদদেশ হইতে নৌকাটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

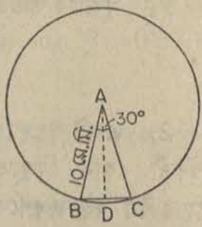


চিত্র 3.14.

[**সমাধান :** চিত্র 3.14 দ্রষ্টব্য।

$$\cot 15^\circ = \frac{BC}{300}; \quad \therefore \quad BC = 300 \times 3{\cdot}7 = 1110 \text{ সে.মি. }]$$

9. 10 সে.মি. ব্যাসার্ধের কোন বৃত্তের যে জ্যা কেন্দ্রে 30°'র সমান সম্মুখ-কোণ উৎপন্ন করে তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। (প্রদত্ত : $\sin 15^\circ = 0{\cdot}26$)

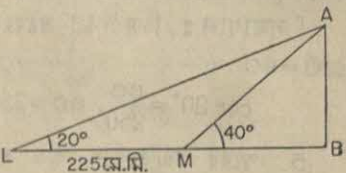


চিত্র 3.15.

[**সমাধান :** চিত্র 3.15 দ্রষ্টব্য। AB = AC = 10 সে.মি.। ধরা যাক্ AD, ∠BAC কে সমদ্বিখণ্ডিত করিল। তাহা হইলে BD = DC ; এখন ABD সমকোণী ত্রিভুজ বলিয়া sin BAD = BD/AB বা BD = AB sin 15° = 10(0·26) = 2·6 সে.মি. ; সুতরাং BC = 5·2 সে.মি.।]

10. একটি অসম্পূর্ণ বুরুজের পাদদেশ হইতে 120 সে.মি. দূরবর্তী কোন বিন্দুতে বুরুজটির শীর্ষের উন্নতিকোণ 45° ; বুরুজটির উচ্চতা কত বৃদ্ধি করিলে ঐ একই বিন্দুতে শীর্ষের উন্নতিকোণ 60° হইবে ?

11. একটি উল্লম্ব খুঁটির পাদদেশ অভিমুখে কোন দর্শক 225 সে.মি. অগ্রসর হইলে উহার শীর্ষের উন্নতিকোণ 20° হইতে পরিবর্তিত হইয়া 40° হয় ; ঐ খুঁটির উচ্চতা নির্ণয় কর। (দেওয়া আছে : $\cot 20^\circ = 2{\cdot}7$ এবং $\cot 40^\circ = 1{\cdot}2$)



চিত্র 3.16.

[**সমাধান :** চিত্র 3.16 দ্রষ্টব্য। AB হইল উল্লম্ব খুঁটি। LM = 225 সে.মি.। সমকোণী ত্রিভুজ ALB হইতে cot 20° = LB/AB এবং অপর সমকোণী ত্রিভুজ AMB হইতে cot 40° = MB/AB ;

আবার LB = 225 + MB,

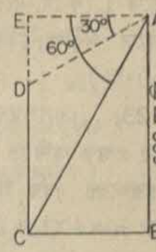
বা, AB cot 20° = 225 + AB cot 40° ;

সুতরাং AB (2·7 − 1·2) = 225, অর্থাৎ AB = 225/1·5 = 150 সে.মি.।]

12. একটি তালবৃক্ষের উচ্চতা নির্ণয়ে ইচ্ছুক কোন ব্যক্তি বৃক্ষটির পাদদেশগামী অনুভূমিক তলের কোন বিন্দুতে দণ্ডায়মান হইয়া দেখিলেন যে ঐ বিন্দুতে বৃক্ষটির শীর্ষের উন্নতিকোণ 45° ; এখন বৃক্ষটির পাদবিন্দু অভিমুখে তিনি 250 সে.মি. অগ্রসর হইলেন এবং দেখিলেন যে ঐ বিন্দুতে উন্নতিকোণ 60° হইল। বৃক্ষটির উচ্চতা এবং বৃক্ষটির পাদবিন্দু হইতে ঐ ব্যক্তির প্রাথমিক দূরত্ব আসন্ন সেন্টিমিটারে নির্ণয় কর।

13. একটি উল্লম্ব পতাকা-দণ্ডের পূর্বদিকে অবস্থিত দুই স্থানে উহার শীর্ষের উন্নতিকোণ যথাক্রমে 45° এবং 30° ; স্থান দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব 10 মিটার হইলে পতাকাদণ্ডটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

14. 600 সে.মি. খাড়া উচ্চ একটি খুঁটির শীর্ষ হইতে কোন চিমনির শীর্ষের এবং পাদমূলের অবনতি কোণ দুইটি যথাক্রমে 30° এবং 60°; চিমনিটির উচ্চতা নির্ণয় কর।



চিত্র 3.17.

সমাধান: চিত্র 3.17 দ্রষ্টব্য। ধরা যাক্ A খুঁটির শীর্ষ এবং চিমনি CD $=x$; এখন cot ACB $=$ CB/AB, সুতরাং CB $=$ AB cot ACB $=600\times\cot 60°=600/\sqrt{3}$, কারণ $\angle$ACB $=\angle$EAC $=60°$; আবার tan EAD $=$ tan $30°=$ ED/EA বা $1/\sqrt{3}=(600-x)/$CB $=(600-x)\times(\sqrt{3}/600)$, সুতরাং $x=400$ সে.মি]

15. 100 মিটার উচ্চ একটি স্মৃতি-স্তম্ভের শীর্ষ হইতে উহার পশ্চিমদিকে ভূমিতে অবস্থিত দুইটি বস্তুর অবনতি কোণ যথাক্রমে 45° এবং 30°; বস্তু দুইটির পরস্পরের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।

16. একটি পর্বতশীর্ষ হইতে উহার ঠিক দক্ষিণ অভিমুখে বিস্তৃত কোন সমতল পথের উপর অবস্থিত পর পর দুইটি মাইল-নির্দেশক প্রস্তরের অবনতি কোণ যথাক্রমে 45° এবং 22°; যদি cot 22° $=2.475$, তবে পর্বতটির উচ্চতা কিলোমিটারে নির্ণয় কর। (1 মাইল $=1.61$ কি.মি. ধর)

17. 50 মিটার উচ্চ একটি বুরুজের পাদদেশ এবং শীর্ষদেশ হইতে একটি উল্লম্ব স্তম্ভের শীর্ষের উন্নতিকোণ যথাক্রমে 60° এবং 30°; স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

18. 30 মিটার উচ্চ একটি উল্লম্ব খুঁটির পাদবিন্দু এবং শীর্ষবিন্দু হইতে একটি বুরুজ-শীর্ষের উন্নতিকোণ যথাক্রমে 45° এবং 30°; বুরুজটির উচ্চতা এবং খুঁটি হইতে উহার দূরত্ব নির্ণয় কর।

19. সমান উচ্চতার দুইটি স্তম্ভ 300 সে.মি. চওড়া একটি রাস্তার উভয় পার্শ্বে পরস্পর বিপরীত দিকে অবস্থিত; স্তম্ভ দুইটির মধ্যবর্তী রাস্তার উপর কোন বিন্দুতে উহাদের শীর্ষের উন্নতিকোণ যথাক্রমে 60° এবং 30°; স্তম্ভ দুইটির উচ্চতা এবং বিন্দুটির অবস্থান আসন্ন সেন্টিমিটারে নির্ণয় কর।

20. ঝড়ে ভাঙিয়া যাওয়া একটি বৃক্ষ মাটির সহিত একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করিয়াছে। ভগ্ন অংশটি মাটির সহিত 30° কোণে নত এবং বৃক্ষ-শীর্ষ বৃক্ষটির পাদদেশ হইতে 500 সে.মি. দূরে মাটিকে স্পর্শ করিয়াছে; বৃক্ষটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

21. এক আমিন একটি নদীর বিস্তার নির্ণয়ের উদ্দেশ্যে নদীটির এক তীরে কোন বিন্দু A তে আসিয়া যন্ত্রের মধ্য দিয়া অপর তীরে ঠিক বিপরীতে অবস্থিত একটি বিন্দু B কে লক্ষ্য করিলেন। এখন তিনি হুবহু 90° কোণে ঘুরিয়া দাঁড়াইলেন এবং সোজা AC $=225$ মিটার দূরত্ব অতিক্রম করিয়া C বিন্দুতে আসিলেন ও যন্ত্রের সাহায্যে মাপিয়া দেখিলেন যে $\angle$ACB $=48°20'$; নদীটির বিস্তার নির্ণয় কর।

(প্রদত্ত: tan $48°20'=1.1237$)

22. দুইটি সরল পথ পরস্পরকে 75° কোণে ছেদ করিয়াছে এবং এই ছেদবিন্দু হইতে 1 কি.মি. দূরে পথ দুইটির একটির উপর এক পরীক্ষা-কেন্দ্র অবস্থিত ; অপর পথ হইতে পরীক্ষা-কেন্দ্রটির সংক্ষিপ্ততম দূরত্ব নির্ণয় কর। (ধরিয়া লও যে $\sin 75^\circ = 0{\cdot}97$)।

23. r ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার চাকতির মধ্যে নিয়মিত দূরত্বে পরপর বৃত্তাকার ছিদ্র প্রস্তুত করিতে হইবে। যদি ছিদ্রগুলির মোট সংখ্যা n এবং পরপর দুইটি ছিদ্রের কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব d হয় তবে দেখাও যে $d=2r \sin (180^\circ/n)$। $r=20$ সে.মি. এবং $n=4$ হইলে d নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা III(A)

3. (i) 1 ; (ii) $\frac{3}{2}$; (iii) $\frac{3}{2}$; (iv) $4\frac{1}{3}$; (v) 0 ; (vi) 0.
5. (i) $\sqrt{3}/2$; (ii) 5. 6 (i) 60° ; (ii) $0^\circ, 90^\circ$; (iii) 45° ; (iv) 30° ; (v) 30° ; (vi) 60°
7. (i), (ii), (iv) সম্ভব নহে ; (iii) $30^\circ, 90^\circ$.

প্রশ্নমালা III(B)

1. (ii) $c=2$, $B=60^\circ$, $C=30^\circ$; (iii) $a=2\sqrt{2}$, $B=C=45^\circ$; (iv) $a=9$, $A=60^\circ$, $C=30^\circ$. 2. (ii) $B=60^\circ$, $b=27$, $c=18\sqrt{3}$; (iii) $A=90^\circ$, $b=4$, $a=4\sqrt{2}$; (iv) $A=90^\circ$, $b=4$, $c=4\sqrt{3}$
3. $C=54^\circ$, $a=73$, $b=124$. 4. $B=68^\circ 17'$, $C=21^\circ 43'$, $b=93$.
6. $100\sqrt{3}$ বা $173{\cdot}2$ (প্রায়) 8. $a=10\sqrt{2}=14{\cdot}14$ (প্রায়), $c=20$
9. 12, 4. 10. $A=111^\circ$ (প্রায়) এবং $C=32^\circ$ (প্রায়)

প্রশ্নমালা III(C)

2. 17·32 মি., 34·64 মি.। 3. 250 মি.। 5. 30°
6. 510 মি. 7. 810 সে.মি. 870 সে.মি.। 10. 87·8 সে.মি. (প্রায়)।
12. প্রত্যেকটি 590 সে.মি.। 13. 1366 সে.মি.। 15. 73·2 মি.।
16. 1·09 কি.মি. (প্রায়)। 17. 75 মি.। 18. প্রত্যেকটি 70·98 মি.।
19. 130 সে.মি, একটি স্তম্ভ হইতে 225 সে.মি.। 20. 866 সে.মি. (প্রায়)।
21. 253 মি. (প্রায়)। 22. 0·97 কি.মি.। 23. 28·28 সে.মি. (প্রায়)।

4

পূরক ও সম্পূরক কোণ

(Complementary and Supplementary angles) :

সংযুক্ত কোণ (Associated angles) :

সরল লেখ (Simple graphs)

4·1. সূচনা।

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে আলোচিত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মানের সাহায্যে এখন এই অধ্যায়ে যে কোন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মানকে প্রকাশ করা হইবে। প্রথমেই ছাত্রছাত্রীদের স্মরণ করাইয়া দেওয়া যাইতেছে যে :

যদি θ **যে কোনও** কোণ হয় এবং n ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে কোন অখণ্ড সংখ্যা হয় অথবা শূন্য হয়, তবে

$\sin(\theta+n.360^\circ)=\sin\theta$, বা $\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$; সুতরাং

$\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta$	$\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta$
$\tan(2n\pi+\theta)=\tan\theta$	$\cot(2n\pi+\theta)=\cot\theta$
$\text{cosec}(2n\pi+\theta)=\text{cosec}\,\theta$	$\sec(2n\pi+\theta)=\sec\theta$

উদাহরণস্বরূপ,

$$\sin 440^\circ=\sin(360^\circ+80^\circ)=\sin 80^\circ$$
$$\cos 750^\circ=\cos(2.360^\circ+30^\circ)=\cos 30^\circ$$
$$\tan\left(-\frac{23\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-3.\,2\pi\right)=\tan\frac{\pi}{4}, \text{ ইত্যাদি।}$$

এখন অন্যান্য ক্ষেত্র বিবেচনা করা হইবে।

(A) θ'র ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে $(-\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে প্রকাশ :

চিত্রগুলিতে θ এবং $-\theta$ কোণদ্বয়কে আদর্শ অবস্থানে অঙ্কন করা হইয়াছে এবং উহাদের সাংখ্য মান সমান। θ কে ধনাত্মক এবং দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোণ ধরা হইয়াছে। θ এবং $(-\theta)$'র সীমারেখাদ্বয়ের উপর যথাক্রমে P এবং P′ এমন দুই বিন্দু লওয়া হইয়াছে যেন OP = OP′ হয়। PP′ যুক্ত করায় উহা X-অক্ষকে N বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। OPN এবং OP′N ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম, সুতরাং PP′, X-অক্ষের উপর লম্ব এবং প্রতি চিত্রে

$OP=OP'$ ও $NP'=-NP$; সুতরাং

$\sin(-\theta)=NP'/OP'=-NP/OP=-\sin\theta$,

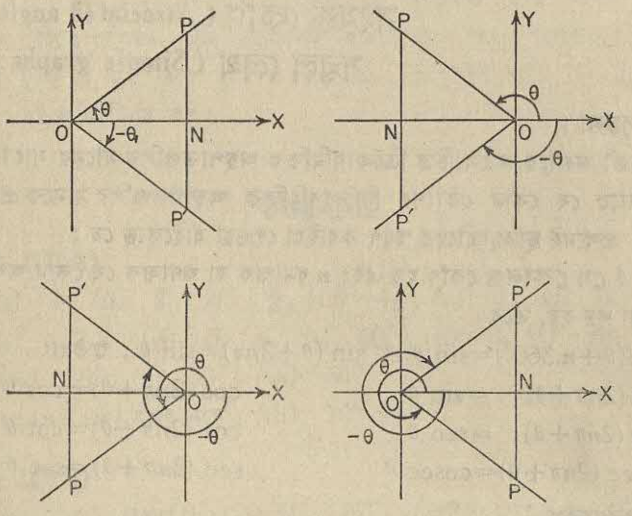
$\cos(-\theta)=ON/OP'=ON/OP=\cos\theta$,

$\tan(-\theta) = NP'/ON = -NP/ON = -\tan\theta,$

$\cot(-\theta) = ON/NP' = ON/-NP = -\cot\theta,$

$\text{cosec}(-\theta) = OP'/NP' = OP/-NP = -\text{cosec}\,\theta,$

$\sec(-\theta) = OP'/ON = OP/ON = \sec\theta.$



চিত্র 4.1.

মন্তব্য :

θ পাদকোণ (quadrantal angle) হইলেও উপরের সম্পর্কগুলি বৈধ হইবে যদি না কোন ক্ষেত্রে অপেক্ষকটি অসংজ্ঞাত হয়। $-90°$ এবং $270°$, $-180°$ এবং $180°$, $-270°$ এবং $90°$, এই কোণ-যুগলগুলির প্রতিটি যুগল-কোণ যে সহ-সীমারেখ (co-terminal), এই তথ্যের সাহায্যে উপরের উক্তিটির সত্যতা যাচাই করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ,

$\sin(-90°) = \sin 270° = -1 = -\sin 90,$

$\tan(-180°) = \tan 180° = 0 = -\tan 180°,$

$\cot(-270°) = \cot 90° = 0 = -\cot 270°$ ইত্যাদি।

(B) θ'র ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে $(90° - \theta)$ কোণের ঐ অনুপাতের মানকে প্রকাশ : পূরক কোণ

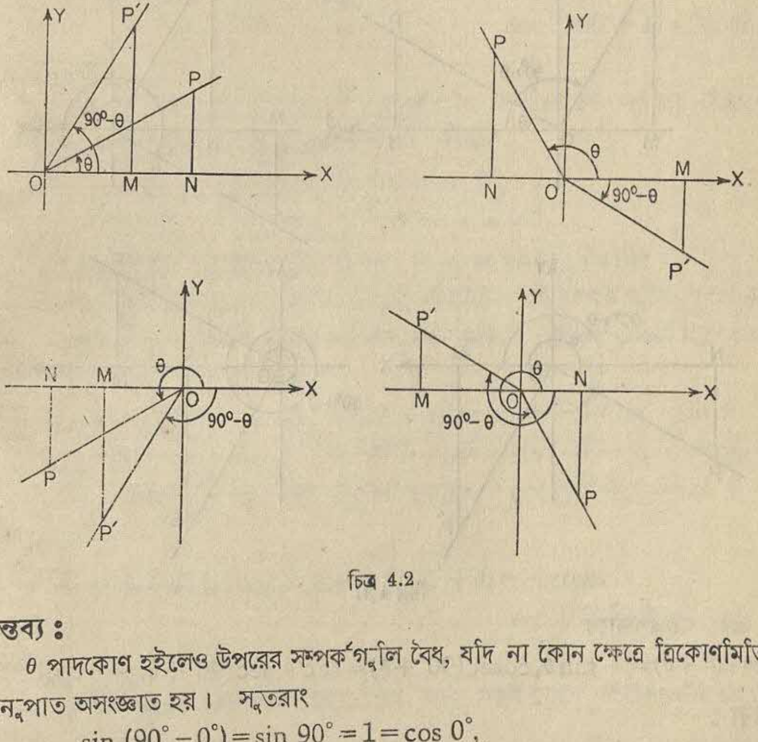
θ কে ধনাত্মক এবং দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধরা হইয়াছে। চিত্রগুলিতে (চিত্র 4.2 দ্রষ্টব্য) θ এবং $(90° - \theta)$ কোণদ্বয়ের সীমারেখাদ্বয়ের উপর যথাক্রমে P এবং P′ বিন্দুদ্বয় লওয়া হইয়াছে যাহাতে OP = OP′ হয়। চিত্রগুলির প্রত্যেকটিতে OPN এবং OP′M ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম (∵ x অক্ষের উপর NP ও MP′ লম্ব)।

এখন যেহেতু OP=OP', ON=MP', NP=OM, সুতরাং

$$\sin(90° - \theta) = MP'/OP' = ON/OP = \cos\theta$$
$$\cos(90° - \theta) = OM/OP' = NP/OP = \sin\theta$$
$$\tan(90° - \theta) = MP'/OM = ON/NP = \cot\theta$$

এবং অনুরূপে

$\cot(90° - \theta) = \tan\theta$, $\text{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$, $\sec(90° - \theta) = \text{cosec}\,\theta$.



চিত্র 4.2

মন্তব্য :

θ পাদকোণ হইলেও উপরের সম্পর্কগুলি বৈধ, যদি না কোন ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত অসংজ্ঞাত হয়। সুতরাং

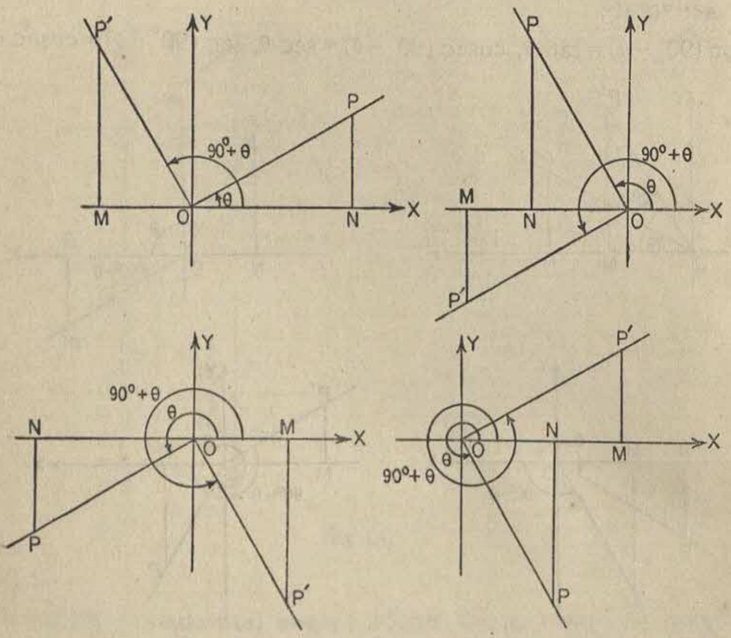
$$\sin(90° - 0°) = \sin 90° = 1 = \cos 0°,$$
$$\tan(90° - 90°) = \tan 0° = 0 = \cot 90°,$$
$$\cos(90° - 180°) = \cos(-90°) = \cos 90° = 0 = \sin(180°)$$ ইত্যাদি।

(C) θ দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক কোণ হইলে $90° + \theta$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলিকে নিম্নতর অবস্থায় প্রকাশ (Reduction), অর্থাৎ θ কোণের অনুপাতে প্রকাশ :

চিত্রগুলিতে (চিত্র 4.3) θ এবং $90° + \theta$ কোণকে আদর্শ অবস্থানে অঙ্কন করা হইয়াছে এবং উহাদের সীমারেখার উপর যথাক্রমে P এবং P′ বিন্দু লওয়া হইয়াছে যাহাতে OP=OP′ হয়। চিত্রগুলির প্রত্যেকটিতে x অক্ষের উপর NP এবং MP′ লম্ব অঙ্কিত হওয়ায় OPN এবং OP′M ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। এখন

$OP = OP'$, $OM = -NP$, $MP' = ON$; তাহা হইলে

$$\sin(90°+\theta) = MP'/OP' = ON/OP = \cos\theta$$
$$\cos(90°+\theta) = OM/OP' = -NP/OP = -\sin\theta$$
$$\tan(90°+\theta) = MP'/OM = ON/-NP = -\cot\theta$$



চিত্র 4.3.

এবং অনুরূপভাবে

$$\cot(90°+\theta) = -\tan\theta, \operatorname{cosec}(90°+\theta) = \sec\theta, \sec(90°+\theta) = -\operatorname{cosec}\theta.$$

মন্তব্য :

θ পাদকোণ হইলেও উপরের সম্পর্কগুলি বৈধ যদি না কোন ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতটি অসংজ্ঞাত হয়। উদাহরণস্বরূপ

$$\sin(90°+0°) = \sin 90° = 1 = \cos 0°,$$
$$\cos(90°+180°) = \cos 270° = 0 = -\sin 180°,$$
$$\tan(90°+270°) = \tan 360° = \tan 0° = 0 = -\cot 270°$$ ইত্যাদি।

(D) সম্পূরক কোণ : $(180°-\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক

সংজ্ঞা। দুইটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ হইলে কোণ দুইটিকে পরস্পর সম্পূরক বলা হয়। অর্থাৎ যে কোন কোণ θ'র সম্পূরক হইল $180° - \theta$.

θ কে ধনাত্মক এবং দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোণ ধরিয়া এবং পূর্বলব্ধ সম্পর্কগুলির সাহায্য লইয়া এখন নিম্নে প্রদত্ত সম্পর্কগুলি পাওয়া যায়, যথা ঃ

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\{90^\circ+(90^\circ-\theta)\}=\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(180^\circ-\theta)=\cos\{90^\circ+(90^\circ-\theta)\}=-\sin(90^\circ-\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(180^\circ-\theta)=\tan\{90^\circ+(90^\circ-\theta)\}=-\cot(90^\circ-\theta)=-\tan\theta$$

এবং অনুরূপভাবে

$$\cot(180^\circ-\theta)=-\cot\theta,\ \operatorname{cosec}(180^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta,\ \sec(180^\circ-\theta)=-\sec\theta.$$

মন্তব্য ঃ

1. θ পাদকোণ হইলেও উপরের সম্পর্কগুলি অপরিবর্তিত থাকিবে, যদি না অবশ্য কোন ক্ষেত্রে অপেক্ষকটি অসংজ্ঞাত হয়। যেমন

$$\sin(180^\circ-0^\circ)=\sin 180^\circ=0=\sin 0^\circ,$$
$$\cos(180^\circ-90^\circ)=\cos 90^\circ=0=-\cos 90^\circ,$$
$$\sec(180^\circ-180^\circ)=\sec 0^\circ=1=-\sec(180^\circ)$$ ইত্যাদি।

2. পূর্ববর্তী ক্ষেত্রগুলির ন্যায় চিত্রের সাহায্যেও এই সম্পর্কগুলি প্রমাণ করা যায়। ছাত্রছাত্রীদের এইভাবে প্রমাণ করিবার চেষ্টা করিতে পরামর্শ দেওয়া যাইতেছে।

(E) $180^\circ+\theta$

$$\sin(180^\circ+\theta)=\sin\{90^\circ+(90^\circ+\theta)\}=\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(180^\circ+\theta)=\cos\{90^\circ+(90^\circ+\theta)\}=-\sin(90^\circ+\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(180^\circ+\theta)=\tan\{90^\circ+(90^\circ+\theta)\}=-\cot(90^\circ+\theta)=\tan\theta$$

এবং অনুরূপভাবে

$$\cot(180^\circ+\theta)=\cot\theta,\ \operatorname{cosec}(180^\circ+\theta)=-\operatorname{cosec}\theta,\ \sec(180^\circ+\theta)=-\sec\theta.$$

মন্তব্য ঃ

θ পাদকোণ হইলে অসংজ্ঞাত ক্ষেত্র ভিন্ন আর সকল ক্ষেত্রে এই সম্পর্কগুলি বৈধ হইবে। যেমন

$$\sin(180^\circ+270^\circ)=\sin 450^\circ=\sin(360^\circ+90^\circ)=\sin 90^\circ=1=-\sin 270^\circ$$
$$\cos(180^\circ+180^\circ)=\cos 360^\circ=\cos 0^\circ=1=-\cos 180,$$ ইত্যাদি।

চিত্রের সাহায্যে প্রমাণের কার্য ছাত্রছাত্রীদের অনুশীলনের জন্য রাখিয়া দেওয়া হইল।

(F) $270^\circ-\theta$ এবং $270^\circ+\theta$

$$\sin(270^\circ-\theta)=\sin\{180^\circ+(90^\circ-\theta)\}=-\sin(90^\circ-\theta)=-\cos\theta$$
$$\cos(270^\circ-\theta)=\cos\{180^\circ+(90^\circ-\theta)\}=-\cos(90^\circ-\theta)=-\sin\theta$$
$$\tan(270^\circ-\theta)=\tan\{180^\circ+(90^\circ-\theta)\}=\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta$$

এবং অনুরূপভাবে

$\cot(270^\circ-\theta)=\tan\theta$, $\operatorname{cosec}(270^\circ-\theta)=-\sec\theta$,
$\sec(270^\circ-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$.

আবার, $270^\circ+\theta=180^\circ+(90^\circ+\theta)$ লইয়া পাওয়া যায়

$$\sin(270^\circ+\theta)=\sin\{180^\circ+(90^\circ+\theta)\}=-\sin(90^\circ+\theta)=-\cos\theta$$
$$\cos(270^\circ+\theta)=\cos\{180^\circ+(90^\circ+\theta)\}=-\cos(90^\circ+\theta)=\sin\theta$$
$$\tan(270^\circ+\theta)=\tan\{180^\circ+(90^\circ+\theta)\}=\tan(90^\circ+\theta)=-\cot\theta$$

এবং অনুরূপভাবে

$\cot(270^\circ+\theta)=-\tan\theta$, $\operatorname{cosec}(270^\circ+\theta)=-\sec\theta$, $\sec(270^\circ+\theta)$
$=\operatorname{cosec}\theta$.

টীকা। ছাত্রছাত্রীরা প্রাসঙ্গিক মন্তব্যগুলি লিখিবে, চিত্রের সাহায্যে এই সম্পর্কগুলি প্রমাণ করিবে এবং পাদকোণের ক্ষেত্রগুলি আলোচনা করিবে।

4·2. নিম্নতর অবস্থায় আনয়নের সাধারণ সূত্র (General reduction formula)

এখন নিম্নের সাধারণ কার্যকরী নিয়মটি সূত্রের আকারে প্রকাশ করা যায়। বিষয়টির পরবর্তী অগ্রগতির ক্ষেত্রে ইহার প্রয়োজন হইবে।

নিয়ম : ι যে কোন কোণ হইলে ($n.\ 90^\circ\pm\theta$) বা ($n.\ \frac{\pi}{2}\pm\theta$) এর যে কোন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের পরম সাংখ্যমান

(i) θ কোণের **একই অপেক্ষকের** সহিত **সমান হইবে,** যদি n যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা বা শূন্য হয়।

(ii) θ কোণের অনুরূপ **সহ-অপেক্ষকের** সহিত **সমান হইবে,** যদি n অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা হয়।

θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ ধরিলে ($n\,\frac{\pi}{2}\pm\iota$) যে পাদতে থাকিবে সেই পাদতে প্রদত্ত অপেক্ষকের যে চিহ্ন হওয়ার কথা, উপরের হিসাব অনুসারে প্রাপ্ত অপেক্ষকটিরও সেই চিহ্ন হইবে।

নিয়মটির সত্যতা যাচাই করা যাক্। n কে যে কোন অখণ্ড সংখ্যা ধরিলে ইহাকে $4m$, $4m+1$, $4m+2$, $4m+3$ এর কোন না কোন একটি আকারে লেখা যায়—এখানে m হইল শূন্য সহ কোন অখণ্ড সংখ্যা। প্রাসঙ্গিক বিষয়গুলি বিবেচনার সুবিধার জন্য n কে এইরূপ আকারে লওয়া হইয়া থাকে—পরবর্তী আলোচনা হইতে ইহা বুঝা যাইবে।

(a) ধরা যাক্ $n=4m$; তাহা হইলে

$$\sin(n.\tfrac{1}{2}\pi+\theta)=\sin(4m\,\tfrac{1}{2}\pi+\theta)=\sin(2m\pi+\theta)=\sin\theta$$
$$\sin(n.\tfrac{1}{2}\pi-\theta)=\sin(2m\pi-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(n.\tfrac{1}{2}\pi+\theta)=\cos(2m\pi+\theta)=\cos\theta$$
$$\cos(n.\tfrac{1}{2}\pi-\theta)=\cos(2m\pi-\theta)=\cos(-\theta)=\cos\theta,$$ ইত্যাদি।

(b) যখন $n=4m+1$, তখন

$$\sin(n.\tfrac{1}{2}\pi+\theta)=\sin\{(4m+1).\tfrac{1}{2}\pi+\theta\}=\sin(2m\pi+\tfrac{1}{2}\pi+\theta)$$
$$=\sin(\tfrac{1}{2}\pi+\theta)=\cos\theta$$
$$\sin(n.\tfrac{1}{2}\pi-\theta)=\sin(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)=\cos\theta$$
$$\cos(n.\tfrac{1}{2}\pi+\theta)=\cos(\tfrac{1}{2}\pi+\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(n.\tfrac{1}{2}\pi-\theta)=\cos(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)=\sin\theta,$$ ইত্যাদি।

(c) যদি $n=4m+2$ হয়, তবে

$$\sin(n.\tfrac{1}{2}\pi+\theta)=\sin\{(4m+2).\tfrac{1}{2}\pi+\theta\}=\sin(2m\pi+\pi+\theta)$$
$$=\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$$
$$\sin(n.\tfrac{1}{2}\pi-\theta)=\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(n.\tfrac{1}{2}\pi+\theta)=\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$
$$\cos(n.\tfrac{1}{2}\pi-\theta)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta,$$ ইত্যাদি।

(d) ধরা যাক্ $n=4m+3$, তাহা হইলে

$$\sin(n.\tfrac{1}{2}\pi+\theta)=\sin\{(4m+3).\tfrac{1}{2}\pi+\theta\}=\sin(2m\pi+\tfrac{3}{2}\pi+\theta)$$
$$=\sin(\tfrac{3}{2}\pi+\theta)=-\cos\theta$$
$$\sin(n.\tfrac{1}{2}\pi-\theta)=\sin(\tfrac{3}{2}\pi-\theta)=-\cos\theta$$
$$\cos(n.\tfrac{1}{2}\pi+\theta)=\cos(\tfrac{3}{2}\pi+\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(n.\tfrac{1}{2}\pi-\theta)=\cos(\tfrac{3}{2}\pi-\theta)=-\sin\theta,$$ ইত্যাদি।

অন্যান্য অনুপাত এখন সহজেই নির্ণয় করা যাইবে ও যাচাই কার্য সম্পূর্ণ করা যাইবে। লক্ষ্য করা যাইবে যে এ পর্যন্ত আলোচিত সমুদয় কোণেরই সাহায্য এখানে গ্রহণ করা হইয়াছে।

এখন কতিপয় উদাহরণ সহযোগে বিষয়টিকে পরিস্ফুট করা যাক্, যথা :

$$\sin(5.\tfrac{1}{2}\pi+\theta)=\cos\theta,\ \cos(6.\tfrac{1}{2}\pi+\theta)=-\cos\theta,\ \tan(7.\tfrac{1}{2}\pi+\theta)$$
$$=-\cot\theta,$$
$$\cot(8.\tfrac{1}{2}\pi+\theta)=\cot\theta,\ \text{cosec}(9.\tfrac{1}{2}\pi+\theta)=\sec\theta,\ \sec(10.\tfrac{1}{2}\pi+\theta)$$
$$=-\sec\theta,$$
$$\sin(11.\tfrac{1}{2}\pi-\theta)=-\cos\theta,\ \cos(12.\tfrac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta,$$
$$\tan(13.\tfrac{1}{2}\pi-\theta)=\cot\theta,$$
$$\cot(14.\tfrac{1}{2}\pi-\theta)=-\cot\theta,\ \text{cosec}(15.\tfrac{1}{2}\pi-\theta)=-\sec\theta,$$
$$\sec(16.\tfrac{1}{2}\pi-\theta)=\sec\theta,$$
$$\sin(\theta-\tfrac{1}{2}\pi)=\sin\{-(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)\}=-\sin(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)=-\cos\theta,$$
$$\sin 130^\circ=\sin(2.90^\circ-50^\circ)=\sin 50^\circ$$
বা, $=\sin(90^\circ+40^\circ)=\cos 40^\circ$
$$\cos(-680^\circ)=\cos(-680^\circ+2.360^\circ)=\cos 40^\circ$$
বা, $=\cos 680^\circ=\cos(2.360^\circ-40^\circ)=\cos 40^\circ$

$\tan 325^\circ = \tan(4.90^\circ - 35^\circ) = -\tan 35^\circ$

বা, $= \tan(3.90^\circ + 55^\circ) = -\cot 55^\circ$

$\cos 675^\circ = \cos(8.90^\circ - 45^\circ) = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}.$

$\cot 585^\circ = \cot(6.90^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1.$

$\sin 330^\circ = \sin(4.90^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -1/2.$

$\tan 210^\circ = \tan(2.90^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = 1/\sqrt{3}.$

প্রশ্নমালা IV

1. নিম্নে (*a*) তে প্রদত্ত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মান (*b*) তে পাওয়া যাইবে। (*b*) হইতে পর পর একটি করিয়া মান লও এবং উহাকে, যেখানে সম্ভব, (*a*) তে প্রাপ্তব্য অনুরূপ অনুপাত বা অনুপাতসমূহের সহিত যুক্ত (associate) কর। দৃষ্টান্ত হিসাবে যেমন (*b*) হইতে 0 কে লইয়া উহাকে (*a*) তে প্রদত্ত sin 0 এবং cot 990° এর সহিত নিম্নপ্রকারে যুক্ত কর যথা :

$\sin 0 = 0, \cot 990^\circ = 0$;

(*a*) $\sin 0$, $\cos 60^\circ$, $\sin 960^\circ$, $\tan 45^\circ$, $\sin 390^\circ$, $\cot 315^\circ$, $\sin(-870^\circ)$, $\sec 900^\circ$, $\cos 780^\circ$, $\operatorname{cosec} 675^\circ$, $\sec(-675^\circ)$, $\tan(-855^\circ)$, $\operatorname{cosec}(-660^\circ)$, $\cot(840^\circ)$, $\tan 1110^\circ$, $\cot 990^\circ$, $\cos 1125^\circ$, $\operatorname{cosec}(765^\circ)$, $\sec(-1575^\circ)$, $\sin 150^\circ$, $\cos 960^\circ$, $\tan(-1125^\circ)$, $\sec 1305^\circ$, $\sin 855^\circ$, $\operatorname{cosec}(25\pi/6)$, $\sin(15\pi/4)$, $\cot(16\pi/3)$, $\sec(-15\pi/4)$, $\sec(7\pi/3)$, $\cot(23\pi/4)$, $\cot(7\pi/3)$, $\sin(-11\pi/4)$, $\operatorname{cosec}(16\pi/3)$, $\sec(\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{3}\pi)$, $\cos(\frac{5}{2}\pi - \frac{19}{3}\pi)$, $\cot(\pi/6)$, $\sec(\pi/4)$, $\cot(5\pi/6)$, $\operatorname{cosec}(5\pi/6)$.

(*b*) $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1/\sqrt{2}, \sqrt{3}/2, 1, 2, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1/\sqrt{2}, -\sqrt{3}/2, -1, -2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2/\sqrt{3}, 3, -3, -2/\sqrt{3}.$

(*b*) তে কি এমন মান আছে যাহাকে (*a*) তে প্রদত্ত কোন অনুপাতেরই সহিত যুক্ত করা যায় না ? যদি থাকে, তবে উহাদের সংগ্রহ করিয়া দেখাও।

2. প্রত্যেকটিকে ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণের অপেক্ষকরূপে দুই প্রকারে প্রকাশ কর : $\sin 140^\circ$, $\tan 165^\circ$, $\operatorname{cosec} 865^\circ$, $\sec 250^\circ$, $\cot 930^\circ$, $\cos(-680^\circ)$, $\tan 1000^\circ$.

[**সমাধান :** $\sin 140^\circ = \sin(2.90^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ$ বা, $= \sin(90^\circ + 50^\circ) = \cos 50^\circ$.

[উঃ $-\tan 15^\circ$ বা, $-\cot 75^\circ$; $\operatorname{cosec} 35^\circ$ বা, $\sec 55^\circ$; $-\sec 70^\circ$ বা, $-\operatorname{cosec} 20^\circ$; $\cot 30^\circ$ বা, $\tan 60^\circ$; $\cos 40^\circ$ বা, $\sin 50^\circ$; $-\tan 80^\circ$ বা, $-\cot 10^\circ$.]

3. n ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে কোন অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য হইলে দেখাও যে

(i) $\sin n\pi = 0$; (ii) $\cos n\pi = (-1)^n$;

(iii) $\sin (2n\pi + \alpha) = \sin \alpha$; (iv) $\cos (n\pi + \alpha) = (-1)^n \cos \alpha$;

(v) $\tan (n\pi - \alpha) = -\tan \alpha$; (vi) $\sin (n\pi + \alpha) = (-1)^n \sin \alpha$.

[(ii) এর সমাধান : $\cos \pi = -1 = (-1)^1$, $\cos 2\pi = 1 = (-1)^2$, $\cos 3\pi = -1 = (-1)^3$, $\cdots \cdots \cdots$, $\cos 0.\pi = 1 = (-1)^0$, $\cos(-\pi) = \cos \pi = -1 = (-1)^{-1}$; $\cos (-2\pi) = \cos 2\pi = 1 = (-1)^{-2}$, $\cdots \cdots$ সুতরাং $\cdots$]

4. $A + B + C = \pi$ হয়, তবে দেখাও যে

(i) $\sin (B + C) = \sin A$; (ii) $\sin \frac{1}{2}(B + C) = \cos \frac{1}{2}A$;

(iii) $\cos (B + C) = -\cos A$; (iv) $\cos \frac{1}{2}(B + C) = \sin \frac{1}{2}A$;

(v) $\tan (B + C) = -\tan A$; (vi) $\tan \frac{1}{2}(B + C) = \cot \frac{1}{2}A$.

[(iv) এর সমাধান : $B + C = \pi - A$, $\cos \frac{1}{2}(B + C) = \cos \frac{1}{2}(\pi - A) = \cos (\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}A) = \sin \frac{1}{2}A$.]

5. A, B, C কোন ত্রিভুজের কোণ হইলে প্রমাণ কর যে

(i) $\cot (B + C) = -\cot A$; (ii) $\cot \frac{1}{2}(B + C) = \tan \frac{1}{2}A$;

(iii) $\operatorname{cosec} (B + C) = \operatorname{cosec} A$; (iv) $\operatorname{cosec} \frac{1}{2}(B + C) = \sec \frac{1}{2}A$;

(v) $\sec (B + C) = -\sec A$; (vi) $\sec \frac{1}{2}(B + C) = \operatorname{cosec} \frac{1}{2}A$.

6. θ কোণের যে সমস্ত ধনাত্মক এবং 360° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর মানে $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ হয়, সেইগুলি নির্ণয় কর :

[সমাধান : তৃতীয় এবং চতুর্থ পাদতে sine মান ঋণাত্মক। এখন $\sin A = \frac{1}{2}$ হইলে $A = 30^\circ$; আবার $\sin (180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ অর্থাৎ $\theta = \mathbf{210^\circ}$; পুনরায় $\sin (360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ$, সুতরাং $\theta = \mathbf{330^\circ}$.]

7. $0^\circ \leqslant \theta \leqslant 360^\circ$ এই শর্তে নিম্নলিখিত সমীকরণ হইতে θর মান বা মানসমূহ নির্ণয় কর :

(i) $\cos \theta = 1/\sqrt{2}$; (ii) $\tan \theta = 1$; (iii) $\sec^2\theta = 2$;

(iv) $\cot \theta = -\tan 305^\circ$.

[উ : (i) 45°, 315° ; (ii) 45°, 225° ; (iii) 45°, 135°, 225°, 315° ; (iv) 35°, 215°.]

8. প্রমাণ কর যে

(i) $\sin (780^\circ) \cos (390^\circ) + \cos (300^\circ) \sin (-330^\circ) = \cos 360^\circ$

(ii) $\sin 405^\circ \cos 300^\circ - \cos 420^\circ \sin 585^\circ = \sin 45^\circ$

(iii) $\sin 250^\circ + \tan 290^\circ + \cot 200^\circ + \cos 340^\circ = 0$

9. দেখাও যে

$$\frac{\sin^3(\pi + \theta)}{\cos^2(\frac{1}{2}\pi + \theta)} \cdot \frac{\cos^3(-\theta)}{\sin^3(\pi - \theta)} \cdot \frac{\tan (2\pi - \theta)}{\operatorname{cosec}^2 \theta} \cdot \frac{\sec^2(\pi - \theta)}{\sin (2\pi + \theta)}$$ এর মান θ বর্জিত।

10. সরল কর :

$$\frac{\text{cosec}\,(\pi-A)}{\sec\,(\pi+A)}\cdot\frac{\cos\,(-A)}{\cos\,(\frac{\pi}{2}+A)}-\frac{\cos\,(\frac{5}{2}\pi+A)\sec\,(-A)\tan\,(\pi-A)}{\sec\,(2\pi+A)\sin\,(\pi+A)\cot\,(\frac{1}{2}\pi-A)}$$

[উঃ $\text{cosec}^2 A$, 2]

এবং $A=\frac{1}{4}\pi$ হইলে ইহার মান নির্ণয় কর।

11. কোন ত্রিভুজের কোণ তিনটি A, B, C হইলে প্রমাণ কর যে

(i) $\cos\,(A+B)+\cos C=0$; (ii) $\cot\,(A+2B+C)=\cot B$;

(iii) $\sin\,(A+B)-\cos C=\cos\,(A+B)+\sin C$;

(iv) $\tan\,(B+C)+\tan\,(C+A)+\tan\,(A+B)$

$=\tan\,(\pi-A)+\tan\,(2\pi-B)+\tan\,(3\pi-C)$

12. যদি $\tan 25^\circ=a$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

(i) $\dfrac{\tan 155^\circ-\tan 115^\circ}{1+\tan 155^\circ \tan 115^\circ}=\dfrac{1-a^2}{2a}$;

(ii) $\dfrac{\tan 205^\circ-\tan 115^\circ}{\tan 245^\circ+\tan 335^\circ}=\dfrac{1+a^2}{1-a^2}$.

13. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধানপূর্বক θ নির্ণয় কর, যখন $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$:

(a) $2\sin^2\theta+3\cos\theta=0$; (b) $3(\sec^2\theta+\tan^2\theta)=5$;

(c) $\cot^2\theta+\text{cosec}^2\theta=3$; (d) $2\cos^2\theta+4\sin^2\theta=3$.

[উঃ (a) $2\pi/3, 4\pi/3$; (b) $\pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$; (c) এবং (d) $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$.]

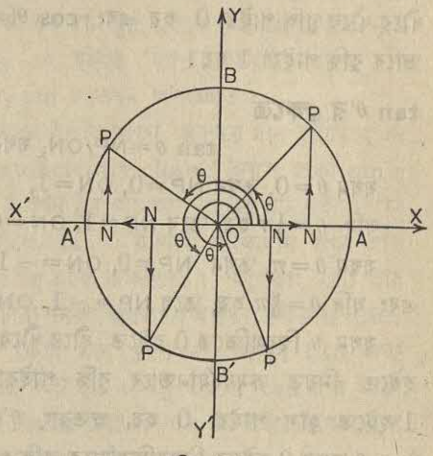
4·3. অপেক্ষকমূলক বিবরণ (Functional representation) : লেখ (Graph) :

এখন যে কোন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় সম্ভব। ইহার জন্য কেবল প্রয়োজন, পরিবর্তনশীল কোণ θ'র মান 0 হইতে যেমন পরিবর্তনের মধ্য দিয়া 2πএ আসিবে, θ'র কোন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানের অনুরূপ পরিবর্তনগুলি সেই সেইভাবে বিবেচনা করা। অন্য কোন কোণের জন্য অনুপাতের নূতন কোন মান পাওয়া যাইবে না। ইহা উল্লেখ করা নিষ্প্রয়োজন যে θ কে আদর্শ অবস্থানে লইলেও প্রশ্নটির সাধারণ প্রকৃতির কোনরূপ হানি হয় না। ইহাও লক্ষণীয় যে θ'র মান 0 অথবা 2π হইলে কোন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান অবশ্যই একই হইবে, যদি অবশ্য উহা বিদ্যমান হয়।

শীর্ষ O কে কেন্দ্র করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হইল ; উহা θ কোণের প্রারম্ভিক অর্ধ-রেখা OX কে A বিন্দুতে, Y-অক্ষকে ধনাত্মক দিকে B বিন্দুতে, X-অক্ষকে ঋণাত্মক দিকে A′ বিন্দুতে, Y-অক্ষকে ঋণাত্মক দিকে B′ বিন্দুতে এবং θ'র সীমারেখাকে P বিন্দুতে (চিত্র 4.4) ছেদ করিল। X-অক্ষের উপর PN লম্ব আঁকা হইল। NP এবং ON অংশদ্বয় হইল নিয়ন্ত্রিত বা দিক-নির্দেশিত (directed) রেখাংশ।

যেহেতু OP ব্যাসার্ধের পরিমাণ ইচ্ছামত লওয়া যায়, সুতরাং বিষয়টির সাধারণ প্রকৃতির কোন ক্ষতি না করিয়া (without loss of generality) ধরা যাইতে পারে OP $=1$; তাহা হইলে প্রতি ক্ষেত্রে

$\sin\theta = NP/OP = NP$, $\cos\theta = ON/OP = ON$, এবং $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে যখন NP বা ON ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে। এখন নিম্নলিখিত বিষয়টি লক্ষ্য করিতে হইবে :



চিত্র 4.4.

যখন $\theta = 0$, তখন P বিন্দু A বিন্দুর সহিত মিলিয়া যায়, $NP = 0$, $ON = 1$,

যদি $\theta = \frac{1}{2}\pi$ হয়, তবে P বিন্দু B বিন্দুর সহিত মিলিয়া যায়, $NP = 1$, $ON = 0$;

যখন $\theta = \pi$, তখন P বিন্দু A′ বিন্দুর সহিত মিলিয়া যায়, $NP = 0$, $ON = -1$;

যদি $\theta = \frac{3}{2}\pi$ হয়, তবে P বিন্দু B′ বিন্দুর সহিত মিলিয়া যায়, $NP = -1$, $ON = 0$.

এখন কোন বিন্দুর সন্নিহিত বা কাছাকাছি অঞ্চল (neighbourhood) এবং নিরবচ্ছিন্নতা (continuity) বলিতে কি বুঝায় সে সম্পর্কে কিছু ধারণা থাকা প্রয়োজন। লেখকদ্বয়ের 'ক্যালকুলাস' বা কলন গ্রন্থে এ বিষয়ে আলোচনা করা হইয়াছে—ছাত্রছাত্রীদিগকে বিষয়টি সংক্ষেপে পড়িয়া লইতে পরামর্শ দেওয়া যাইতেছে।

বৃত্তটির পরিধি বরাবর P বিন্দু যখন A হইতে B'র অভিমুখে নিরবচ্ছিন্নভাবে (continuously) অগ্রসর হইয়া B তে আসে, তখন θ'র মান নিরবচ্ছিন্নভাবে পরিবর্তিত হইতে হইতে 0 হইতে $\frac{1}{2}\pi$ হয়, NP দৈর্ঘ্য 0 হইতে নিয়ত ক্রমবর্ধমানহারে (monotonically) বৃদ্ধি পাইয়া 1 হয় এবং ON স্থিরগতিতে (steadily) 1 হইতে ধীরে ধীরে হ্রাস পাইয়া 0 হয়। ইহার অর্থ, $\sin\theta(=NP)$ 0 হইতে নিয়ত ক্রমবর্ধমানহারে বৃদ্ধি পাইয়া 1 হয় এবং $\cos\theta(=ON)$ নিরবচ্ছিন্নভাবে 1 হইতে হ্রাস পাইয়া 0 হয়।

পরিধি বরাবর নিরবচ্ছিন্নভাবে আরও অগ্রসর হইয়া P যখন B হইতে A′ বিন্দুতে আসে তখন θ নিরবচ্ছিন্নভাবে $\frac{1}{2}\pi$ হইতে বৃদ্ধি পাইয়া π এর সমান হয়, $\sin\theta$ $(=NP)$ স্থিরগতিতে 1 হইতে ধীরে ধীরে হ্রাস পাইয়া 0 হয় এবং $\cos\theta(=ON)$, নিয়ত ক্রমবর্ধমানহারে (monotonically) 0 হইতে হ্রাস পাইয়া -1 হয়। পরে P যখন A′ হইতে B′ বিন্দুতে একইভাবে আসে, তখন θ'র মান π হইতে নিরবচ্ছিন্নভাবে বৃদ্ধি পাইয়া $\frac{3}{2}\pi$ হয়, $\sin\theta$'র মান 0 হইতে নিরবচ্ছিন্নভাবে হ্রাস পাইয়া -1 হয় এবং $\cos\theta$'র মান -1 হইতে নিরবচ্ছিন্নভাবে বৃদ্ধি পাইয়া 0 হয়। পরিশেষে P

যখন একইভাবে B′ হইতে A বিন্দুতে আসে, তখন θ'র মান $\frac{3}{2}\pi$ হইতে নিয়ত ক্রমবর্ধমানভাবে বৃদ্ধি পাইয়া 2π হয়, $\sin\theta(=\text{NP})$র মান -1 হইতে স্থিরগতিতে ধীরে ধীরে বৃদ্ধি পাইয়া 0 হয় এবং $\cos\theta(=\text{ON})$র মান 0 হইতে নিয়ত ক্রমবর্ধমানভাবে বৃদ্ধি পাইয়া 1 হয়।

tan θ'র ক্ষেত্রে

$\tan\theta=\text{NP}/\text{ON}$, যখন $\text{ON}=0$ নহে

যখন $\theta=0$, তখন $\text{NP}=0$, $\text{ON}=1$, সুতরাং $\tan\theta=0$

যদি $\theta=\frac{1}{2}\pi$ হয়, তবে $\text{NP}=1$, $\text{ON}=0$, সুতরাং $\tan\theta$ বিদ্যমান নহে

যখন $\theta=\pi$, তখন $\text{NP}=0$, $\text{ON}=-1$, সুতরাং $\tan\theta=0$

এবং যদি $\theta=\frac{3}{2}\pi$ হয়, তবে $\text{NP}=-1$, $\text{ON}=0$, সুতরাং $\tan\theta$ বিদ্যমান নহে।

যখন θ স্থিরগতিতে 0 হইতে ধীরে ধীরে বৃদ্ধি পাইয়া $\frac{1}{2}\pi$ হয়, তখন NP দৈর্ঘ্য 0 হইতে নিয়ত ক্রমবর্ধমানভাবে বৃদ্ধি পাইয়া 1 হয় এবং ON নিয়ত ক্রমবর্ধমানভাবে 1 হইতে হ্রাস পাইয়া 0 হয়, সুতরাং θ'র মান যখন $\frac{1}{2}\pi$ এর অতি নিকটে আসে, $\tan\theta$ তখন 0 হইতে নিরবচ্ছিন্নভাবে বৃদ্ধি পাইতে পাইতে একটি অতি বৃহৎ ধনাত্মক মান প্রাপ্ত হয়। অবস্থাটিকে বর্ণনাচ্ছলে এইভাবে লেখা হইয়া থাকে যে θ যখন 0 হইতে নিরবচ্ছিন্নভাবে বৃদ্ধি পাইয়া $\frac{1}{2}\pi$ হয়, $\tan\theta$ তখন 0 হইতে নিয়ত ক্রমবর্ধমানভাবে বৃদ্ধি পাইয়া ∞ হয়, কেবল $\theta=\frac{\pi}{2}$ হইলেই $\tan\theta$ তখন অসংজ্ঞাত হইয়া যায়।

[**টীকা।** কোন পরিবর্তনশীল রাশি (variable) $x\to\infty$, এই প্রতীকটির অর্থ হইল, x এর ক্রমিক (successive) মানগুলি **পরিশেষে** (ultimately) যে কোন মনোনীত রাশি (chosen quantity) অপেক্ষা বৃহত্তর **হইয়া** যাইবে এবং বৃহত্তর **থাকিয়া** যাইবে, তা ঐ মনোনীত রাশি যত বৃহৎই হউক না কেন। অনুরূপ ভাবে যদি x **পরিশেষে** যে কোন প্রদত্ত সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর **হইয়া যায়** এবং ক্ষুদ্রতর **থাকিয়া যায়,** তবে বলা হয় যে $x\to-\infty$; উপরে প্রতীক ∞ কে এই অর্থে ব্যবহার করা হইয়াছে।]

যে ক্ষেত্রে θ স্থিরগতিতে ধীরে ধীরে $\frac{1}{2}\pi$ হইতে বৃদ্ধি পাইয়া π হয়, অনুধাবনের সুবিধার জন্য উহাকে বিপরীত দিক হইতে বিবেচনা করা যাক্, অর্থাৎ এইভাবে শুরু করা যাক্ যে θ'র মান π হইতে হ্রাস পাইয়া $\frac{1}{2}\pi$ এর দিকে আসিতেছে। যখন $\theta=\pi$, তখন $\tan\theta=0$ এবং দ্বিতীয় পাদতে $\tan\theta$ ঋণাত্মক। সুতরাং যখন θ নিরবচ্ছিন্নভাবে π হইতে হ্রাস পাইয়া $\frac{1}{2}\pi$ হয়, তখন NP স্থিরগতিতে ধীরে ধীরে 0 হইতে বৃদ্ধি পাইয়া 1 হয় এবং $\cos\theta$ নিয়ত ক্রমবর্ধমানভাবে -1 হইতে বৃদ্ধি পাইয়া 0 হয়, যাহার ফলে $\tan\theta$ স্থিরগতিতে 0 হইতে হ্রাস পাইতে পাইতে $-\infty$ হয়। প্রকারান্তরে বলা যায়, θ যখন $\frac{1}{2}\pi$ হইতে নিয়ত ক্রমবর্ধমানভাবে বৃদ্ধি পাইয়া π হয়, $\tan\theta$ তখন স্থিরগতিতে $-\infty$ হইতে বৃদ্ধি পাইয়া 0 হয়, কেবল যখন $\theta=\frac{1}{2}\pi$, $\tan\theta$ তখন অসংজ্ঞাত।

একই প্রকারে দেখা যায় যে θ যখন π হইতে নিরবচ্ছিন্নভাবে বৃদ্ধি পাইয়া $\frac{3}{2}\pi$ হয়, tan θ তখন স্থিরগতিতে 0 হইতে বৃদ্ধি পাইতে পাইতে ∞ হয় এবং উহা অসংজ্ঞাত হইয়া যায়, যখন $\theta=\frac{3}{2}\pi$ হয়। আবার যখন θর মান $\frac{3}{2}\pi$ হইতে নিরবচ্ছিন্নভাবে বৃদ্ধি পাইতে পাইতে 2π হয়, tan θ তখন $-\infty$ হইতে নিয়ত ক্রমবর্ধমানভাবে বৃদ্ধি পাইতে পাইতে 0 হয়, কেবল যখন $\theta=\frac{3}{2}\pi$, tan θ তখন অসংজ্ঞাত।

[টীকা। লক্ষ্য করিতে হইবে যে θ যখন $\frac{1}{2}\pi$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর মান হইতে বৃদ্ধি পাইতে পাইতে $\frac{1}{2}\pi$ এর যথেষ্ট নিকটে (sufficiently close) আসে, তখন tan θ ধনাত্মক অতিবৃহৎ মান প্রাপ্ত হয়, কিন্তু θ যখন $\frac{1}{2}\pi$ অপেক্ষা বৃহত্তর মান হইতে হ্রাস পাইতে পাইতে $\frac{1}{2}\pi$ এর যথেষ্ট নিকটে আসে, tan θ'র পরম সাংখ্যমান তখন অতি বৃহৎ, কিন্তু উহা ঋণাত্মক। আবার tan $\frac{1}{2}\pi$ হইল অসংজ্ঞাত। সুতরাং বলা যায় যে θ যখন প্রথম পাদ হইতে $\frac{1}{2}\pi$ এর মধ্য দিয়া নিরবচ্ছিন্নভাবে যাইয়া, দ্বিতীয় পাদতে প্রবেশ করে, তখন tan θ'র মান $\theta=\frac{1}{2}\pi$তে কোন মান গ্রহণ না করিয়া হঠাৎ লম্ফ দিয়া $+\infty$ হইতে $-\infty$ হয়। এই অবস্থায় বলা হয় $\theta=\frac{\pi}{2}$ হইলে tan θ'র মানে বিচ্ছিন্নতা (discontinuity) বা বিরতি (break) ঘটে। $\theta=\frac{3}{2}\pi$ হইলেও অনুরূপ বিচ্ছিন্নতা ঘটে। স্পষ্টতর ধারণার জন্য কলন গ্রন্থ দ্রষ্টব্য।]

cot θ, cosec θ এবং sec θ'র ক্ষেত্র অনুশীলনী হিসাবে ছাত্রছাত্রীদের জন্য রাখিয়া দেওয়া হইল। তবে বিবেচনালব্ধ সমগ্র তথ্যকে তালিকার আকারে নিম্নে দেওয়া হইল।

তালিকা 5

θ বৃদ্ধি পায় যখন	0 হইতে $\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$ হইতে π	π হইতে $\frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$ হইতে 2π	বিচ্ছিন্নতা ?
sin θ	0 হইতে 1 এ বৃদ্ধি	1 হইতে 0তে হ্রাস	0 হইতে -1এ হ্রাস	-1 হইতে 0তে বৃদ্ধি	না
cos θ	1 হইতে 0তে হ্রাস	0 হইতে -1এ হ্রাস	-1 হইতে 0তে বৃদ্ধি	0 হইতে 1এ বৃদ্ধি	না
tan θ	0 হইতে সীমাহীন বৃদ্ধি (0 হইতে $+\infty$)	বৃহৎ ঋণাত্মক মান হইতে 0তে বৃদ্ধি ($-\infty$ হইতে 0)	0 হইতে সীমাহীন বৃদ্ধি (0 হইতে $+\infty$)	বৃহৎ ঋণাত্মক মান হইতে 0তে বৃদ্ধি ($-\infty$ হইতে 0)	$\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$তে
cot θ	বৃহৎ ধনাত্মক মান হইতে 0তে হ্রাস ($+\infty$ হইতে 0)	0 হইতে সীমাহীন হ্রাস (0 হইতে $-\infty$)	বৃহৎ ধনাত্মক মান হইতে 0তে হ্রাস ($+\infty$ হইতে 0)	0 হইতে সীমাহীন হ্রাস (0 হইতে $-\infty$)	0, πতে
cosec θ	বৃহৎ ধনাত্মক মান হইতে 1এ হ্রাস ($+\infty$ হইতে 1)	1 হইতে সীমাহীন বৃদ্ধি (1 হইতে $+\infty$)	বৃহৎ ঋণাত্মক মান হইতে -1এ বৃদ্ধি ($-\infty$ হইতে -1)	-1 হইতে সীমাহীন হ্রাস (-1 হইতে $-\infty$)	0, πতে
sec θ	1 হইতে সীমাহীন বৃদ্ধি (1 হইতে $+\infty$)	বৃহৎ ঋণাত্মক মান হইতে -1এ বৃদ্ধি ($-\infty$ হইতে -1	-1 হইতে সীমাহীন হ্রাস (-1হইতে $-\infty$)	বৃহৎ ধনাত্মক মান হইতে 1এ হ্রাস ($+\infty$ হইতে 1)	$\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$তে

অপেক্ষকের চিত্ররূপ (অনুচ্ছেদ 2·5 দ্রষ্টব্য) এবং লেখ (Functional representation and Graph)

এখন ইহা সুস্পষ্ট হইয়াছে যে

x, কোণের রেডিয়ান মান হইলে $y = \sin x$ হইল x এবং y এর মধ্যে একটি অপেক্ষকমূলক সম্পর্ক, কারণ যখনই x এর কোন বাস্তব মান ধার্য করা হয়, $\sin x$ এর একটি **অনন্য** (unique) মান নিরূপণ করা যায়। এখানে অপেক্ষকটির কার্যকারিতার এলাকা (domain of definition) হইল সমুদয় বাস্তব মানের সেট্। অনুরূপে $y = \cos x$ হইল x এর প্রত্যেক বাস্তব মানের ক্ষেত্রে কার্যকরী x এর একটি অপেক্ষক। $y = \tan x$ এবং $y = \sec x$, ইহারাও x এর অপেক্ষক, যাহারা কেবল $x = (2n+1).\frac{1}{2}\pi$ (যেখানে n অখণ্ড সংখ্যা) এই সম্পর্ক প্রদত্ত x এর মানসমূহ ব্যতীত x এর আর প্রত্যেক বাস্তব মানের ক্ষেত্রে কার্যকরী। আবার, $x = n\pi$ (n অখণ্ড সংখ্যা) হইতে x এর যে মানসমূহ পাওয়া যায় সেইগুলি ভিন্ন x এর আর সকল বাস্তব মানের ক্ষেত্রে কার্যকরী x এর অপেক্ষক হইল $y = \cot x$ এবং $y = \text{cosec } x$.

তালিকা 6

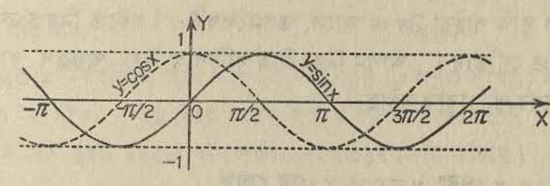
x	sin x	cos x	tan x	cot x	cosec x	sec x
0	0	1·00	0	—	—	1·00
π/6	0·50	0·87	0·58	1·73	2·00	1·15
π/4	0·71	0·71	1·00	1·00	1·41	1·41
π/3	0·87	0·50	1·73	0·58	1·15	2·00
π/2	1·00	0	—	0	1·00	—
2π/3	0·87	−0·50	−1·73	−0·58	1·15	−2·00
3π/4	0·71	−0·71	−1·00	−1·00	1·41	−1·41
5π/6	0·50	−0·87	−0·58	−1·73	2·00	−1·15
π	0	−1·00	0	—	—	−1·00
7π/6	−0·50	−0·87	0·58	1·73	−2·00	−1·15
5π/4	−0·71	−0·71	1·00	1·00	−1·41	−1·41
4π/3	−0·87	−0·50	1·73	0·58	−1·15	−2·00
3π/2	−1·00	0	—	0	−1·00	—
5π/3	−0·87	0·50	−1·73	−0·58	−1·15	2·00
7π/4	−0·71	0·71	−1·00	−1·00	−1·41	1·41
11π/6	−0·50	0·87	−0·58	−1·73	−2·00	1·15
2π	0	1·00	0	—	—	1·00

অপেক্ষকগুলির রূপচিত্র বা লেখ অঙ্কনের জন্য উহাদের যে মানগুলি সাধারণভাবে জানা আবশ্যক তাহাদের একটি তালিকা পূর্বপৃষ্ঠায় প্রদত্ত হইল। কোন কোন ক্ষেত্রে আসন্ন মান দেওয়া আছে, কিন্তু লেখগুলি কমবেশী নিখুঁতই হইবে। অবশ্য শুদ্ধভাবে লেখটি অঙ্কন করিবার জন্য ছাত্রছাত্রীদের যথেষ্ট সংখ্যক বিন্দু সংস্থাপিত করিতে হইবে।

একক বা স্কেল (Scale) : x-অক্ষ বরাবর 12টি ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুসমষ্টিকে π এবং y-অক্ষ বরাবর 4টি ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুসমষ্টিকে এক (unity) ধরা হইল। ছাত্রছাত্রীরা ইচ্ছা করিলে অন্য একক লইতে পারে।

(A) $y = \sin x$ এর লেখ

লেখটি 4.5 চিত্রে প্রদর্শিত হইল



চিত্র 4.5.

মন্তব্য :

1. যেহেতু $\sin(2\pi + x) = \sin x$, সেইজন্য অপেক্ষকটি নিয়মিত 2π ব্যবধানে (period) বারংবার পুনরাবৃত্ত (periodic) হয়। [কার্যকারিতার এলাকা অন্তর্ভুক্ত x এর প্রত্যেক মানের জন্য যদি $f(x+k) = f(x)$ হয়, তবে বলা হয় যে $f(x)$, নিয়মিত k ব্যবধানে, বারংবার পুনরাবৃত্ত হয়।]

2. অপেক্ষকটি দুই প্রান্তীয় (extreme) মান 1 এবং -1 এর মধ্যে **দুলিতে থাকে (oscillates)**। মধ্যমান (median value) হইতে দোলনের পরিমাণকে **বিস্তার (amplitude)** বলা হয় এবং এখানে ঐ বিস্তার হইল 1 (one)।

3. অপেক্ষকটির মান শূন্য হয় (vanishes), যখন $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \cdots$, ইত্যাদি।

4. x এর প্রত্যেক বাস্তব মানের ক্ষেত্রে অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত (defined) এবং x এর মান $-\frac{1}{2}\pi$ হইতে বৃদ্ধি পাইতে পাইতে যখন $\frac{1}{2}\pi$ হয়, উহার মান তখন -1 হইতে নিয়ত ক্রমবর্ধমান ভাবে বৃদ্ধি পাইতে পাইতে (increasing monotonically) 1 হয়, আবার x যখন $\frac{1}{2}\pi$ হইতে বৃদ্ধি পাইয়া $\frac{3}{2}\pi$ এ আসে, তখন উহা 1 হইতে নিয়ত ক্রমবর্ধমানভাবে হ্রাস পাইতে পাইতে (decreasing monotonically) -1 মান গ্রহণ করে। ইহার অবিচ্ছিন্ন গতিপথে অনুরূপ ব্যবধানে ইহা একইরূপ আচরণের (same behaviour) পুনরাবৃত্তি ঘটায়।

এখানে দৃষ্টান্ত হিসাবে 0 এবং 2π এর অন্তর্বর্তী অংশটিও লওয়া যাইত। এ সম্পর্কে পূর্বে আলোচনা করা হইয়াছে। এক্ষেত্রে পুনরাবৃত্তির ব্যবধান হইত 2π

হইতে 4π, -2π হইতে 0, ···, ইত্যাদি। অন্য কোন উপযুক্ত ব্যবধান লইলেও উদ্দেশ্য সিদ্ধ হইত।

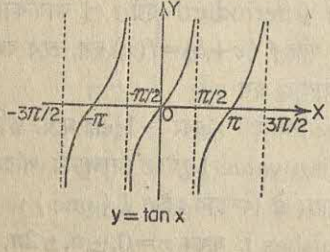
(B) $y=\cos x$ এর লেখ

লেখটি 4.5 চিত্রে অঙ্কিত হইল।

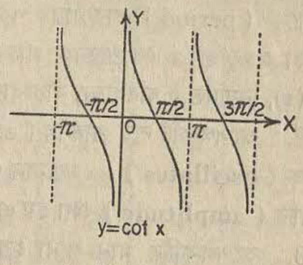
অপেক্ষকটি নিয়মিত 2π ব্যবধানে বারংবার পুনরাবৃত্ত হয়। ইহা 1 এবং -1 এর মধ্যে দোদুল্যমান এবং বিস্তারের পরিমাণ 1 (one)। $x=\pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \ldots$, প্রভৃতি হইলে অপেক্ষকটির মান শূন্য হয়। x এর মান 0 হইতে বৃদ্ধি পাইয়া πএ আসিলে লেখটি 1 হইতে নিয়ত ক্রমবর্ধমানভাবে হ্রাস পাইয়া -1 এ আসে এবং x যখন π হইতে বৃদ্ধি পাইয়া 2π এ আসে, তখন লেখটি -1 হইতে নিয়ত ক্রমবর্ধমানভাবে বৃদ্ধি পাইয়া 1এ পৌঁছায়। আপন নিরবচ্ছিন্ন গতিপথে উহা অনুরূপ ব্যবধানে একই প্রকার আচরণের পুনরাবৃত্তি ঘটায়।

(C) $y=\tan x$ এবং $y=\cot x$ এর লেখ

তালিকা 5 এবং 6 বিবেচ্য। লেখ দুইটি যথাক্রমে 4.6 চিত্রে এবং 4.7 চিত্রে অঙ্কিত হইয়াছে।



চিত্র 4.6.



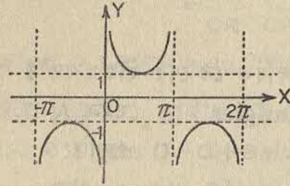
চিত্র 4.7.

$y=\tan x$ এবং $y=\cot x$ নিয়মিত π ব্যবধানে বারংবার পুনঃবৃত্ত হয়। $x=(2n+1).\frac{1}{2}\pi$ (যেখানে n অখণ্ড সংখ্যা) প্রদত্ত x এর মানসমূহ ব্যতীত x এর আর সকল মানের ক্ষেত্রে $y=\tan x$ সংজ্ঞাত ; আবার $x=n\pi$ (যেখানে n অখণ্ড সংখ্যা) প্রদত্ত x এর মানগুলি ভিন্ন xএর আর অন্যান্য সকল বাস্তব মানের জন্য $y=\cot x$ সংজ্ঞাত। x এর মান $-\frac{1}{2}\pi$ হইতে বৃদ্ধি পাইয়া $\frac{1}{2}\pi$ হইলে অথবা $\frac{1}{2}\pi$ হইতে $\frac{3}{2}\pi$ হইলে $y=\tan x$ নিয়ত ক্রমবর্ধমানভাবে $-\infty$ হইতে বৃদ্ধি পাইতে পাইতে $+\infty$ হয়। আর x যখন 0 হইতে বৃদ্ধি পাইয়া π অথবা π হইতে বৃদ্ধি পাইয়া 2π হয়, $y=\cot x$ তখন ∞ হইতে নিয়ত ক্রমবর্ধমানভাবে হ্রাস পাইতে পাইতে $-\infty$ এ আসে। এইরূপ নির্দিষ্ট ব্যবধানে হইতে থাকিবে।

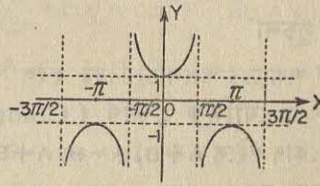
(D) $y = \text{cosec } x$ এবং $y = \sec x$ এর লেখ

চিত্র 4.8 এবং চিত্র 4.9 দ্রষ্টব্য।

$y = \text{cosec } x$ এবং $y = \sec x$ নিয়মিত 2π ব্যবধানে বারংবার পুনরাবৃত্ত হয়। $x = n\pi$ (n অখণ্ড সংখ্যা) হইতে প্রাপ্ত x এর মান ব্যতীত x এর আর সকল মানের



চিত্র 4.8,



চিত্র 4.9.

ক্ষেত্রে $y = \text{cosec } x$ নিরবচ্ছিন্ন, আর $x = (2n+1).\frac{1}{2}\pi$ (n অখণ্ড সংখ্যা) হইতে প্রাপ্ত x এর মানগুলি ব্যতীত x এর আর সকল মানের ক্ষেত্রে $y = \sec x$ নিরবচ্ছিন্ন। ছাত্রছাত্রীরা এখন লেখ দুইটি হইতে অপেক্ষকদ্বয়ের আচরণ নির্ণয় করিবে।

5

যৌগিক কোণ

(Compound Angles)

5·1. সূচনা

এই অধ্যায়ের আলোচ্য বিষয় হইল দুই বা ততধিক কোণের বীজগণিতীয় সমষ্টির ফলে উৎপন্ন **যৌগিক কোণ (Compound angles)**। যেমন, A, B, C, D চারিটি কোণ হইলে A+B, A−B, A+B−C, A−B+C−D প্রভৃতিকে যৌগিক কোণ বলা হয়।

প্রথমত যোগ ও বিয়োগ চিহ্নযুক্ত যৌগিক কোণের সাইন (sine) এবং কোসাইন (cosine) অনুপাত সম্পর্কে উপপাদ্যগুলি প্রমাণ করা হইবে।

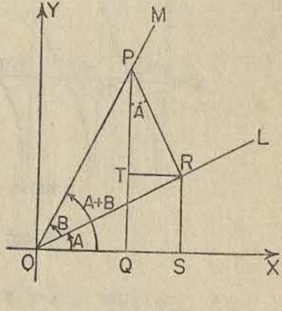
উপপাদ্য 1 : প্রমাণ কর যে

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

এবং $$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B,$$

যেখানে A এবং B ধনাত্মক সূক্ষ্ম কোণ এবং $(A+B)<90°$.

প্রমাণ : ধরা যাক্, একটি ঘূর্ণায়মান অর্ধরেখা প্রারম্ভিক অবস্থায় OX এর সহিত সম্পূর্ণ মিলিত অবস্থায় আছে (চিত্র 5.1)। এখন উহা ঘূর্ণনকেন্দ্র O কে কেন্দ্র করিয়া ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত অভিমুখে A কোণ ঘুরিয়া OL অবস্থানে আসিল, অর্থাৎ $\angle XOL$ = ধনাত্মক সূক্ষ্ম কোণ A ; পরে অর্ধরেখাটি একই দিকে অর্থাৎ ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত অভিমুখে আরও ঘুরিয়া $\angle LOM$ = ধনাত্মক সূক্ষ্ম কোণ B উৎপন্ন করিল। তাহা হইলে ধনাত্মক $\angle XOM=A+B$; ধরা হইল, ইহাও সূক্ষ্ম কোণ। যৌগিক কোণ A+B এর সীমারেখা OM এর উপর O হইতে স্বতন্ত্র অপর যে কোন এক বিন্দু P লওয়া হইল। P হইতে OX এর উপর PQ এবং OL এর উপর PR লম্ব টানা হইল। আবার R হইতে OX এর উপর RS এবং PQ এর উপর RT লম্ব অঙ্কন করা হইল। এখন POQ সমকোণী ত্রিভুজ হইতে,



চিত্র 5.1.

$$\sin(A+B)=\frac{QP}{OP}=\frac{QT+TP}{OP}=\frac{SR+TP}{OP}=\frac{SR}{OP}+\frac{TP}{OP}$$

$$=\frac{SR}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}+\frac{TP}{RP}\cdot\frac{RP}{OP}=\sin A\cos B+\cos A\sin B,$$

কারণ $\angle TPR = 90^\circ - \angle TRP = \angle ORT = \angle SOR = A$ এবং $TP/PR = \cos TPR = \cos A$, এবং

$$\cos(A+B) = \frac{OQ}{OP} = \frac{OS-QS}{OP} = \frac{OS-TR}{OP} = \frac{OS}{OP} - \frac{TR}{OP}$$

$$= \frac{OS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP} - \frac{TR}{RP}\cdot\frac{RP}{OP} = \cos A \cos B - \sin A \sin B,$$

কারণ $TR/RP = \sin TPR = \sin A$

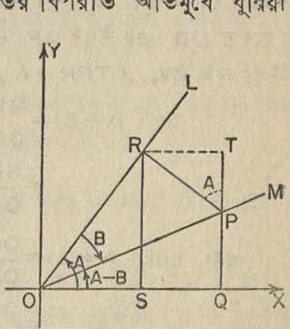
উপপাদ্য 2 : প্রমাণ কর যে

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

এবং $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$,

যখন A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $A>B$.

প্রমাণ : ধরা যাক্, প্রারম্ভিক অবস্থায় OX এর উপর সমাপতিত একটি ঘূর্ণায়মান অর্ধরেখা ঘূর্ণনকেন্দ্র O কে কেন্দ্র করিয়া ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত অভিমুখে ঘুরিয়া ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ $XOL = A$ (চিত্র 5.2) উৎপন্ন করিল; পরে উহা বিপরীত অভিমুখে (অর্থাৎ ঘড়ির কাঁটার গতির অভিমুখে) ঘুরিয়া LOM কোণ উৎপন্ন করিল, যেখানে LOM কোণের পরিমাণ হইল B এবং Bকোণের পরিমাণ A কোণের পরিমাণ অপেক্ষা কম। তাহা হইলে $\angle XOM = A - B$



চিত্র 5.2.

যৌগিক কোণ $A-B$ এর সীমারেখা OM এর উপর O হইতে স্বতন্ত্র যে কোন একটি বিন্দু P লওয়া হইল এবং OX এর উপর PQ ও OL এর উপর PR লম্ব অঙ্কন করা হইল। আবার R হইতে OX এবং QP এর উপর যথাক্রমে RS ও RT লম্ব অঙ্কন করা হইল।

এখন সমকোণী ত্রিভুজ POQ হইতে,

$$\sin(A-B) = \frac{QP}{OP} = \frac{QT-PT}{OP} = \frac{SR-PT}{OP} = \frac{SR}{OP} - \frac{PT}{OP}$$

$$= \frac{SR}{OR}\cdot\frac{OR}{OP} - \frac{PT}{PR}\cdot\frac{PR}{OP} = \sin A \cos B - \cos A \sin B,$$

কারণ $\angle TPR = 90^\circ - \angle PRT = \angle TRL = A$ এবং $PT/PR = \cos A$; এবং

$$\cos(A-B) = \frac{OQ}{OP} = \frac{OS+SQ}{OP} = \frac{OS+RT}{OP} = \frac{OS}{OP} + \frac{RT}{OP}$$

$$= \frac{OS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP} + \frac{RT}{PR}\cdot\frac{PR}{OP} = \cos A \cos B + \sin A \sin B,$$

কারণ $RT/PR = \sin A$.

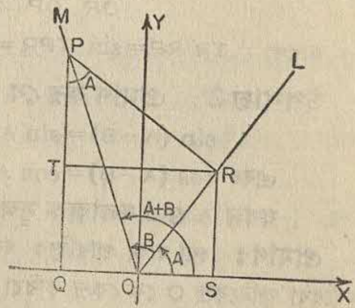
5·2. অন্যান্য ক্ষেত্র : সাধারণ ক্ষেত্র

(1) প্রমাণ কর যে $\sin (A+B)=\sin A \cos B+\cos A \sin B$

এবং $\cos (A+B)=\cos A \cos B-\sin A \sin B$,

যখন A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $A+B>90^\circ$.

প্রমাণ : A কোণকে প্রচলিত আদর্শ অবস্থানে স্থাপন করা হইল। এখন B কোণের শীর্ষকে O তে (চিত্র 5.3) এবং প্রারম্ভিক রেখাকে A কোণের সীমারেখা বরাবর স্থাপন করিয়া (A+B) এর সীমারেখা OM এর উপর O হইতে স্বতন্ত্র যে কোন একটি বিন্দু P লওয়া হইল। OX এর উপর PQ এবং OL এর উপর PR লম্ব অঙ্কন করা হইল। পরে R হইতে OX এবং PQ এর উপর যথাক্রমে RS এবং RT লম্ব অঙ্কন করা হইল। যেহেতু OQ এর উপর QP এবং OR এর উপর RP লম্ব, $\angle TPR=A$; সুতরাং



চিত্র 5.3.

$$\sin (A+B)=\frac{QP}{OP}=\frac{QT+TP}{OP}=\frac{SR+TP}{OP}=\frac{SR}{OP}+\frac{TP}{OP}$$

$$=\frac{SR}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}+\frac{TP}{RP}\cdot\frac{RP}{OP}=\sin A \cos B+\cos A \sin B$$

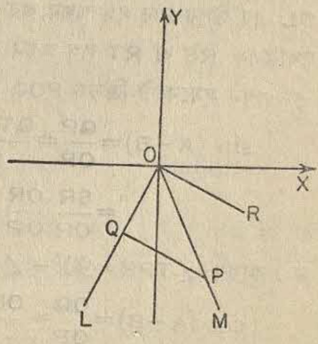
এবং $$\cos (A+B)=\frac{OQ}{OP}=\frac{OS-QS}{OP}=\frac{OS-TR}{OP}=\frac{OS}{OP}-\frac{TR}{OP}$$

$$=\frac{OS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}-\frac{TR}{RP}\cdot\frac{RP}{OP}=\cos A \cos B-\sin A \sin B.$$

(2) sin (A+B) এবং cos (A+B) এর সূত্র দুইটির সাধারণ প্রমাণ

[প্রমাণটি অভিক্ষেপ (projection) নির্ভর; দ্বিমাত্রিক বিশ্লেষণ জ্যামিতি অধ্যয়নের পরই ইহা ছাত্রছাত্রীদের বোধগম্য হইবে—এ বিষয়ে গ্রন্থকারদ্বয়ের সংশ্লিষ্ট পুস্তক দ্রষ্টব্য।]

A কোণকে আদর্শ অবস্থানে স্থাপন করা হইল; পরে B কে এমনভাবে স্থাপন করা হইল যেন উহার শীর্ষবিন্দু O তে (চিত্র 5.4) এবং প্রারম্ভিক রেখা A'র সীমারেখা OL বরাবর অবস্থান করে। এখন (A+B) এর সীমারেখা OM এর উপর O হইতে স্বতন্ত্র অপর যে কোন এক বিন্দু P লওয়া হইল। OL এর উপর PQ লম্ব অঙ্কন করা হইল এবং QP এর সমান ও সমান্তরাল OR অঙ্কন করা হইল।



চিত্র 5.4.

OX এর উপর **লম্ব-অভিক্ষেপ লইয়া** পাওয়া যায়

OP'র লম্ব-অভিক্ষেপ = OQ এর লম্ব-অভিক্ষেপ + QP এর লম্ব-অভিক্ষেপ

= OQ এর লম্ব-অভিক্ষেপ + OR এর লম্ব-অভিক্ষেপ

বা, $OP \cos XOP = OQ \cos XOQ + OR \cos XOR \qquad \cdots(1)$

$= OP \cos B \cos XOQ + OP \sin B \cos XOR$

$= OP \cos B \cos A + OP \sin B \cos (90^\circ + A)$

সুতরাং $\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$.

OY **এর উপর লম্ব-অভিক্ষেপ লইয়া** এবং (1) এ X এর পরিবর্তে Y লিখিয়া পাওয়া যায়

$OP \cos YOP = OQ \cos YOQ + OR \cos YOR$

$= OP \cos B \cos YOQ + OP \sin B \cos YOR$

বা, $\cos (A+B-90^\circ) = \cos B \cos (A-90^\circ) + \sin B \cos A$

বা, $\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.

টীকা : অনুরূপভাবে, A এবং B যে কোন দুইটি কোণ হইলে, $\sin (A-B)$ এবং $\cos (A-B)$ এর সূত্র দুইটি প্রমাণ করা যায়।

মন্তব্য : পূর্ববর্তী আলোচনাসমূহে, যে ক্ষেত্রে A অথবা B অথবা $A \pm B$ পাদ কোণ (quadrantal angle) হয়, তাহা বিবেচনা করা হয় নাই।

(3) অনুচ্ছেদ 5·1 এর অন্তর্গত উপপাদ্য 1 এর সত্য অবলম্বন করিয়া প্রমাণ কর যে

(*a*) $\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ এবং (*b*) $\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$, যখন A এবং B যে কোণ দুইটি কোণ নির্দেশ করে।

প্রথমে যাচাই করিয়া লওয়া যাক যে A = 0 এবং B = 0 হইলে ঐ উপপাদ্যটি সত্য বলিয়া ধরা যায়।

যেহেতু $\sin (0+0) = \sin 0 = 0$ এবং $\sin 0 \cos 0 + \cos 0 \sin 0$
$= 0.1 + 1.0 = 0$.

এবং $\cos (0+0) = \cos 0 = 1$ এবং $\cos 0 \cos 0 - \sin 0 \sin 0$
$= 1.1 - 0.0 = 1$,

সুতরাং দেখা গেল যে A = 0 = B হইলে সূত্র দুইটি বজায় থাকে।

এখন A, B, A + B এর প্রত্যেকটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হইলে

$\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \qquad \cdots (1)$

কিন্তু $\cos (A+B) = \sin (\frac{1}{2}\pi + A + B) = \sin \{(\frac{1}{2}\pi + A) + B\}$;

আবার $\cos A = \sin (\frac{1}{2}\pi + A)$ এবং $-\sin A = \cos (\frac{1}{2}\pi + A)$

সুতরাং (1) এ এই মানগুলি বসাইলে পাওয়া যায়

$\sin\{(A + \frac{1}{2}\pi) + B\} = \sin (A + \frac{1}{2}\pi) \cos B + \cos (A + \frac{1}{2}\pi) \sin B$.

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে

$$\cos\{(A+\tfrac{1}{2}\pi)+B = \cos(A+\tfrac{1}{2}\pi)\cos B - \sin(A+\tfrac{1}{2}\pi)\sin B.$$

দেখা গেল, A কে $\frac{\pi}{2}$ বৃদ্ধি করিলে (a) এবং (b) সূত্র বজায় থাকে। একই প্রকারে দেখান যায় যে Bকেও $\frac{\pi}{2}$ বৃদ্ধি করিলে সম্পর্ক দুইটি বজায় থাকে।

প্রক্রিয়াটির পুনঃপুনঃ প্রয়োগ দ্বারা প্রমাণ করা যায় যে হয় A অথবা B অথবা উভয়ের $\frac{\pi}{2}$ এর যে কোন গুণিতক পরিমাণ বৃদ্ধি ঘটিলেও (a) এবং (b) সূত্র দুইটির সত্যতা বজায় থাকে।

আবার $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$ ... (2),

যখন A এবং B ধনাত্মক সূক্ষ্ম কোণ এবং $A+B<\frac{1}{2}\pi$

কিন্তু $\cos(A+B) = -\sin(A+B-\frac{1}{2}\pi) = -\sin\{(A-\frac{1}{2}\pi)+B\}$;

আবার $\cos A = -\sin(A-\frac{1}{2}\pi)$ এবং $\sin A = \cos(A-\frac{1}{2}\pi)$

সুতরাং (1) এ এই মানগুলি বসাইলে

$$\sin\{(A-\tfrac{1}{2}\pi)+B\} = \sin(A-\tfrac{1}{2}\pi)\cos B + \cos(A-\tfrac{1}{2}\pi)\sin B.$$

এইভাবে পূর্বের ন্যায় যুক্তি অনুসরণ করিয়া প্রমাণ করা যায় যে হয় A অথবা B অথবা উভয়েরই $\frac{1}{2}\pi$ এর যে কোন গুণিতক পরিমাণ হ্রাস ঘটিলেও (a) এবং (b) সূত্র বজায় থাকে।

আবার ইহাও প্রমাণ করা যায় যে A অথবা B এর যে কোন একটির $\frac{1}{2}\pi$ এর কোন গুণিতক পরিমাণ বৃদ্ধি এবং অপরটির $\frac{1}{2}\pi$ এর কোন গুণিতক পরিমাণ হ্রাস ঘটিলেও সূত্র দুইটির সত্যতা অবিচলিত থাকে।

এখন θ কে 0 অথবা কোন ধনাত্মক সূক্ষ্ম কোণ ধরিয়া যে কোন কোণকে $\frac{1}{2}\pi$ এর যে কোন অখণ্ড গুণিতক এবং θ'র সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়। সুতরাং আলোচ্য প্রতিপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

মন্তব্য : A এবং B যে কোন দুইটি কোণ নির্দেশ করিলে $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$ এবং $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$ এই সূত্র দুইটি প্রমাণের জন্য উপরের আলোচনায় যে সামান্য পরিবর্তন প্রয়োজন তাহা খুবই সুস্পষ্ট।

5·3. কতিপয় প্রয়োজনীয় অনুসিদ্ধান্ত (deductions)

(A) A ও B যে কোন কোণ নির্দেশ করিলে $\sin(A+B)$ এবং $\cos(A+B)$ এর সূত্র হইতে $\sin(A-B)$ এবং $\cos(A-B)$ এর সূত্র নির্ণয় কর।

যেহেতু $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$,

B এর পরিবর্তে $-B$ লিখিয়া পাওয়া যায়

$$\sin(A-B) = \sin A\cos(-B) + \cos A\sin(-B)$$
$$= \sin A\cos B - \cos A\sin B.$$

এইভাবে অপর সূত্রটিও পাওয়া যায়।

(B) 75° এবং 15° কোণ

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ+30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ+30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ-30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= (\sqrt{3}-1)/2\sqrt{2}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ-30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= (\sqrt{3}+1)/2\sqrt{2}$$

টীকা : 15° এবং 75°র sine এবং cosine অনুপাতকে নিম্নপ্রকারে পরস্পর সম্বন্ধযুক্ত করা যায়, যথা :

$\sin 15^\circ = \sin(90^\circ - 75^\circ) = \cos 75^\circ$, ইত্যাদি,

কারণ $15^\circ + 75^\circ = 90^\circ$; $15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$, এইভাবেও করা যাইত।

(C) প্রমাণ কর যে

(i) $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A$

(ii) $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$

প্রমাণ : (i) বামপক্ষ $= (\sin A \cos B + \cos A \sin B)(\sin A \cos B - \cos A \sin B)$

$$= \sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B$$
$$= \sin^2 A(1-\sin^2 B) - (1-\sin^2 A)\sin^2 B$$
$$= \sin^2 A - \sin^2 B$$
$$= (1-\cos^2 A) - (1-\cos^2 B)$$
$$= \cos^2 B - \cos^2 A$$

(ii) বামপক্ষ $= (\cos A \cos B - \sin A \sin B)(\cos A \cos B + \sin A \sin B)$

$$= \cos^2 A \cos^2 B - \sin^2 A \sin^2 B$$
$$= \cos^2 A(1-\sin^2 B) - (1-\cos^2 A)\sin^2 B$$
$$= \cos^2 A - \sin^2 B$$
$$= (1-\sin^2 A) - (1-\cos^2 B)$$
$$= \cos^2 B - \sin^2 A$$

(D) ট্যানজেণ্ট সূত্রসমূহ (tangent formulae)

A এবং B যে কোন দুইটি কোণ হইলে প্রমাণ কর যে

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \text{ এবং } \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B},$$

যেখানে ইহা ধরিয়া লইতে হইবে যে ট্যানজেণ্ট অনুপাতগুলি সকলেই বিদ্যমান।

লেখা যায়,

$$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$

এখন লব ও হরকে cos A cos B দ্বারা ভাগ করিয়া পাওয়া যায়

$$\tan(A+B)=\frac{\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}+\dfrac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}-\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$$

অনুরূপভাবে,

$$\tan(A-B)=\frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B+\sin A\sin B}$$

$$=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B},$$

যদি লব ও হর উভয়কে cos A cos B দ্বারা ভাগ করা হয়।

মন্তব্য ঃ যেমন 5·3 (A)র ক্ষেত্রে, এখানেও সেইরূপ B এর পরিবর্তে $-B$ লিখিয়া একটি সূত্র হইতে অপরটি পাওয়া যায়। ইহাও লক্ষণীয় যে cos A cos B দ্বারা ভাগকার্য যুক্তিসম্মত, কারণ সংশ্লিষ্ট ট্যানজেন্ট অনুপাতগুলি বিদ্যমান হওয়ায় cos A এবং cos Bর কেহই শূন্য হইতে পারে না।

(E) কো-ট্যানজেন্ট সূত্রসমূহ (co-tangent formulae)

A ও B যে কোন দুইটি কোণ হইলে এবং উহাদের সকল সংশ্লিষ্ট কো-ট্যানজেন্ট অনুপাত বিদ্যমান হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}\text{ এবং }\cot(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$$

$$\cot(A+B)=\frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}=\frac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}$$

$$=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$$ (লব ও হরকে sin A sin B দ্বারা ভাগ করিয়া, এবং sin A ও sin Bর কেহই শূন্য নহে।)

$$\cot(A-B)=\frac{\cos(A-B)}{\sin(A-B)}=\frac{\cos A\cos B+\sin A\sin B}{\sin A\cos B-\cos A\sin B},$$ ইত্যাদি।

টীকা : B এর পরিবর্তে $-B$ লিখিয়া একটি সূত্র হইতে অপরটি পাওয়া যায়।

(F) $\tan 75^\circ=2+\sqrt{3}$, $\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$

$$\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$$

$$=\frac{1+(1/\sqrt{3})}{1-(1/\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=2+\sqrt{3}$$

$$\tan 15^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}=2-\sqrt{3}$$

(G) সংশ্লিষ্ট সকল tan অনুপাত বিদ্যমান হইলে প্রমাণ কর যে

$$\tan(45^\circ + A) = \frac{1+\tan A}{1-\tan A} = \frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A}$$

এবং $\tan(45^\circ - A) = \dfrac{1-\tan A}{1+\tan A} = \dfrac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A}$

$$\tan(45^\circ + A) = \frac{\tan 45^\circ + \tan A}{1 - \tan 45^\circ \tan A} = \frac{1+\tan A}{1-\tan A}$$

$$= \frac{1+(\sin A/\cos A)}{1-(\sin A/\cos A)} = \frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A}$$

অপরটিও অনুরূপে প্রমাণ করা যায়।

5·4. যৌগিক কোণ তিনটি কোণের সমষ্টি হইলে এতৎসংক্রান্ত সূত্র

(A) $\sin(A+B+C)$

$$= \sin\{(A+B)+C\} = \sin(A+B)\cos C + \cos(A+B)\sin C$$

$$= (\sin A \cos B + \cos A \sin B)\cos C + (\cos A \cos B - \sin A \sin B)\sin C$$

$$= \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \sin C.$$

(B) $\cos(A+B+C)$

$$= \cos\{(A+B)+C\} = \cos(A+B)\cos C - \sin(A+B)\sin C$$

$$= (\cos A \cos B - \sin A \sin B)\cos C - (\sin A \cos B + \cos A \sin B)\sin C$$

$$= \cos A \cos B \cos C - \cos A \sin B \sin C - \cos B \sin C \sin A - \cos C \sin A \sin B.$$

(C) $\tan(A+B+C)$, সংশ্লিষ্ট tan অনুপাতগুলি বিদ্যমান ধরিয়া

$$= \tan\{(A+B)+C\} = \frac{\tan(A+B) + \tan C}{1 - \tan(A+B)\tan C}$$

$$= \frac{\dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} + \tan C}{1 - \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} + \tan C}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan B \tan C - \tan C \tan A - \tan A \tan B}.$$

প্রশ্নমালা V(A)

[নিম্নের প্রশ্নগুলিতে সংশ্লিষ্ট সকল ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষককে বিদ্যমান ধরা হইয়াছে এবং হর থাকিলে ধরা হইয়াছে উহা শূন্য নহে।]

1. প্রমাণ কর (তালিকাগুলির সাহায্য না লইয়া) যে

(i) $\sin 30^\circ \cos 150^\circ + \cos 30^\circ \sin 150^\circ = 0.$

(ii) $\cos 20^\circ \cos 70^\circ - \sin 20^\circ \sin 70^\circ = 0.$

(iii) $2\{\sin 30^\circ 20' \sin 89^\circ 40' - \cos 30^\circ 20' \cos 89^\circ 40'\} = 1.$

(iv) $\dfrac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ} = 1.$

(v) $\tan 3^\circ + \tan 42^\circ + \tan 3^\circ \tan 42^\circ = 1.$

(vi) $\dfrac{\cos 5^\circ + \sin 5^\circ}{\cos 5^\circ - \sin 5^\circ} = \tan 50^\circ.$

(vii) $\tan(45^\circ + \theta)\tan(45^\circ - \theta) = 1.$

(viii) $\tan 48^\circ \tan 42^\circ = 1.$

[**সমাধান :** (v) প্রমাণ করিতে হইবে যে
$\tan 3^\circ + \tan 42^\circ = 1 - \tan 3^\circ \tan 42^\circ$
বা, $\dfrac{\tan 3^\circ + \tan 42^\circ}{1 - \tan 3^\circ \tan 42^\circ} = 1$, অর্থাৎ $\tan(3^\circ + 42^\circ) = 1$
এবং $\tan(3^\circ + 42^\circ) = \tan 45^\circ = 1$

(viii) বামপক্ষ $= \tan(45^\circ + 3^\circ)\tan(45^\circ - 3^\circ)$
$= \dfrac{1 + \tan 3^\circ}{1 - \tan 3^\circ} \times \dfrac{1 - \tan 3^\circ}{1 + \tan 3^\circ} = 1$]

2. $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$ এর মান নির্ণয় কর এবং বল, $(\alpha + \beta)$ ও $(\alpha - \beta)$ কোন্ পাদতে অবস্থিত, যদি

(i) $\sin\alpha = 4/5$, $\cos\beta = 5/13$; α এবং β প্রথম পাদতে অবস্থিত হয়।

(ii) $\sin\alpha = 2/3$, $\cos\beta = 3/4$; α দ্বিতীয় পাদতে এবং β চতুর্থ পাদতে অবস্থিত হয়।

[**সমাধান :** (i) $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - 16/25} = 3/5$
এবং $\sin\beta = \sqrt{1 - 25/169} = 12/13$,
কারণ α, β প্রথম পাদতে অবস্থিত।

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13} + \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} = \frac{56}{65}$. অনুরূপে $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{33}{65}$, সুতরাং $(\alpha + \beta)$ দ্বিতীয় পাদতে অবস্থিত (কারণ sine ধনাত্মক কিন্তু cosine ঋণাত্মক)।]

আবার $\sin(\alpha - \beta) = -16/65$ এবং $\cos(\alpha - \beta) = 63/65$ নির্দেশ করে যে $\alpha - \beta$ চতুর্থ পাদতে অবস্থিত।

[উঃ (ii) $\sin(\alpha + \beta) = \dfrac{6 + \sqrt{35}}{12}$, $\cos(\alpha + \beta) = \dfrac{-3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{12}$,
$\sin(\alpha - \beta) = \dfrac{6 - \sqrt{35}}{12}$, $\cos(\alpha - \beta) = \dfrac{-3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}}{12}$;
$\alpha \pm \beta$ দ্বিতীয় পাদতে।]

3. $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\tan(\alpha+\beta)$ 'র মান নির্ণয় কর, যখন

(i) $\sin\alpha=8/17$, $\tan\beta=5/12$, α এবং β প্রথম পাদতে।

(ii) $\cos\alpha=-12/13$, $\cot\beta=24/7$, α এবং β যথাক্রমে দ্বিতীয় এবং তৃতীয় পাদতে।

[উঃ (i) 171/221, 140/221, 171/140 ; (ii) −36/325, 323/325, −36/323.]

4. দেখাও যে $A+B=45^\circ$ যখন $\tan A=1/4$ এবং $\tan B=3/5$ এবং $A+B=135^\circ$, যদি $\tan A=5/3$ এবং $\tan B=4$ হয়।

5. প্রমাণ কর যে

(i) $(\sin 45^\circ+A)-\sin(45^\circ-A)=\sqrt{2}\sin A.$

(ii) $\sin(\frac{\pi}{6}+\theta)+\cos(\frac{\pi}{3}+\theta)=\cos\theta.$

6. সরল কর :

(i) $\sin(A+B)+\sin(A-B)$. (ii) $\frac{1}{2}\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\}$.

(iii) $(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)^2+(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)^2$.

(iv) $\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\dfrac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}$.

[উঃ (i) 2 sin A cos B. (ii) cos A cos B. (iii) 1. (iv) 0.]

7. নিম্নস্থ রাশিগুলির মান নির্ণয় করিয়া দেখাও যে উহারা A এবং B বর্জিত :

(i) $\dfrac{\sin(B-C)}{\sin B\sin C}+\dfrac{\sin(C-A)}{\sin C\sin A}+\dfrac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}$.

(ii) $\sin(A+B)\sin(A-B)-\sin^2A+\sin^2B$.

(iii) $\cos(A+B)\cos(A-B)+\sin^2A+\sin^2B$.

8. প্রমাণ কর যে

(i) $\sec(x+y)=\dfrac{\sec x\sec y}{1-\tan x\tan y}$.

(ii) $\sec(x-y)=\dfrac{\sec x\sec y}{1+\tan x\tan y}$.

(iii) $\operatorname{cosec}(x+y)=\dfrac{\operatorname{cosec} x\operatorname{cosec} y}{\cot y+\cot x}$.

(iv) $\operatorname{cosec}(x-y)=\dfrac{\operatorname{cosec} x\operatorname{cosec} y}{\cot y-\cot x}$.

উভয় পক্ষের সমতা যাচাই কর (9—15) :

9. $\tan(x+y)\tan(x-y)=\dfrac{\sin^2x-\sin^2y}{\cos^2x-\sin^2y}$.

10. $\dfrac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\dfrac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}$.

11. $\dfrac{\tan(\frac{1}{4}\pi - x)}{\tan(\frac{1}{4}\pi + x)} = \dfrac{\sec^2 x - 2\tan x}{\sec^2 x + 2\tan x}.$

12. $\cot(A+B)\cot(A-B) = \dfrac{\cos^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 A - \sin^2 B}.$

13. $\tan^2 A - \tan^2 B = \dfrac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\cos^2 A\cos^2 B} = \dfrac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A \cos^2 B}.$

14. $1 + \tan 2\theta \tan\theta = \sec 2\theta.$

15. $\cot\theta - \cot 2\theta = \operatorname{cosec} 2\theta.$

16. $a\cos\theta + b\sin\theta$ কে $r\sin(\theta+\alpha)$ অথবা $r\cos(\theta-\beta)$র আকারে প্রকাশ কর এবং ইহা হইতে r, α এবং βর মান নির্ণয় কর।

ইহার সাহায্যে দেখাও যে $\sin x + \cos x$ কে $\sqrt{2}\sin(\frac{1}{4}\pi + x)$র সহিত সমান হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

[$a = r\sin\alpha$, $b = r\cos\alpha$ লইয়া পাওয়া যায় $a^2+b^2=r^2$ বা $r = +\sqrt{a^2+b^2}$; এবং ধরা হইবে, α **প্রধান মান (principal value)** বলিয়া কথিত এমন একটি **অনন্য (unique)** কোণ নির্দেশ করে যাহা

$\sin\alpha = a/\sqrt{a^2+b^2}$ এবং $\cos\alpha = b/\sqrt{a^2+b^2}$ কে সিদ্ধ করে এবং একই সঙ্গে $-\pi < \alpha \leq \pi$ এই অসমতা (inequality) জ্ঞাপক শর্তটিও সিদ্ধ করে।

স্পষ্টত লক্ষণীয় যে α এমন বহু সংখ্যক মান ধারণে সক্ষম যাহাদের পরস্পরের মধ্যে পার্থক্য 2π এর কোন অখণ্ড গুণিতকের সমান। কিন্তু যদি অন্যভাবে বলা না থাকে তবে উহার প্রধান মানই সর্বদা লওয়া হইবে। এ বিষয়ে বিশদ আলোচনার নিমিত্ত সপ্তম ও অষ্টম অধ্যায় দ্রষ্টব্য। সুতরাং r এবং αর সংশ্লিষ্ট মান লইয়া পাওয়া যায়

$a\cos\theta + b\sin\theta = r\{(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta)\} = r\sin(\theta+\alpha).$

অনুরূপভাবে $a = r\cos\beta$, $b = r\sin\beta$ লইয়া $r = +\sqrt{a^2+b^2}$ পাওয়া যায়, এবং β পাওয়া যায়

$\cos\beta = a/\sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\beta = b/\sqrt{a^2+b^2}$ ও $-\pi < \beta \leq +\pi$ হইতে।

এখন $a\cos\theta + b\sin\theta = r\{\cos\beta\cos\theta + \sin\beta\sin\theta\} = r\cos(\theta-\beta)$

সুতরাং $\sin x + \cos x = 1.\sin x + 1.\cos x = r\cos\theta\sin x + r\sin\theta\cos x.$

($1 = r\cos\theta$, $1 = r\sin\theta$ লইয়া, যাহার ফলে পাওয়া যায় $r = \sqrt{2}$, $\cos\theta = 1/\sqrt{2} = \sin\theta$ এবং $-\pi < \theta \leq +\pi$ বলিয়া $\theta = \frac{1}{4}\pi$)

$= r\sin(x+\theta) = \sqrt{2}\sin(x + \frac{1}{4}\pi.)$]

17. $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$ কে $r\cos(\theta-\alpha)$ এবং $r\sin(\theta+\beta)$র আকারে প্রকাশ কর, যেখানে $r=2$, $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ এবং $\beta = \frac{1}{6}\pi$ হইবে।

18. প্রমাণ কর যে $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(x-\frac{1}{4}\pi)$.
[বামপক্ষকে দক্ষিণ পক্ষের সহিত, আবার দক্ষিণ পক্ষকে বামপক্ষের সহিত সমান দেখাও।]

19. দেখাও যে $\tan\theta\tan 2\theta\tan 3\theta=\tan 3\theta-\tan 2\theta-\tan\theta$.
[ইঙ্গিত : $\tan 3\theta=\tan(\theta+2\theta)=\cdots\cdots$ইত্যাদি।]

20. প্রতিটির বিস্তৃতি নির্ণয় কর :
$\sin(A+B-C)$, $\cos(A-B-C)$, $\tan(A-B+C)$, $\cot(A+B+C)$.

21. যদি $A+B+C=\pi$ এবং $\cos A=\cos B\cos C$ হয়, তবে দেখাও যে
(i) $\tan A=\tan B+\tan C$; (ii) $\cot B\cot C=\frac{1}{2}$.

[সমাধান : (i) $\text{R.H.S.}=\frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\cos B\cos C}$
$=\sin(B+C)/\cos B\cos C=\sin A/\cos A$
$=\tan A$, কারণ $B+C=\pi-A$, আর $\cos A\neq 0$ ধরিয়া। একইভাবে (ii) এর সমাধান পাওয়া যাইবে।]

22. সমকোণী ত্রিভুজ ABCর C কোণ 90° ; প্রতীকগুলির স্বাভাবিক তাৎপর্য ধরিয়া প্রমাণ কর যে

$$\sin(A-B)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \text{ এবং } \cos(A-B)=\frac{2ab}{c^2}.$$

23. $\tan\theta=k$ এবং $\theta+\phi=\frac{1}{4}\pi$ হইলে প্রমাণ কর যে $\tan\phi=(1-k)/(1+k)$
[সমাধান : যেহেতু $k=\tan\theta$, সুতরাং

$$\frac{1-k}{1+k}=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\tan(\tfrac{\pi}{4}-\theta)=\tan\phi.\text{]}$$

24. θ কোণকে α এবং β এই দুই অংশে এইরূপে বিভক্ত করা হইল যেন $\tan\alpha:\tan\beta=m:n$ হয় ; প্রমাণ কর যে

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{m-n}{m+n}\sin\theta.$$

25. যদি $a\cos(x+A)=b\cos(x-A)$ হয় তবে প্রমাণ কর যে
$(a+b)\tan x=(a-b)\cot A$.

26. $\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta+1=0$ হইলে দেখাও যে
$1+\cot\alpha\tan\beta=0$.

27. যদি $\tan\theta=\frac{a\sin x+b\sin y}{a\cos x+b\cos y}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে

$$a\sin(\theta-x)+b\sin(\theta-y)=0$$

28. যদি $\tan\theta-\tan\phi=x$ এবং $\cot\phi-\cot\theta=y$ হয় তবে দেখাও যে

$$\cot(\theta-\phi)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

[সমাধান : $x=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\sin\phi}{\cos\phi}=\frac{\sin\theta\cos\phi-\cos\theta\sin\phi}{\cos\theta\cos\phi}$.

বা, $\frac{1}{x}=\frac{\cos\theta\cos\phi}{\sin(\theta-\phi)}$; অনুরূপে $\frac{1}{y}=\frac{\sin\theta\sin\phi}{\sin(\theta-\phi)}$.

সুতরাং $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{\sin\theta\sin\phi+\cos\theta\cos\phi}{\sin(\theta-\phi)}=\frac{\cos(\theta-\phi)}{\sin(\theta-\phi)}=\cot(\theta-\phi)$.]

29. যদি $\tan\theta=\frac{x\sin\phi}{1-x\cos\phi}$ এবং $\tan\phi=\frac{y\sin\theta}{1-y\cos\theta}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\sin\theta/\sin\phi=x/y$.

30. যদি $\tan\beta=\frac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\tan(\alpha-\beta)=(1-n)\tan\alpha.$$

5·5. সমষ্টি, অন্তর এবং গুণফলের সূত্রাবলী (Sum, difference and product formulae) :

(A) সাইনসমূহ এবং কোসাইনসমূহের গুণফলগুলিকে সমষ্টি অথবা অন্তরফলরূপে প্রকাশ (Products of sines and cosines in terms of sums or difference) :

ইতিপূর্বে দেখা গিয়াছে যে A এবং B যে কোন দুইটি কোণ হইলে,

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$
$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$
$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$
$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

প্রথম সম্পর্ক দুইটি হইতে যোগ ও বিয়োগ ক্রিয়ার দ্বারা পাওয়া যায় যে

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$$
$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$$

এবং শেষের সম্পর্ক দুইটি হইতে যোগ ও বিয়োগ ক্রিয়ার দ্বারা পাওয়া যায় যে

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$$
$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$$

এই সূত্র চারিটিকে বিপরীতক্রমে লিখিয়া নিম্নের সূত্র চারিটি পাওয়া যায়, যথা :

$$\sin A\cos B=\tfrac{1}{2}\{\sin(A+B)+\sin(A-B)\}$$
$$\cos A\sin B=\tfrac{1}{2}\{\sin(A+B)-\sin(A-B)\}$$
$$\cos A\cos B=\tfrac{1}{2}\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\}$$
$$\sin A\sin B=-\tfrac{1}{2}\{\cos(A+B)-\cos(A-B)\}$$

(B) সমষ্টি অথবা অন্তরফলকে গুণফলরূপে প্রকাশ (From sum or difference into products) :

যদি $A+B=C$ এবং $A-B=D$ ধরা যায় তবে $A=\frac{1}{2}(C+D)$, $B=\frac{1}{2}(C-D)$; এখন (A)র অন্তর্গত শেষ চারিটি সূত্র হইতে এই মান বসাইয়া নিম্নের সূত্র চারিটি পাওয়া যায়, যথা :

$$\sin C+\sin D=\ \ 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\sin C-\sin D=\ \ 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

$$\cos C+\cos D=\ \ 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\cos C-\cos D=-2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}.$$

টীকা : ইহাদের নিম্নলিখিত প্রকারে সহজে মনে রাখা যায় :

সাইন + সাইন = 2 সাইন ($\frac{1}{2}$ সমষ্টি) কস্ ($\frac{1}{2}$ অন্তর)

কোসাইন − কোসাইন = − 2 সাইন ($\frac{1}{2}$ সমষ্টি) সাইন ($\frac{1}{2}$ অন্তর), ইত্যাদি।

প্রশ্নমালা V(B)

[নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলিতে সংশ্লিষ্ট সকল ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষককে বিদ্যমান ধরা হইয়াছে এবং হর থাকিলে ধরা হইয়াছে যে উহা শূন্য নহে।]

1. প্রত্যেকটিকে গুণফলের আকারে প্রকাশ কর :

(*i*) $\sin 50°+\sin 40°$. (*ii*) $\cos 36°-\cos 76°$.

(*iii*) $\sin 75°-\sin 25°$.

[উঃ (*i*) $2\sin 45°\cos 5°$. (*ii*) $2\sin 56°\sin 20°$. (*iii*) $2\cos 50°\sin 25°$.]

2. দেখাও যে

$\sin 43°+\sin 17°=\cos 13°$ এবং $\cos 25°-\cos 35°=\sin 5°$.

3. নিম্নের প্রত্যেকটিকে যোগফল অথবা বিয়োগফলের আকারে প্রকাশ কর :

(*i*) $\sin 50°\cos 30°$. (*ii*) $\cos 40°\cos 20°$. (*iii*) $\sin 55°\sin 40°$.

[উঃ (*i*) $\frac{1}{2}(\sin 80°+\sin 20°)$. (*ii*) $\frac{1}{2}(\cos 60°+\cos 20°)$. (*iii*) $-\frac{1}{2}(\cos 95°-\cos 15°)$.]

4. দেখাও যে

$$\frac{\sin 75°-\sin 15°}{\cos 75°+\cos 15°}=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{এবং} \quad 1+\frac{\cos 465°+\cos 165°}{\sin 105°+\sin 15°}=0.$$

5. প্রমাণ কর যে

(*i*) $\sin 2x+\sin 4x=2\sin 3x\cos x$.

(*ii*) $\sin 8x-\sin 4x=2\cos 6x\sin 2x$

(iii) $\cos 6x+\cos 4x=2\cos 5x\cos x$.

(iv) $\cos\{3x/2\}-\cos\{9x/2\}=2\sin 3x\sin\{3x/2\}$.

(v) $\dfrac{\sin A+\sin 3A}{\cos A+\cos 3A}=\tan 2A$.

(vi) $\dfrac{\sin 4x-\sin 2x}{\cos 4x-\cos 2x}=-\cot 3x$.

6. দেখাও যে

(i) $\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta=\sin 2\theta(1+2\cos\theta)$.

(ii) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=\cos 2x(1+2\cos x)$.

(iii) $\cos 10^\circ+\cos 110^\circ+\cos 130^\circ=0$
$=\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 220^\circ$.

(iv) $\sin(x-120^\circ)+\sin x+\sin(x+120^\circ)=0$
$=\cos(x-120^\circ)+\cos x+\cos(x+120^\circ)$.

(v) $\dfrac{\sin 2x+\sin 5x-\sin x}{\cos 2x+\cos 5x+\cos x}=\tan 2x$.

(vi) $\dfrac{\sin x+\sin 2x+\sin 4x+\sin 5x}{\cos x+\cos 2x+\cos 4x+\cos 5x}=\tan 3x$.

(vii) $\dfrac{\cos 7x+\cos 3x-\cos 5x-\cos x}{\sin 7x-\sin 3x-\sin 5x+\sin x}=\cot 2x$.

(viii) $\dfrac{\sin(x+y)-2\sin x+\sin(x-y)}{\cos(x+y)-2\cos x+\cos(x-y)}=\tan x$.

[**সমাধান :** (iii) L.H.S. $=(\cos 10^\circ+\cos 110^\circ)+\cos 130^\circ$
$=2\cos 60^\circ\cos 50^\circ+\cos 130^\circ$
$=2\cdot\frac{1}{2}\cos 50^\circ+\cos 130^\circ=\cos 50^\circ+\cos 130^\circ$
$=\cos 50^\circ+\cos(180^\circ-50^\circ)$
$=\cos 50^\circ-\cos 50^\circ=0$; অনুরূপভাবে R.H.S. $=0$.

(vii) L.H.S. $=\dfrac{(\cos 7x-\cos x)+(\cos 3x-\cos 5x)}{(\sin 7x+\sin x)-(\sin 3x+\sin 5x)}$
$=\dfrac{-2\sin 4x\sin 3x-2\sin 4x\sin(-x)}{2\sin 4x\cos 3x-2\sin 4x\cos(-x)}$
$=\dfrac{2\sin 4x(-\sin 3x+\sin x)}{2\sin 4x(\cos 3x-\cos x)}$
$=\dfrac{2\cos 2x\sin(-x)}{-2\sin 2x\sin x}=\dfrac{-\cos 2x\sin x}{-\sin 2x\sin x}=\cot 2x$.]

7. Prove that

(i) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{8}=\cos 40^\circ\cos 100^\circ\cos 160^\circ$.

(*ii*) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \sqrt{3}/8$.

(*iii*) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = 1/16$.

(*iv*) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = 3/16$.

[**সমাধান :** (*i*)

$$\begin{aligned}\text{L.H.S.} &= (\cos 20^\circ \cos 40^\circ) \cos 80^\circ \\ &= \tfrac{1}{2}(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ)\cos 80^\circ \\ &= \tfrac{1}{4}\cos 80^\circ + \tfrac{1}{2}(\cos 20^\circ \cos 80^\circ) \\ &= \tfrac{1}{4}\cos 80^\circ + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}(\cos 100^\circ + \cos 60^\circ) \\ &= \tfrac{1}{4}(\cos 80^\circ + \cos 100^\circ) + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{2}\cos 90^\circ \cos 10^\circ + \tfrac{1}{8} \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot 0\cdot \cos 10^\circ + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{8};\end{aligned}$$

অনুরূপভাবে R.H.S. $= \frac{1}{8}$.]

8. (*i*) যদি $\sin x = k \sin y$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\tan \frac{x-y}{2} = \frac{k-1}{k+1} \tan \frac{x+y}{2}.$$

(*ii*) পরবর্তী এক অধ্যায়ে প্রমাণ করা হইবে যে, যে কোন ত্রিভুজ ABCর ক্ষেত্রে $b/c = \sin B/\sin C$, যেখানে প্রতীকগুলির প্রচলিত অর্থ ধরা হইয়াছে। ইহা হইতে দেখাও যে

$$\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}.$$

[**সমাধান :** (*i*) $\frac{k}{1} = \frac{\sin x}{\sin y}$ বা, $\frac{k-1}{k+1} = \frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y}$

$$= \frac{2\cos \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(x-y)}{2 \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(x-y)}{\tan \frac{1}{2}(x+y)}.$$

(*ii*) যেহেতু $A+B+C=\pi$, সুতরাং $\frac{1}{2}(B+C) = (90^\circ - \frac{1}{2}A)$; এখন (*i*) এর ক্ষেত্রের ন্যায় অগ্রসর হও।]

9. যদি $\cos y = k \cos x$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\tan \frac{x-y}{2} = \frac{k-1}{k+1} \cot \frac{x+y}{2}$$

ইহার সাহায্যে $\tan 15^\circ$র মান নির্ণয় কর।

[ইঙ্গিত : 8(i)এর ক্ষেত্রের ন্যায় অগ্রসর হও। $\tan 15^\circ$র মানের জন্য $x=60^\circ$ এবং $y=30^\circ$ ধর ; তাহা হইলে $k=\cos 30^\circ/\cos 60^\circ = \sqrt{3}$; এখন $\tan 15^\circ = \{(\sqrt{3}-1)/(\sqrt{3}+1)\} \cot 45^\circ$, ইত্যাদি।]

10. যদি $\sin\theta + \sin\phi = x$ এবং $\cos\theta + \cos\phi = y$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

(*i*) $\tan \frac{\theta+\phi}{2} = \frac{x}{y}$, (*ii*) $\cos \frac{\theta-\phi}{2} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$.

(iii) $\cos\frac{\theta+\phi}{2}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, (iv) $\tan\frac{\theta-\phi}{2}=\sqrt{\frac{4-x^2-y^2}{x^2+y^2}}$,

যেখানে ধনাত্মক সূক্ষ্ম কোণ θ ও ϕ, $\theta>\phi$ এবং $\theta+\phi<\frac{1}{2}\pi$ এই শর্ত দুইটি মানিয়া চলে।

[**সমাধান ঃ** (i) $x=2\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)\cos\frac{1}{2}(\theta-\phi)$,

$y=2\cos\frac{1}{2}(\theta+\phi)\cos\frac{1}{2}(\theta-\phi)$,

এখন ভাগক্রিয়ার দ্বারা অভাষ্ট সম্পর্কটি পাওয়া যাইবে।]

11. যদি $x\cos\alpha+y\sin\alpha=k=x\cos\beta+y\sin\beta$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\frac{x}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=\frac{y}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=\frac{k}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

12. যদি A, B, C সমান্তর প্রগতি (A.P) তে থাকে তবে দেখাও যে

$$\frac{\sin A-\sin C}{\cos C-\cos A}=\cot B.$$

[**সমাধান ঃ**

L.H.S. $=2\cos\frac{1}{2}(A+C)\sin\frac{1}{2}(A-C)/2\sin\frac{1}{2}(C+A)\sin\frac{1}{2}(A-C)$

$=\cot\frac{1}{2}(A+C)=\cot B$, কারণ $A+C=2B$.]

13. প্রমাণ কর যে

(i) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

(ii) $(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2=4\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

14. প্রমাণ কর যে

$$\left(\frac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B}\right)^m+\left(\frac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}\right)^m=2\cot^m\frac{A-B}{2} \text{ অথবা } 0,$$

যখন m যথাক্রমে যুগ্ম অথবা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।

15. যদি $\operatorname{cosec} A+\sec A=\operatorname{cosec} B+\sec B$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\tan A+\tan B=\cot\frac{1}{2}(A+B).$$

6

গুণিতক ও অংশ কোণ
(Multiple and Submultiple Angles) :
অভেদ (Identities)

6·1. সূচনা

পূর্ব অধ্যায়ে প্রতিষ্ঠিত যোগ সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলি অবলম্বন করিয়া এখন আরও বিশদ আলোচনার অবতারণা করা হইবে। **সংশ্লিষ্ট ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকগুলি যে বিদ্যমান, এই অনুমানসাপেক্ষে** পরপর আলোচনা করা যাক।

(A) দ্বিগুণ কোণের সূত্রাবলী (Double angle formulae)

5·1 অনুচ্ছেদে দেখা গিয়াছে যে A এবং B এর সকল **বাস্তব** মানের ক্ষেত্রে

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$
$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

এবং সংশ্লিষ্ট tangent ও cotangent অনুপাতগুলি বিদ্যমান, ইহাও ধরিয়া লইলে

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B},\quad \cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}.$$

এখন B = A বসাইয়া নিম্নের সূত্রগুলি পাওয়া যায়, যথা

$$\sin 2A=\sin A\cos A+\cos A\sin A=2\sin A\cos A \qquad \cdots(1)$$
$$\cos 2A=\cos A\cos A-\sin A\sin A=\cos^2 A-\sin^2 A \qquad \cdots(2)$$
$$\text{বা, }=(1-\sin^2 A)-\sin^2 A=1-2\sin^2 A \qquad \cdots(3)$$
$$\text{বা, }=\cos^2 A-(1-\cos^2 A)=2\cos^2 A-1 \qquad \cdots(4)$$
$$\tan 2A=\frac{\tan A+\tan A}{1-\tan A\tan A}=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} \qquad \cdots(5)$$
$$\cot 2A=\frac{\cot A\cot A-1}{\cot A+\cot A}=\frac{\cot^2 A-1}{2\cot A} \qquad \cdots(6)$$

$\sin^2 A$, $\cos^2 A$, $\tan^2 A$, $\cot^2 A$, কে $\cos 2A$ এর সাহায্যে প্রকাশ

(3) এবং (4) হইতে

$$1-\cos 2A=2\sin^2 A \text{ এবং } 1+\cos 2A=2\cos^2 A$$

এবং ভাগদ্বারা পাওয়া যায়

$$2\tan^2 A=\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A} \quad \text{এবং} \quad 2\cot^2 A=\frac{1+\cos 2A}{1-\cos 2A}$$

$\sin 2A$, $\cos 2A$ কে $\tan^2 A$ তে প্রকাশ

(1) এবং (2) হইতে

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\sin A}{\cos A}\cdot\cos^2 A = \frac{2\tan A}{\sec^2 A} = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A}\cdot\frac{1}{\sec^2 A} = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}.$$

(B) নিম্নে প্রদত্ত অর্ধ-কোণের সূত্রগুলি (**Half-angle formulae**) প্রমাণ কর

$$\sin A = 2\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}A$$

$$\cos A = \cos^2\tfrac{1}{2}A - \sin^2\tfrac{1}{2}A = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}A = 2\cos^2\tfrac{1}{2}A - 1$$

$$\tan A = \frac{2\tan\frac{1}{2}A}{1-\tan^2\frac{1}{2}A},\quad \cot A = \frac{\cot^2\frac{1}{2}A - 1}{2\cot\frac{1}{2}A}$$

$$\sin A = \frac{2\tan\frac{1}{2}A}{1+\tan^2\frac{1}{2}A},\quad \cos A = \frac{1-\tan^2\frac{1}{2}A}{1+\tan^2\frac{1}{2}A}$$

(A)র সূত্রগুলিতে Aর পরিবর্তে $\frac{1}{2}A$ লিখিলেই এই সূত্রগুলি পাওয়া যাইবে।

(C) 3A কোণ

$$\begin{aligned}\sin 3A &= \sin(2A+A) = \sin 2A\cos A + \cos 2A\sin A\\ &= 2\sin A\cos A\cos A + (1-2\sin^2 A)\sin A\\ &= 2\sin A(1-\sin^2 A) + \sin A - 2\sin^3 A\\ &= 3\sin A - 4\sin^3 A \qquad \cdots (7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3A &= \cos(2A+A) = \cos 2A\cos A - \sin 2A\sin A\\ &= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin A\cos A\sin A\\ &= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A(1-\cos^2 A)\\ &= 4\cos^3 A - 3\cos A \qquad \cdots (8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 3A &= \tan(2A+A) = \frac{\tan 2A + \tan A}{1-\tan 2A\tan A}\\ &= \frac{\{2\tan A/(1-\tan^2 A)\} + \tan A}{1-\{2\tan A/(1-\tan^2 A)\}\tan A}\\ &= \frac{\tan A(1-\tan^2 A) + 2\tan A}{1-\tan^2 A - 2\tan^2 A}\\ &= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}. \qquad \cdots (9\end{aligned}$$

টীকা : 5·4 অনুচ্ছেদের সূত্রগুলিতে B=A=C লইয়া এই অনুচ্ছেদের (A)তে প্রদত্ত সূত্রগুলির সাহায্যেও এই সূত্রগুলি পাওয়া যায়।

অনুসিদ্ধান্ত : $A = \frac{1}{3}\theta$ ধরিলে

$$\sin\theta = 3\sin\tfrac{1}{3}\theta - 4\sin^3\tfrac{1}{3}\theta,$$
$$\cos\theta = 4\cos^3\tfrac{1}{3}\theta - 3\cos\tfrac{1}{3}\theta,$$
$$\tan\theta = \frac{3\tan\frac{1}{3}\theta - \tan^3\frac{1}{3}\theta}{1-3\tan^2\frac{1}{3}\theta}.$$

(D) দ্বিগুণ কোণে প্রকাশ (In terms of double angles)

$\sin\frac{1}{2}A$, $\cos\frac{1}{2}A$, $\tan\frac{1}{2}A$ কে $\cos A$র সাহায্যে প্রকাশ

যেহেতু $1+\cos A=2\cos^2\frac{1}{2}A$ এবং $1-\cos A=2\sin^2\frac{1}{2}A$, সুতরাং

$$\sin\tfrac{1}{2}A=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},\quad \cos\tfrac{1}{2}A=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

এবং $\tan\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}$.

মন্তব্য ঃ A দেওয়া থাকিলে $\sin\frac{1}{2}A$, $\cos\frac{1}{2}A$ এবং $\tan\frac{1}{2}A$-র চিহ্ন জানা যায়, সুতরাং মূলচিহ্নের পূর্বে সঠিক চিহ্নটি বসান যায়। **কিন্তু Aর মান না দিয়া** $\cos A$র মান দেওয়া হইলে মূল চিহ্নের পূর্বে সম্ভাব্য দুইটি চিহ্নই বসাইতে হইবে। নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি হইতে বিষয়টি পরিষ্কার হইবে। পরবর্তী অধ্যায় দুইটিও এ সম্পর্কে দ্রষ্টব্য।

উদাহরণ 1. $\sin 22\frac{1}{2}^\circ$ এবং $\cos 22\frac{1}{2}^\circ$ এর মান নির্ণয় কর।

$22\frac{1}{2}^\circ$ প্রথম পাদতে অবস্থিত হওয়ায় উহার sine এবং cosine উভয়েই ধনাত্মক; সুতরাং

$$\sin 22\tfrac{1}{2}^\circ=+\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos 45^\circ)}=\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\cos 22\tfrac{1}{2}^\circ=+\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos 45^\circ)}=\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

উদাহরণ 2. $\sin 157\frac{1}{2}^\circ$ এবং $\cos 157\frac{1}{2}^\circ$ এর মান নির্ণয় কর।

$157\frac{1}{2}^\circ$ দ্বিতীয় পাদতে অবস্থিত, সুতরাং উহার sine ধনাত্মক, কিন্তু cosine ঋণাত্মক; ফলে

$$\sin 157\tfrac{1}{2}^\circ=+\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos 315^\circ)}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-1/\sqrt{2})}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\cos 157\tfrac{1}{2}^\circ=-\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos 315^\circ)}=-\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+1/\sqrt{2})}=-\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$\sin\frac{1}{2}A$ এবং $\cos\frac{1}{2}A$ কে $\sin A$র সাহায্যে প্রকাশ

যেহেতু

$$(\cos\tfrac{1}{2}A+\sin\tfrac{1}{2}A)^2=\cos^2\tfrac{1}{2}A+\sin^2\tfrac{1}{2}A+2\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}A=1+\sin A$$

এবং $$(\cos\tfrac{1}{2}A-\sin\tfrac{1}{2}A)^2=\cos^2\tfrac{1}{2}A+\sin^2\tfrac{1}{2}A-2\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}A=1-\sin A$$

সুতরাং

$$\cos\tfrac{1}{2}A+\sin\tfrac{1}{2}A=\pm\sqrt{1+\sin A}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A-\sin\tfrac{1}{2}A=\pm\sqrt{1-\sin A}$$

ইহাদের যোগ এবং বিয়োগ দ্বারা পাওয়া যায়

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin A}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin A}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin A}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin A}.$$

মন্তব্য : যখন A প্রদত্ত না হইয়া কেবল sin A প্রদত্ত হয় তখন $\sin\frac{1}{2}A$ এবং $\cos\frac{1}{2}A$-র প্রত্যেকের চারিটি করিয়া মান সম্ভব—এ সম্পর্কে পরবর্তী অধ্যায় দুইটিতে বিশদভাবে আলোচনা করা হইবে। কিন্তু A প্রদত্ত হইলে উভয়েরই পূর্বে উপযুক্ত নির্দিষ্ট চিহ্ন স্থাপন করা সম্ভব। নিম্নে বর্ণিত আলোচনা হইতে বিষয়টি পরিষ্কার বুঝা যাইবে। প্রসঙ্গত লক্ষণীয় যে A জ্ঞাত থাকিলে $\left(\cos\frac{1}{2}A\pm\sin\frac{A}{2}\right)$ এর চিহ্ন অনন্যভাবে (uniquely) নির্ণয় করা যায়, কারণ

$$\cos\tfrac{1}{2}A+\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{2}\sin(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}A)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A-\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{2}\cos(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}A)$$

$\cos\frac{1}{2}A\pm\sin\frac{1}{2}A$র চিহ্ন নির্ণয়ে অপেক্ষকের লৈখিক রূপও (graphical representation) ছাত্রছাত্রীদের সাহায্য করিবে।

দৃষ্টান্ত : $\sin 15°$ এবং $\cos 15°$র মান নির্ণয় কর।

লক্ষ্য করিতে হইবে যে $\sin 15°$ এবং $\cos 15°$ উভয়ে ধনাত্মক; আবার $\cos 15°>\sin 15°$, কারণ

$$\cos 15°-\sin 15°=\sqrt{2}\sin(\tfrac{1}{4}\pi-15°)=\sqrt{2}\sin 30°.$$

আবার $y=\sin x$ এবং $y=\cos x$ এর লেখ হইতেও ইহা সুস্পষ্ট যে $\cos 15°-\sin 15°$ ধনাত্মক। সুতরাং

$$\cos 15°+\sin 15°=+\sqrt{1+\sin 30°}=\sqrt{1+1/2}$$

$$\cos 15°-\sin 15°=+\sqrt{1-\sin 30°}=\sqrt{1-1/2}$$

এইরূপে $\cos 15°=\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}})=(\sqrt{3}+1)/2\sqrt{2}$

এবং $\sin 15°=\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}})=(\sqrt{3}-1)/2\sqrt{2}.$

$\tan\frac{1}{2}A$ কে $\tan A$র সাহায্যে প্রকাশ

যেহেতু $\tan A=\dfrac{2\tan\frac{1}{2}A}{1-\tan^2\frac{1}{2}A}$, সুতরাং

$$\tan A\tan^2\tfrac{1}{2}A+2\tan\tfrac{1}{2}A-\tan A=0\,;$$

ইহা হইতে পাওয়া যায়

$$\tan\tfrac{1}{2}A=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\tan^2 A}}{2\tan A}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}.$$

মন্তব্য : যখন $\tan A$ প্রদত্ত হয়, কিন্তু A **অজ্ঞাত থাকে** তখন $\tan\frac{1}{2}A$র দুইটি সম্ভাব্য মান পাওয়া যায়। বিশদ আলোচনার জন্য পরবর্তী অধ্যায় দুইটি দ্রষ্টব্য। কিন্তু A প্রদত্ত হইলে $\tan\frac{1}{2}A$র পূর্বে উপযুক্ত নির্দিষ্ট চিহ্ন স্থাপন করা সম্ভব।

দৃষ্টান্ত : $\tan 75°$র মান নির্ণয় কর।

লক্ষণীয় যে $\tan 75°$ ধনাত্মক কিন্তু $\tan 150°$ ঋণাত্মক; সুতরাং

$$\tan 75°=\frac{-1-\sqrt{1+\tan^2 150°}}{\tan 150°}=\frac{-1-\sqrt{1+\frac{1}{3}}}{-1/\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$

(E) $\frac{1}{3}\theta$ **কে** θ **তে প্রকাশ**

(C) হইতে পাওয়া যায় যে

$$\sin\theta=3\sin\tfrac{1}{3}\theta-4\sin^3\tfrac{1}{3}\theta,\ \cos\theta=4\cos^3\tfrac{1}{3}\theta-3\cos\tfrac{1}{3}\theta$$

$$\text{এবং }\tan\theta=\frac{3\tan\frac{1}{3}\theta-\tan^3\frac{1}{3}\theta}{1-3\tan^2\frac{1}{3}\theta}$$

সমীকরণগুলি সমাধান করিয়া $\sin\frac{1}{3}\theta$, $\cos\frac{1}{3}\theta$ এবং $\tan\frac{1}{3}\theta$ কে যথাক্রমে $\sin\theta$, $\cos\theta$ এবং $\tan\theta$র আকারে পাওয়া যায়।

6·2. 18° কোণের ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক

ধরা যাক $\theta=18°$, তাহা হইলে $5\theta=90°$ এবং $2\theta=5\theta-3\theta=90°-3\theta$; তাহা হইলে

$$\sin 2\theta=\sin(90°-3\theta)=\cos 3\theta$$

$$\text{বা, } 2\sin\theta\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

$$\text{বা, } 2\sin\theta\cos\theta-4\cos^3\theta+3\cos\theta=0$$

$$\text{অর্থাৎ, } \cos\theta\{2\sin\theta-4\cos^2\theta+3\}=0$$

$$\text{কিন্তু } \cos\theta=\cos 18°\neq 0, \text{ সুতরাং}$$

$$2\sin\theta-4\cos^2\theta+3=0$$

$$\text{অর্থাৎ, } 2\sin\theta-4(1-\sin^2\theta)+3=0$$

$$\text{বা, } 4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$$

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

কিন্তু 18° ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হওয়ায় $\sin\theta=\sin 18°$ ধনাত্মক; সুতরাং ঋণাত্মক মানটি বাতিল করিয়া পাওয়া যায়

$$\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\text{এবং } \cos 18°=+\sqrt{1-\sin^2 18°}=\left\{1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}\right\}^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

এখন $\tan 18°$, $\cot 18°$ প্রভৃতি সহজেই নির্ণয় করা যাইবে।

6·3. 3°, 36°, 54°, 72° প্রভৃতি কোণের ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক; 3°র গুণিতকসমূহ

$$\sin 3°=\sin(18°-15°)=\sin 18°\cos 15°-\cos 18°\sin 15°$$

$$=\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1).\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}-\tfrac{1}{4}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}).\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$=\tfrac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2})-\tfrac{1}{8}(\sqrt{5+\sqrt{5}})(\sqrt{3}-1)$$

অনুরূপভাবে

$$\cos 3^\circ = \tfrac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})+\tfrac{1}{8}(\sqrt{5+\sqrt{5}})(\sqrt{3}+1)$$

ইহাও নির্ণয় করা যায় যে

$$\cos 36^\circ = 1-2\sin^2 18^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$$

$$\sin 36^\circ = \sqrt{1-\cos^2 36^\circ} = \tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

এখন সহজেই পূর্বার্জিত জ্ঞানের সাহায্যে 3°র গুণিতক কোণগুলির ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি নির্ণয় করা যায়, যদি কোণগুলিকে নিম্নলিখিত আকারে লওয়া হয়, যথা $54^\circ = 90^\circ - 36^\circ$, $72^\circ = 90^\circ - 18^\circ$, $6^\circ = 36^\circ - 30^\circ$, $9^\circ = 45^\circ - 36^\circ$ ইত্যাদি।

প্রশ্নমালা VI (A)

[নিম্নের প্রশ্নগুলিতে সংশ্লিষ্ট সকল ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষককে বিদ্যমান ধরা হইয়াছে]

1. $\sin 2x$, $\cos 2x$ এবং $\tan 2x$ এর মান নির্ণয় কর, যখন

(a) $\sin x = 3/5$, x প্রথম পাদতে,

(b) $\sin x = -1/2$, x চতুর্থ পাদতে,

(c) $\tan x = -1/5$, x দ্বিতীয় পাদতে।

[**সমাধান :** (c) $\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \dfrac{-2/5}{1+(1/25)} = -\dfrac{5}{13}$

$\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \dfrac{1-(1/25)}{1+(1/25)} = \dfrac{12}{13}$ [$2x$ চতুর্থ পাদতে]

$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \dfrac{-2/5}{1-(1/25)} = -\dfrac{5}{12}$.

[উঃ (a) 24/25, 7/25, 24/7 ; (b) $-\sqrt{3}/2$, 1/2, $-\sqrt{3}$]

2. $\sin \frac{1}{2}\theta$, $\cos \frac{1}{2}\theta$, $\tan \frac{1}{2}\theta$র মান নির্ণয় কর—যখন

(a) $\sin \theta = 5/13$, θ দ্বিতীয় পাদতে,

(b) $\cos \theta = 3/7$, θ চতুর্থ পাদতে।

[**সমাধান :** (a) θ দ্বিতীয় পাদতে, সুতরাং $\frac{1}{2}\theta$ প্রথম পাদতে। আবার $\sin \theta = 5/13$ এবং θ দ্বিতীয় পাদতে বলিয়া $\cos \theta = -12/13$; সুতরাং

$\sin \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$, $\cos \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$, $\tan \frac{1}{2}\theta = 5$.

[উঃ (b) $\sqrt{14}/7$, $-\sqrt{35}/7$, $-\sqrt{10}/5$]

3. সমকোণী ত্রিভুজ ABCর C সমকোণ হইলে প্রতীকগুলির প্রচলিত অর্থ ধরিয়া প্রমাণ কর যে

$$\sin 2A = \frac{2ab}{c^2},\ \cos 2A = \frac{b^2-a^2}{c^2},\ \sin \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{c-b}{2c}},\ \cos \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{b+c}{2c}}.$$

4. প্রমাণ কর যে

(i) $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A.$ (ii) $\dfrac{1-\cos 2A}{\sin 2A}=\tan A.$

(iii) $\dfrac{1+\cos A}{\sin A}=\cot\dfrac{A}{2}.$ (iv) $\dfrac{\sin A}{1-\cos A}=\cot\dfrac{A}{2}.$

(v) $\cot x-\tan x=2\cot 2x.$ (vi) $\cot\frac{1}{2}x+\tan\frac{1}{2}x=2\operatorname{cosec} x.$

(vii) $\tan^2\theta=\dfrac{\sec 2\theta-1}{\sec 2\theta+1}.$ (viii) $\tan^2\frac{1}{2}\theta=\dfrac{2\sin\theta-\sin 2\theta}{2\sin\theta+\sin 2\theta}.$

(ix) $\tan 2A=\dfrac{2}{\cot A-\tan A}.$ (x) $\cot A=\frac{1}{2}\left\{\cot\dfrac{A}{2}-\tan\dfrac{A}{2}\right\}.$

[**সমাধান:** (vi) $\text{L.H.S.}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}+\dfrac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x}=\dfrac{\cos^2\frac{1}{2}x+\sin^2\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x}.$

$$=\frac{2}{\sin x}=\text{R.H.S.}$$

(viii) $\text{R.H.S.}=\dfrac{2\sin\theta(1-\cos\theta)}{2\sin\theta(1+\cos\theta)}=\dfrac{2\sin^2\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta}$

$$=\tan^2\tfrac{1}{2}\theta.\ ]$$

5. দেখাও যে

(i) $\tan(\frac{1}{4}\pi+\theta)-\tan(\frac{1}{4}\pi-\theta)=2\tan 2\theta.$

(ii) $\tan(\frac{1}{4}\pi+\theta)+\tan(\frac{1}{4}\pi-\theta)=2\sec 2\theta.$

(iii) $\tan(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\theta)=\sec\theta+\tan\theta=\sqrt{\{(1+\sin\theta)/(1-\sin\theta)\}}.$

(iv) $\cot^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$;

(v) $\tan\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\theta}{2}\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{2\cos\theta-1}{2\cos\theta+1}.$

(vi) $\dfrac{1-\tan^2(\frac{1}{4}\pi-A)}{1+\tan^2(\frac{1}{4}\pi-A)}=\sin 2A.$

[**সমাধান:** (i) $\text{L.H.S.}=\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}-\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\dfrac{4\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$$=2\tan 2\theta.$$

(v) $\text{L.H.S.}=\dfrac{(1/\sqrt{3})+\tan\frac{1}{2}\theta}{1-(1/\sqrt{3})\tan\frac{1}{2}\theta}\cdot\dfrac{(1/\sqrt{3})-\tan\frac{1}{2}\theta}{1+(1/\sqrt{3})\tan\frac{1}{2}\theta}$

$$=\frac{1-3\tan^2\frac{1}{2}\theta}{3-\tan^2\frac{1}{2}\theta}=\frac{\cos^2\frac{1}{2}\theta-3\sin^2\frac{1}{2}\theta}{3\cos^2\frac{1}{2}\theta-\sin^2\frac{1}{2}\theta}$$

$$=\frac{2(\cos^2\frac{1}{2}\theta-\sin^2\frac{1}{2}\theta)-(\sin^2\frac{1}{2}\theta+\cos^2\frac{1}{2}\theta)}{2(\cos^2\frac{1}{2}\theta-\sin^2\frac{1}{2}\theta)+(\sin^2\frac{1}{2}\theta+\cos^2\frac{1}{2}\theta)}$$

$$=\text{R.H.S.}\ ]$$

6. দেখাও যে $\sin\theta$ এবং $\tan\frac{1}{2}\theta$র চিহ্ন একই। ইহার সাহায্যে দেখাও যে $\tan\frac{1}{2}\theta$ কে $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ বা $\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ র সহিত সমান হিসাবে প্রকাশ করা যায়। $\tan\frac{1}{2}\theta$ কি $-\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ বা $-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ র সহিত সমান হইতে পারে?

[**সমাধান :** ধরা যাক্ $\theta=n\pi$, যেখানে n অখণ্ড সংখ্যা। যদি n যুগ্ম (শূন্য সহ) সংখ্যা, ধরা যাক্ $n=2m$ হয়, তবে $\sin(2m\pi)=\tan\ (m\pi)=0$; যেক্ষেত্রে n অযুগ্ম তাহা বিবেচনা বহির্ভূত রাখা হইল, কারণ তখন $\tan\frac{1}{2}\theta$ অসংজ্ঞাত (undefined)। এখন মনে করা যাক্ $\theta=n\pi+\alpha$, যেখানে $0<\alpha<\pi$; যদি n যুগ্ম (শূন্য সহ) সংখ্যা হয়, তবে θ প্রথম পাদতে অথবা দ্বিতীয় পাদতে থাকে এবং $\sin\theta$ ধনাত্মক হয়, আর $\frac{1}{2}\theta$ প্রথম অথবা তৃতীয় পাদতে অবস্থিত হয় এবং $\tan\frac{1}{2}\theta$ ধনাত্মক হয়। যদি n অযুগ্ম হয়, তবে θ তৃতীয় অথবা চতুর্থ পাদতে থাকে এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক হয়, আর $\frac{1}{2}\theta$ দ্বিতীয় অথবা চতুর্থ পাদতে থাকে এবং $\tan\frac{1}{2}\theta$ ঋণাত্মক হয়।

পরবর্তী অংশ : অনুচ্ছেদ 6·1 এর (D) হইতে

$$\tan\tfrac{1}{2}\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{1+\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\text{বা},=\pm\frac{1-\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta};$$

এখানে $\pm$ চিহ্ন নিষ্প্রয়োজন, কারণ $\tan\frac{1}{2}\theta$ এবং $\sin\theta$ সর্বদা একই চিহ্নযুক্ত এবং $1-\cos\theta$ সর্বদা ধনাত্মক।]

7. নিম্নে সঠিক চিহ্ন নির্বাচন কর :

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta=\pm\sqrt{1+\sin\theta}\pm\sqrt{1-\sin\theta},$$

যখন (*i*) $\theta=30^\circ$, (*ii*) $\theta=210^\circ$, (*iii*) θ তৃতীয় পাদতে অবস্থিত হয়, (*iv*) $\theta=2\pi$.

[উঃ (*i*) $+-$; (*ii*) $++$; (*iii*) $++$; (*iv*) $+-$ বা $-+$]

8. দেখাও যে

(*i*) $\cos 4\theta=1-8\cos^2\theta+8\cos^4\theta.$

(*ii*) $\cos 6x=32\cos^6x-48\cos^4x+18\cos^2x-1.$

(*iii*) $\sin 5x=16\sin^5x-20\sin^3x+5\sin x.$

(*iv*) $\tan 4x=\frac{4\tan x-4\tan^3x}{1-6\tan^2x+\tan^4x}.$

[**সমাধান :** (*i*) $\cos 4\theta=\cos(2\theta+2\theta)=\cos 2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta\sin 2\theta$

$$=(2\cos^2\theta-1)^2-4\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$=4\cos^4\theta-4\cos^2\theta+1-4(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta$$
$$=\text{R.H.S.}$$
]

9. প্রমাণ কর :

(i) $\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=2.$

(ii) $(\sin \frac{1}{2}x+\cos \frac{1}{2}x)^2=1+\sin x.$

(iii) $\frac{\cos \frac{1}{2}\theta-\sqrt{1+\sin \theta}}{\sin \frac{1}{2}\theta-\sqrt{1+\sin \theta}}=\tan \frac{1}{2}\theta$, যখন $0<\theta<\frac{1}{2}\pi$.

(iv) $\tan \frac{A+B}{2}+\tan \frac{A-B}{2}=\frac{2 \sin A}{\cos A+\cos B}.$

(v) $\frac{1-\cos 2\theta+\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta+\sin 2\theta}=\tan \theta.$

(vi) $\frac{\cos^3 \theta+\sin^3 \theta}{\cos \theta+\sin \theta}=1-\frac{1}{2} \sin 2\theta.$

(vii) $\cos^6 \theta+\sin^6 \theta=\frac{1}{4}(1+3 \cos^2 2\theta).$

[সমাধান : (iv)

$$\text{L.H.S.}=\frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)}+\frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A-B)}$$

$$=\frac{\sin \frac{1}{2}(A+B+A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)}$$

$$=\frac{2 \sin A}{\cos \frac{1}{2}(A+B+A-B)+\cos \frac{1}{2}(A+B-A+B)}$$

$$=\frac{2 \sin A}{\cos A+\cos B}.$$]

10. দেখাও যে

(i) $\cos (120^\circ-A)+\cos A+\cos(120^\circ+A)=0$

(ii) $\cos^2 (A-120^\circ)+\cos^2 A+\cos^2(A+120^\circ)=\frac{3}{2}.$

(iii) $\cos^2 A+\cos^2 (A+\frac{1}{3}\pi)+\cos^2 (A-\frac{1}{3}\pi)=\frac{3}{2}.$

(iv) $\sin^3 \theta+\sin^3(120^\circ+\theta)+\sin^3(240^\circ+\theta)=-\frac{3}{4} \sin 3\theta.$

[সমাধান : (ii)

$$\text{L.H.S.}=\tfrac{1}{2}\{1+\cos(2A-240^\circ)+1+\cos 2A+1+\cos (2A+240^\circ)\}$$
$$=\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}\{\cos (2A-240^\circ)+\cos (2A+240^\circ)+\cos 2A\}$$
$$=\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}\{2 \cos 2A \cos 240^\circ+\cos 2A\}$$
$$=\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}\{2(\cos 2A)(-\tfrac{1}{2})+\cos 2A\}=\tfrac{3}{2}.$$]

11. যদি $\tan x=b/a$ হয় তবে $a \cos 2x+b \sin 2x$ এর মান নির্ণয় কর। [উঃ a]

12. যদি $\tan^2\theta=1+2 \tan^2\phi$ হয়, তবে দেখাও যে $\cos 2\phi=1+2 \cos 2\theta$.

13. যদি $2 \tan \alpha = 3 \tan \beta$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin 2\beta}{5-\cos 2\beta}.$$

[**সমাধান :** L.H.S.

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{(3/2)\tan\beta-\tan\beta}{1+(3/2)\tan^2\beta}=\frac{\tan\beta}{2+3\tan^2\beta}$$

$$=\frac{2\sin\beta\cos\beta}{4\cos^2\beta+6\sin^2\beta}=\frac{\sin 2\beta}{5(\cos^2\beta+\sin^2\beta)-(\cos^2\beta-\sin^2\beta)}$$

$=$R.H.S.]

14. যদি α এবং β ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $\cos 2\alpha=\dfrac{3\cos 2\beta-1}{3-\cos 2\beta}$ হয়, তবে দেখাও যে $\tan\alpha=\sqrt{2}\tan\beta$.

[**সমাধান :** যেহেতু $\dfrac{\cos 2\alpha}{1}=\dfrac{3\cos 2\beta-1}{3-\cos 2\beta}$, সুতরাং যোগ ও ভাগক্রিয়ার (comp. and div.) দ্বারা পাওয়া যায়

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{3-\cos 2\beta-3\cos 2\beta+1}{3-\cos 2\beta+3\cos 2\beta-1}=\frac{4(1-\cos 2\beta)}{2(1+\cos 2\beta)}$$

বা, $\tan^2\alpha=2\tan^2\beta$, অর্থাৎ, $\tan\alpha=\sqrt{2}\tan\beta$, কারণ α এবং β উভয়ে ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ বলিয়া ঋণাত্মক চিহ্নটি বাতিল করিতে হইবে।]

15. যদি $\tan^2 x+2\tan x\tan 2y=\tan^2 y+2\tan y\tan 2x$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে ইহার প্রত্যেক পক্ষের মান$=1$, নতুবা $\tan x=\pm\tan y$.

16. যদি $x\sin\alpha=y\cos\alpha$ হয়, তবে দেখাও যে $x\cos 2\alpha+y\sin 2\alpha=x$.

17. যদি $\tan\theta=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\sin 2\theta=\frac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta}{1+\sin 2\alpha\sin 2\beta}.$$

[**সমাধান :** $\tan\theta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$, সুতরাং $\sin 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

$=\dfrac{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\cos^2(\alpha-\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)}$ ($\tan\theta$'র মান বসাইয়া) $=\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta}{1+\sin 2\alpha\sin 2\beta}$,

কারণ $\cos^2(\alpha-\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)=\cos^2\alpha(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+$
$\sin^2\alpha(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+4\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta$
$=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\sin 2\alpha\sin 2\beta=1+\sin 2\alpha\sin 2\beta$.]

18. যদি $\dfrac{\tan(\alpha-\beta-\gamma)}{\tan(\alpha-\beta+\gamma)}=\dfrac{\tan\gamma}{\tan\beta}$ হয়, তবে দেখাও যে

হয় $\sin(\beta-\gamma)=0$, নতুবা, $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=0$.

19. দেখাও যে $\cos 4x-\cos 4y=8(\cos x-\cos y)(\cos x+\cos y)$ $(\cos x-\sin y)(\cos x+\sin y)$.

20. যদি $\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\phi}{2}$ হয়, তবে দেখাও যে $\cos\phi=\frac{\cos\theta-e}{1-e\cos\theta}$.

[**সমাধান :** $\tan^2\frac{\phi}{2}=\frac{1+e}{1-e}\tan^2\frac{\theta}{2}$ বা, $\frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi}=\frac{(1+e)(1-\cos\theta)}{(1-e)(1+\cos\theta)}$;

এখন যোগ ও ভাগক্রিয়ার দ্বারা পাওয়া যায়

$\frac{2\cos\phi}{2}=\frac{2(\cos\theta-e)}{2(1-e\cos\theta)}$; ইহা হইতে নির্ণেয় সম্পর্কটি পাওয়া যাইবে।]

21. (*i*) যদি $\tan\theta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$ হয়, তবে দেখাও যে $\tan\frac{1}{2}\theta$র অন্যতর একটি মান $\tan\frac{1}{2}\alpha\tan\frac{1}{2}\beta$.

(*ii*) যদি $\cos\theta=\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\tan\frac{1}{2}\theta$র অন্যতর একটি মান $\tan\frac{1}{2}\alpha\cot\frac{1}{2}\beta$.

22. দেখাও যে $\cos^2\theta+\cos^2(\alpha+\theta)-2\cos\alpha\cos\theta\cos(\alpha+\theta)$ এর সরল মানটি θ বর্জিত।

23. প্রমাণ কর যে Aর সকল মানের ক্ষেত্রেই $\frac{\cot\frac{1}{2}A}{1+\cot\frac{1}{2}A}\cdot\frac{\cot(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}A)}{1+\cot(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}A)}$ ধ্রুবক।

24. যদি $\sec(x+\alpha)+\sec(x-\alpha)=2\sec x$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\cos x=\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\alpha$, যদি $\cos\alpha\neq 1$ হয়।

25. সমাধানপূর্বক x নির্ণয় কর, যখন $0\le x\le 2\pi$:

(*i*) $\cos 2x=\cos x$. (*ii*) $\sin 2x+\sin 4x=0$.

(*iii*) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$.

(*iv*) $\tan x+\tan 2x+\tan x\tan 2x=1$.

(*v*) $\tan x+\tan 2x+\tan 3x=\tan x\tan 2x\tan 3x$.

[**সমাধান :** (*iii*) $(\cos x+\cos 3x)+\cos 2x=0$ বা, $2\cos 2x\cos x+\cos 2x=0$, বা, $\cos 2x\,(2\cos x+1)=0$, অর্থাৎ, $\cos 2x=0$, বা, $\cos x=-\frac{1}{2}$; ইহা হইতে পাওয়া যায় $x=\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4, 2\pi/3, 4\pi/3$.

(*iv*) $\frac{\tan x+\tan 2x}{1-\tan x\tan 2x}=1$, বা, $\tan 3x=1$; ইহা হইতে পাওয়া যায় $x=\pi/12, 5\pi/12, 9\pi/12, 13\pi/12, 17\pi/12, 21\pi/12$.]

[উঃ (*i*) $0, 2\pi/3, 4\pi/3, 2\pi$; (*ii*) $0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3, 2\pi, \pi/2, 3\pi/2$; (*v*) $0, \pi/6, 2\pi/6, 3\pi/6, 4\pi/6, 5\pi/6, \pi, 7\pi/6, 8\pi/6, 9\pi/6, 10\pi/6, 11\pi/6, 2\pi$.]

26. দেখাও যে

(*i*) $\sin 8x=2^3\sin x\cos x\cos 2x\cos 2^2x$.

(*ii*) $\sin x = 2^n \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}$.

(*iii*) $\cos\frac{\pi}{15}\cdot\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15} = -\frac{1}{16}$.

(*iv*) $2^n \cos\theta\cos 2\theta\cos 2^2\theta\cdots\cos 2^{n-1}\theta = -1$, যদি $(2^n-1)\theta=\pi$ হয়।

(*v*) $2^n \cos\theta\cos 2\theta\cos 2^2\theta\cdots\cos 2^{n-1}\theta = 1$, যদি $(2^n+1)\theta=\pi$ হয়।

(*vi*) $\cos(\pi/17)\cos(2\pi/17)\cos(4\pi/17)\cos(8\pi/17)=1/16$.

(*vii*) $\cos(\pi/15)\cos(2\pi/15)\cos(3\pi/15)\cos(4\pi/15)\cdots\cos(7\pi/15) = 1/2^7$.

(*viii*) $\cos(\pi/11)\cos(2\pi/11)\cos(3\pi/11)\cos(4\pi/11)\cos(5\pi/11) = 1/2^5$.

(*ix*) $\sin(\pi/5)\sin(2\pi/5)\sin(3\pi/5)\sin(4\pi/5)=5/16$.

[**সমাধান :**

(*i*) $\sin 8x = 2\sin 4x\cos 4x = 2(2\sin 2x\cos 2x)\cos 2^2x$
$= 2^2(2\sin x\cos x)\cos 2x\cos 2^2x$
$= 2^3\sin x\cos x\cos 2x\cos 2^2x$.

(*ii*) $\sin x = 2\sin\frac{1}{2}x.\cos\frac{1}{2}x$,
$\sin\frac{1}{2}x = 2\sin\frac{1}{2^2}x\cos\frac{1}{2^2}x$; ইত্যাদি।

(*iii*) (*i*) এর ক্ষেত্রে যেমন, অথবা (*ii*) এর সাহায্য লইয়া পাওয়া যায়
$\sin 2^4x = 2^4\sin x\cos x\cos 2x\cos 2^2x\cos 2^3x$.

এখন যদি $x=\pi(2^4-1)$ ধরা হয়, তাহা হইলে $x=\pi/15$; সুতরাং

$$2^4\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15} = \frac{\sin(16\pi/15)}{\sin(\pi/15)}$$
$$= \frac{\sin(\pi+\pi/15)}{\sin(\pi/15)} = -1$$; ইহা হইতে নির্ণেয় সম্পর্কটি পাওয়া যাইবে।

(*iv*) সাধারণভাবে,
$\sin 2^n\theta = 2^n\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 2^2\theta\cdots\cos 2^{n-1}\theta$,

বা, $2^n\cos\theta\cos 2\theta\cos 2^2\theta\cdots\cos 2^{n-1}\theta = \sin(2^n\theta)/\sin\theta$
$= \sin(\pi+\theta)/\sin\theta = -1$, কারণ $(2^n-1)\theta=\pi$.

(*vii*) ধরা যাক্ $\theta=\pi/15$, তাহা হইলে $15\theta=\pi$; এখন বিবেচনা করা যাক্

$$\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 3\theta\cos 4\theta\cos 5\theta\cos 6\theta\cos 7\theta$$
$$= \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\cos 2\theta\cos 3\theta\cdots\cos 7\theta$$
$$= (1/2^2)\sin 4\theta\cos 4\theta\cos 3\theta\cos 5\theta\cos 6\theta\cos 7\theta$$
$$= (1/2^3)\sin 8\theta\cos 7\theta\cos 3\theta\cos 5\theta\cos 6\theta$$
$$= (1/2^3)\sin 7\theta\cos 7\theta\cos 3\theta\cos 5\theta\cos 6\theta \quad [\because 8\theta=\pi-7\theta]$$
$$= (1/2^4)\sin 14\theta\cos 3\theta\cos 5\theta\cos 6\theta$$
$$= (1/2^4)\sin\theta\cos 3\theta\cos 5\theta\cos 6\theta \quad [\because 14\theta=\pi-\theta]$$

এখন ধরা যাক্ $x=\cos\theta\cos 2\theta\cos 3\theta\cos 4\theta\cos 5\theta\cos 6\theta\cos 7\theta$; তাহা হইলে

$$\begin{aligned}\text{L. H. S} = x &= (1/2^4)\cos 3\theta\cos 5\theta\cos 6\theta\\ &= (1/2^5\sin 3\theta)\sin 6\theta\cos 6\theta\cos 5\theta\\ &= (1/2^6\sin 3\theta)\sin 12\theta\cos 5\theta\\ &= (1/2^6\sin 3\theta)\sin 3\theta\cos 5\theta \qquad [\because 12\theta=\pi-3\theta]\\ &= \frac{1}{2^6}\cos 5\theta=\frac{1}{2^6}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2^7}.\ ]\end{aligned}$$

27. $(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=2\cos 2\theta+1$ ইত্যাদি, ইহার সাহায্য লইয়া প্রমাণ কর যে

$$2\cos 2^n\theta+1=(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)(2\cos 2\theta-1)(2\cos 2^2\theta-1)\cdots(2\cos 2^{n-1}\theta-1)$$

28. $\tan\theta(1+\sec 2\theta)=\tan 2\theta$, ইহার প্রয়োগ দ্বারা দেখাও যে

$$\tan 2^n\theta=\tan\theta(1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)(1+\sec 2^3\theta)\cdots(1+\sec 2^n\theta)$$

6·4. ত্রিকোণমিতিক অভেদ (Trigonometrical Identities)

এই বিভাগে যে সমস্ত ক্ষেত্রে সংশ্লিষ্ট কোণগুলি প্রদত্ত কোন সম্পর্ক দ্বারা যুক্ত থাকে এবং সংশ্লিষ্ট অপেক্ষকগুলি সংজ্ঞাত, সেই সমস্ত ক্ষেত্র-সম্পর্কিত ত্রিকোণমিতিক অভেদের বিষয়ে আলোচনা করা হইবে। এই অভেদগুলির মধ্যে সর্বাপেক্ষা প্রয়োজনীয় হইল সেইগুলি যাহাদের ক্ষেত্রে তিনটি কোণের মধ্যে এইরূপ সম্পর্ক বিদ্যমান যে উহাদের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান। সর্বপ্রথমে এমন কয়েকটি অভেদ প্রমাণ করা যাক্ যাহাদের প্রায়ই প্রয়োগ করা হইবে।

উদাহরণ 1. যদি $A+B+C=\pi$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$$

$$\begin{aligned}\text{L.H.S.} &= (\sin 2A+\sin 2B)+\sin 2C\\ &= 2\sin(A+B)\cos(A-B)+\sin 2C\\ &\qquad [A+B+C=\pi,\ \sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C]\\ &= 2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C\\ &= 2\sin C\{\cos(A-B)+\cos C\}\\ &\qquad [C=\pi-(A+B),\ \cos C=\cos\{\pi-(A+B)\}=-\cos(A+B)]\\ &= 2\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}\\ &= 2\sin C(\cos A\cos B+\sin A\sin B-\cos A\cos B+\sin A\sin B)\\ &= 4\sin A\sin B\sin C=\text{R.H.S.}\end{aligned}$$

উদাহরণ 2. যদি A, B, C কোন ত্রিভুজের কোণ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-4\cos A\cos B\cos C-1$.

$$\text{L.H.S.} = (\cos 2A + \cos 2B) + \cos 2C$$
$$= 2\cos(A+B)\cos(A-B) + \cos 2C$$
$$[\cos(A+B) = \cos(\pi - C) = -\cos C]$$
$$= -2\cos C\cos(A-B) + 2\cos^2 C - 1$$
$$= -1 - 2\cos C\{\cos(A-B) - \cos C\}$$
[ইতিপূর্বে দেখান হইয়াছে যে $\cos(A+B) = -\cos C$]
$$= -1 - 2\cos C\{\cos(A-B) + \cos(A+B)\}$$
$$= -1 - 2\cos C . 2\cos A\cos B = \text{R.H.S.}$$

উদাহরণ 3. যদি $A+B+C=\pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C.$$

$$\text{L.H.S.} = \tfrac{1}{2}\{(1+\cos 2A) + (1+\cos 2B) + (1+\cos 2C)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{3 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C\}$$ [উদাহরণ 2 এর সাহায্যে]
$$= \tfrac{1}{2}\{3 - 1 - 4\cos A\cos B\cos C\}$$
$$= 1 - 2\cos A\cos B\cos C.$$

উদাহরণ 4. যদি $A+B+C=\pi$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$$

$$\text{L.H.S.} = \tfrac{1}{2}\{(1-\cos 2A) + (1-\cos 2B) + (1-\cos 2C)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{3 - (\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C)\}$$ [উদাহরণ 2 এর সাহায্যে]
$$= \tfrac{1}{2}\{3 + 1 + 4\cos A\cos B\cos C\} = \text{R.H.S.}$$

উদাহরণ 5. A, B, C কোন সামতলিক ত্রিভুজের কোণ হইলে প্রমাণ কর যে

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos \tfrac{1}{2}A\cos \tfrac{1}{2}B\cos \tfrac{1}{2}C$$

$$\text{L.H.S.} = (\sin A + \sin B) + \sin C$$
$$= 2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B) + \sin C$$
$$[A+B+C=\pi,\ \tfrac{1}{2}(A+B) = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}C,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B) = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}C) = \cos\tfrac{1}{2}C\ ]$$
$$= 2\cos\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}(A-B) + 2\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C$$
$$= 2\cos\tfrac{1}{2}C\{\cos\tfrac{1}{2}(A-B) + \sin\tfrac{1}{2}C\}$$
$$[\sin\tfrac{1}{2}C = \sin\{\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}(A+B)\} = \cos\tfrac{1}{2}(A+B)]$$
$$= 2\cos\tfrac{1}{2}C\{\cos\tfrac{1}{2}(A-B) + \cos\tfrac{1}{2}(A+B)\}$$
$$= 2\cos\tfrac{1}{2}C . 2\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B$$
$$= 4\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C = \text{R.H.S.}$$

উদাহরণ 6. যদি $A+B+C=\pi$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin \tfrac{1}{2}A\sin \tfrac{1}{2}B\sin \tfrac{1}{2}C$$

$\text{L.H.S.}=(\cos A+\cos B)+\cos C$

$=2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)+\cos C$

$[\cos\frac{1}{2}(A+B)=\cos(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}C)=\sin\frac{1}{2}C]$

$=2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(A-B)+1-2\sin^2\frac{1}{2}C$

$=1+2\sin\frac{1}{2}C\{\cos\frac{1}{2}(A-B)-\sin\frac{1}{2}C\}$

[ইতিপূর্বে দেখান হইয়াছে যে $\sin\frac{1}{2}C=\cos\frac{1}{2}(A+B)$]

$=1+2\sin\frac{1}{2}C\{\cos\frac{1}{2}(A-B)-\cos\frac{1}{2}(A+B)\}$

$=1+2\sin\frac{1}{2}C.2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B=\text{R H.S.}$

উদাহরণ 7. যখন $A+B+C=\pi$, তখন প্রমাণ কর যে

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$$

$\because\ \tan(B+C)=\tan(\pi-A)=-\tan A$

$\therefore\ \dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=-\tan A$

বা, $\tan B+\tan C=-\tan A+\tan A\tan B\tan C$;

ইহা হইতে নির্ণেয় সম্পর্ক পাওয়া যায়।

বিকল্প পদ্ধতি :

$\tan(A+B+C)=\tan\pi=0$

বা, $\dfrac{\tan A+\tan B\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}=0$

$\therefore\ \tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C=0$, ইত্যাদি।

অনুসিদ্ধান্ত : প্রাপ্ত ফলকে $\cot A\cot B\cot C$ দ্বারা গুণ করিলে পাওয়া যায়

$$\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1.$$

উদাহরণ 8. যদি $A+B+C=\pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\tan\tfrac{1}{2}B\tan\tfrac{1}{2}C+\tan\tfrac{1}{2}C\tan\tfrac{1}{2}A+\tan\tfrac{1}{2}A\tan\tfrac{1}{2}B=1.$$

প্রদত্ত শর্ত হইতে পাওয়া যায়,

$\tan(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C)=\tan(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}A)=\cot\frac{1}{2}A$

বা, $\dfrac{\tan\frac{1}{2}B+\tan\frac{1}{2}C}{1-\tan\frac{1}{2}B\tan\frac{1}{2}C}=\dfrac{1}{\tan\frac{1}{2}A}$;

ইহা হইতে নির্ণেয় সম্পর্কটি পাওয়া যায়।

বিকল্প পদ্ধতি :

$\cot(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C)=\cot\frac{1}{2}\pi=0$

বা, $\dfrac{1-\tan\frac{1}{2}B\tan\frac{1}{2}C-\tan\frac{1}{2}C\tan\frac{1}{2}A-\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}B}{\tan\frac{1}{2}A+\tan\frac{1}{2}B+\tan\frac{1}{2}C-\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}B\tan\frac{1}{2}C}=0$ ইত্যাদি।

উদাহরণ 9. যদি $A+B+C=\pi$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=1+4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}$$

$$\text{R.H.S.}=1+2\sin\frac{\pi-A}{4}\left(2\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}\right)$$

$$=1+2\sin\frac{\pi-A}{4}\left\{\cos\frac{B-C}{4}-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B+C}{4}\right)\right\}$$

$$=1+2\sin\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{B-C}{4}-2\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{B+C}{4}$$

$$=1+\sin\frac{\pi-A+B-C}{4}+\sin\frac{\pi-A-B+C}{4}+$$

$$+\cos\frac{\pi-A+B+C}{4}-\cos\frac{\pi-A-B-C}{4}$$

$$[\pi=A+B+C]$$

$$=1+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)-\cos 0$$

$$=\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}.$$

উদাহরণ 10. দেখাও যে $A+B+C=\pi$ হইলে,

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$$

$$\text{R.H.S.}=2\cos\tfrac{1}{4}(\pi-A)\{\cos\tfrac{1}{4}(2\pi-B-C)+\cos\tfrac{1}{4}(B-C)\}$$

$$=2\cos\tfrac{1}{4}(\pi-A)\{\cos\tfrac{1}{4}(\pi+A)+\cos\tfrac{1}{4}(B-C)\}$$

$$=2\cos\tfrac{1}{4}(\pi-A)\cos\tfrac{1}{4}(\pi+A)+2\cos\tfrac{1}{4}(\pi-A)\cos\tfrac{1}{4}(B-C)$$

$$=\cos\tfrac{1}{2}\pi+\cos\tfrac{1}{2}A+2\cos\tfrac{1}{4}(B+C)\cos\tfrac{1}{4}(B-C)$$

$$=\cos\tfrac{1}{2}A+\cos\tfrac{1}{2}B+\cos\tfrac{1}{2}C=\text{L.H.S.}$$

প্রশ্নমালা VI(B)

[নিম্নের প্রশ্নগুলিতে ধরিয়া লও যে অপেক্ষকগুলি বিদ্যমান এবং হরগুলি শূন্য নহে।]

যদি $A+B+C=\pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে (1 হইতে 16 পর্যন্ত)

1. $\sin 2B+\sin 2C-\sin 2A=4\sin A\cos B\cos C$.
2. $\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C=1-4\sin A\sin B\cos C$.
3. $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C$.
4. $\cos A+\cos B-\cos C=4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C-1$.
5. $\dfrac{\sin B+\sin C-\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C}=\tan\frac{1}{2}B\tan\frac{1}{2}C$.

6. $\dfrac{1+\cos A-\cos B+\cos C}{1+\cos A+\cos B-\cos C}=\tan \frac{1}{2}B \cot \frac{1}{2} C.$

7. $\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C=1-2 \sin A \sin B \cos C.$

8. $\cos^2 2A+\cos^2 2B+\cos^2 2C=1+2 \cos 2A \cos 2B \cos 2C.$

9. $\dfrac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin A+\sin B+\sin C}=8 \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C.$

10. $\dfrac{\cos A}{\sin B \sin C}+\dfrac{\cos B}{\sin C \sin A}+\dfrac{\cos C}{\sin A \sin B}=2.$

11. $\sin (B+C-A)+\sin (C+A-B)+\sin (A+B-C)$
$=4 \sin A \sin B \sin C.$

12. $\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A \tan 2B \tan 2C.$

13. $\cot B \cot C+\cot C \cot A+\cot A \cot B=1.$

14. $\cot \frac{1}{2}A+\cot \frac{1}{2}B+\cot \frac{1}{2}C=\cot \frac{1}{2}A \cot \frac{1}{2}B \cot \frac{1}{2}C.$

15. $(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)(\cot A+\cot B)$
$=\operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C.$

16. $\sin^2 \frac{1}{2}A+\sin^2 \frac{1}{2}B+\sin^2 \frac{1}{2}C=1-2 \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C.$

17. যদি $A+B+C=\frac{1}{2}\pi$ হয়, তবে দেখাও যে

(i) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C+2 \sin A \sin B \sin C=1.$

(ii) $\cos (A-B-C)+\cos (B-C-A)+\cos (C-A-B)$
$=4 \cos A \cos B \cos C.$

(iii) $\dfrac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C}=\cot A \cot B.$

(iv) $\tan B \tan C+\tan C \tan A+\tan A \tan B=1.$

(v) $\cot A+\cot B+\cot C=\cot A \cot B \cot C.$

[**সমাধান :** (i) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$
$=\frac{1}{2}(2-\cos 2A-\cos 2B)+\sin^2 C$
$=1-\frac{1}{2} (\cos 2A+\cos 2B)+\sin^2 C$
$=1-\cos (A+B) \cos (A-B)+\sin^2 C$
$=1-\sin C \cos (A-B)+\sin^2 C$
$[\because \cos (A+B)=\cos (\frac{1}{2}\pi-C)=\sin C]$
$=1+\sin C \{\sin C-\cos (A-B)\}$
$=1+\sin C \{\cos(A+B)-\cos (A-B)\}$
$=1-2 \sin A \sin B \sin C$ ইত্যাদি।]

18. যদি $A+B+C=0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

(i) $\cos A+\cos B+\cos C+1=4 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C$

(ii) $\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C=-1-2 \cos A \sin B \sin C.$

[**সমাধান :** (*ii*) $L.H.S = \cos^2 A - \frac{1}{2}(2 + \cos 2B + \cos 2C)$

$= -1 - \cos(B+C)\cos(B-C) + \cos^2 A$

$= -1 - \cos A \cos(B-C) + \cos^2 A \; (\because B + C = -A)$

$= -1 + \cos A \{\cos A - \cos(B-C)\}$

$= -1 + \cos A \{\cos(B+C) - \cos(B-C)\}$

$= -1 - 2 \sin B \sin C \cos A$]

19. যদি $A+B+C=2\pi$ হয়, তবে দেখাও যে

(*i*) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 + 2\cos A \cos B \cos C.$

(*ii*) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$

20. যদি $\alpha = \beta + \gamma$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

(*i*) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 + 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma.$

(*ii*) $\sin(\alpha+\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin(\alpha-\beta+\gamma) = 4\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

21. যদি $x+y+z=xyz$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

(*i*) $\dfrac{2x}{1-x^2} + \dfrac{2y}{1-y^2} + \dfrac{2z}{1-z^2} = \dfrac{2x}{1-x^2} \cdot \dfrac{2y}{1-y^2} \cdot \dfrac{2z}{1-z^2}.$

(*ii*) $x(1-y^2)(1-z^2) + y(1-z^2)(1-x^2) + z(1-x^2)(1-y^2) = 4xyz.$

(*iii*) $\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2} + \dfrac{3y-y^3}{1-3y^2} + \dfrac{3z-z^3}{1-3z^2} = \dfrac{3x-x^3}{1-3x^2} \cdot \dfrac{3y-y^3}{1-3y^2} \cdot \dfrac{3z-z^3}{1-3z^2}.$

[**সমাধান :** (*iii*) ধরা হইল $x = \tan A$, $y = \tan B$, $x = \tan C$, তাহা হইলে

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

বা, $\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C = 0$

বা, $\tan(A+B+C) = 0$, বা, $A+B+C = n\pi$, যেখানে n অখণ্ড সংখ্যা বা 0.

এখন, $3A + 3B + 3C = 3n\pi$, যেখানে n অখণ্ড সংখ্যা বা 0 ; ইহা হইতে পূর্বের ন্যায় পাওয়া যায়।

$\tan 3A + \tan 3B + \tan 3C = \tan 3A \tan 3B \tan 3C$, ইত্যাদি।]

বিবিধ প্রশ্নমালা I

1. $\sin\alpha = \cos 2\beta$ এবং $\alpha - \beta = 15^\circ$ হইলে α এবং βর ধনাত্মক সূক্ষ্ম মান নির্ণয় কর। [উঃ $\alpha = 40^\circ, \beta = 25^\circ$]

2. 290 সে.মি. দীর্ঘ একটি মই হেলান অবস্থায় ভূমি হইতে 210 সে.মি. উর্ধ্বে অবস্থিত একটি জানালা পর্যন্ত পৌঁছায়। মইটি ভূমির সহিত যে কোণ করে তাহার কোসাইন এবং কোসিক্যান্ট নির্ণয় কর। [উঃ 20/29, 29/21]

3. নিম্নের উক্তিগুলির মধ্যে কোন্‌গুলি সম্ভব এবং কোন্‌গুলি অসম্ভব ?

(*i*) $20\sin\theta = 1$, (*ii*) $50\sin 12\theta = -1$, (*iii*) $5\sec\theta = 1$, (*iv*) $20\tan\theta = 7$. [উঃ কেবল (iii) অসম্ভব]

4. 600 সে.মি. উচ্চ একটি চিমনির ছায়া যখন $600\sqrt{3}$ সে.মি. দীর্ঘ, তখন সূর্যের উন্নতি কোণ কত? [উঃ 30°]

5. কোন ত্রিভুজের একটি কোণ 45° এবং অপর একটি কোণ $5\pi/8$; তৃতীয় কোণটির ষষ্টীমূলক এবং বৃত্তমূলক মান নির্ণয় কর। [উঃ $22\frac{1}{2}°$, $\pi/8$.]

6. কোন বৃক্ষের শীর্ষের উন্নতিকোণ 30° এবং উহার অভিমুখে 20 মিটার অগ্রসর হইবার পর ঐ উন্নতিকোণ 60° হয়; বৃক্ষটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

[উঃ 17·32 মি. (প্রায়)]

7. দেখাও যে $\sin^3 60° \cot 30° - 2\sec^2 45° + 3\cos 60° \tan 45° - \tan^2 60° = -35/8$.

8. 200 মিটার উচ্চ কোন পর্বতচূড়া হইতে উহার পূর্বদিকে অবস্থিত দুইটি নৌকার অবনতি কোণ যথাক্রমে 34°30′ এবং 18°40′; নৌকা দুইটির মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর। [প্রদত্ত: $\cot 34°30' = 1·455$ এবং $\cot 18°40' = 2·96$.]

[উঃ 301 মি.]

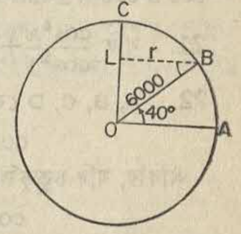
9. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি 40 সে.মি. এবং ভূমিসংলগ্ন একটি কোণ 70° হইলে উহার পরিসীমা নির্ণয় কর। [ধরিয়া লও $\sec 70° = 2·9$.]

[উঃ 156 সে.মি.]

10. পৃথিবীকে 6000 কি. মি. ব্যাসার্ধের একটি গোলকরূপে বিবেচনা করিয়া উহার 40তম সমান্তরাল অক্ষাংশের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

[প্রদত্ত: $\cos 40° = 0·766$]

[**সমাধান:** সমকোণী ত্রিভুজ OLB এর মধ্যে $\angle OBL = 40°$ এবং $OB = 6000$; তাহা হইলে $\cos\angle OBL = LB/OB$, বা, r = 40তম সমান্তরাল অক্ষাংশের ব্যাসার্ধ $= LB = 6000 \cos 40° = 6000 \times 0·766 = 4596$ কি.মি.।]



চিত্র 6.1

11. যদি θ দ্বিতীয় পাদতে অবস্থিত এইরূপ একটি কোণ হয় যে $\tan\theta = -2/3$, তবে দেখাও যে

$$\frac{\tan(90°+\theta)+\cos(180°+\theta)}{\sin(270°-\theta)-\cot(-\theta)} = \frac{2+\sqrt{13}}{2-\sqrt{13}}.$$

12. $\tan\theta = -4/3$ হইলে $\dfrac{\sin\theta + \cos\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

[উঃ দ্বিতীয় পাদতে, 23/5; চতুর্থ পাদতে, 34/35.]

13. প্রমাণ কর যে θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হইলে $\sin\theta\tan\theta$, $2(1-\cos\theta)$ অপেক্ষা বৃহত্তর। θ যে সূক্ষ্মকোণ হওয়া আবশ্যক এই তথ্যটি উত্তরের যে অংশে প্রয়োগ করিয়াছ তাহা নির্দেশ করিয়া দেখাও।

14. যদি $\sin\theta + \operatorname{cosec}\theta = 2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\sin^5\theta + \operatorname{cosec}^5\theta = 2$.

15. দেখাও যে

$$\frac{\sin(270^\circ+\theta)\cos^3(720^\circ-\theta)-\sin(270^\circ-\theta)\sin^3(540^\circ+\theta)}{\sin(90^\circ+\theta)\sin(-\theta)-\cos^2(180^\circ-\theta)}+\frac{\cot(270^\circ-\theta)}{\operatorname{cosec}^2(450^\circ+\theta)}=1,$$

যেখানে θ এমন কোণ যে রাশিটির অন্তর্গত কোন ভগ্নাংশের হরই শূন্য হয় না।

16. দেখাও যে $\cos^2 A+\cos^2(A+B)+2\cos A\cos(180^\circ+B)\cos(360^\circ+A+B)$ এর সরলীকৃত মান A বর্জিত। ইহা হইতে $B=810^\circ$ হইলে রাশিটির মান নির্ণয় কর। [উঃ 1]

17. যদি $(1+\cos x)(1+\cos y)(1+\cos z)=(1-\cos x)(1-\cos y)(1-\cos z)$ হয়, তবে দেখাও যে প্রত্যেক পক্ষের মান $\pm\sin x\sin y\sin z$ এর সমান।

18. প্রমাণ কর যে $3\sin^4 A-2\sin^6 A$ এবং $2\cos^6 A-3\cos^4 A$ এর অন্তর A বর্জিত।

19. দেখাও যে $\tan\theta$ এবং $\sin 2\theta$ এর চিহ্ন সর্বদা একই প্রকার।

20. যদি $\sec x=\sec y\sec z+\tan y\tan z$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\sec y=\sec z\sec x\pm\tan z\tan x$.

21. যদি $\frac{\cos^4 x}{\cos^2 y}+\frac{\sin^4 x}{\sin^2 y}=1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\frac{\cos^4 y}{\cos^2 x}+\frac{\sin^4 y}{\sin^2 x}=1.$

22. A, B, C, D কোন চতুর্ভুজের কোণ হইলে দেখাও যে

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+C)+\cos\tfrac{1}{2}(B+D)=0.$$

আবার, যদি চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\cos A+\cos B+\cos C+\cos D=0.$$

23. যদি $\cos(y-z)+\cos(z-x)+\cos(x-y)=-3/2$ হয়, তবে দেখাও যে $\cos x+\cos y+\cos z=0=\sin x+\sin y+\sin z.$

24. যদি কোন সমকোণকে A, B, C এই তিন অংশে বিভক্ত করা হইয়া থাকে, তবে প্রমাণ কর যে

$$\tan A=\frac{1-\tan B\tan C}{\tan B+\tan C}.$$

25. যদি $\sqrt{2}\cos A=\cos B+\cos^3 B$, $\sqrt{2}\sin A=\sin B-\sin^3 B$ এবং A ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $3\sin(A-B)=-1.$

26. $11\theta=\pi$ হইলে, দেখাও যে $\cos\theta\cos 2\theta\cos 3\theta\cos 4\theta\cos 5\theta=1/32.$

27. যদি $\cot^2\theta=\cot(\theta-\alpha)\cot(\theta-\beta)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\cot 2\theta=\frac{1}{2}(\cot\alpha+\cot\beta).$

28. যদি $A+B=\frac{1}{4}\pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $(1+\tan A)(1+\tan B)=2$.

29. যদি A, B, C, D কোন চতুর্ভুজের কোণ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\tan A+\tan B+\tan C+\tan D$$
$$=\tan A \tan B \tan C \tan D\ (\cot A+\cot B+\cot C+\cot D).$$

30. যদি $\tan x=(1-\cos y)/\sin y$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে ইহার একটি সমাধান হইবে $y=2x$; ইহার সাহায্য লইয়া প্রমাণ কর যে

$$\tan 7\tfrac{1}{2}^\circ=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2.$$

31. প্রমাণ কর যে

$$\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cot\theta}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right).$$

32. প্রদত্ত $x=\cos 55^\circ$, $y=\cos 65^\circ$ এবং $z=\cos 175^\circ$; প্রমাণ কর (তালিকার সাহায্য না লইয়া) যে

$$x+y+z=0 \text{ এবং } xy+yz+zx=-3/4.$$

33. দেখাও যে $\tan 6^\circ \tan 42^\circ \tan 66^\circ \tan 78^\circ=1$.

34. সরল ও সমান্তরাল তীরযুক্ত কোন ক্ষুদ্র নদীর AB তীরস্থ বিন্দু A তে দণ্ডায়মান এক ব্যক্তি লক্ষ্য করিলেন যে A এবং বিপরীত তীরে অবস্থিত কোন বিন্দু C এর সংযোজক রেখা ABর সহিত 30° কোণ উৎপন্ন করে। তিনি এখন তীর বরাবর 200 মিটার যাইয়া B তে পৌছাইলেন ও দেখিলেন যে BC রেখা BA রেখার সহিত 60° কোণ করে। দেখাও যে নদীটির পরিসর হইল $50\sqrt{3}$ মিটার, এবং উহার আসন্ন তুল্যমান 86·6 মিটার।

7

ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ ঃ সাধারণ মান

(Trigonometrical equations : General values)

7·1. সূচনা

ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় শুরু করার পূর্বে নিম্নে প্রদত্ত তিন প্রকার উক্তি পরীক্ষা করা যাক্—এ-বিষয়ে পূর্ববর্তী অধ্যায়গুলিতে ইতিপূর্বে আলোচনা করা হইয়াছে। প্রসঙ্গত স্মরণ রাখিতে হইবে যে আলোচনা কেবল বাস্তব সংখ্যাতে সীমাবদ্ধ থাকিবে।

$\cos x \sec x=1$, এই আকারের উক্তি x এর এমন প্রত্যেক মানের জন্যই সত্য যে মানগুলির ক্ষেত্রে $\cos x$ এবং $\sec x$ সংজ্ঞাত (defined)। ইহাকে অভেদ (identity) অথবা অভেদমূলক সমীকরণ (an identical equation) বলা হইয়া থাকে। আর এক প্রকারের উক্তি, যথা—

$$\sin x=2$$

x এর কোন মানের ক্ষেত্রেই সত্য নহে। যদি এই সমীকরণ সমাধান করিতে বলা হয় তবে উত্তর হইবে যে ইহার কোন সমাধান নাই, কারণ কোন কোণের সাইন অনুপাত 1 অপেক্ষা কখনও বৃহত্তর হয় না। এক্ষেত্রে উক্তিটি সম্পর্কে কোন মন্তব্য করিতে হইলে বলিতে হইবে যে উক্তিটি প্রদত্ত যুক্তি অনুসারে সত্য নহে। তৃতীয় আকারের উক্তি, যথা—

$$\sin x=0$$

$x=0$, $x=\pi$ এবং x এর আরও অনেক মানের ক্ষেত্রে সত্য, কিন্তু $x=\frac{1}{2}\pi$ বা $x=\frac{1}{3}\pi$ এর ক্ষেত্রে সত্য নহে। উক্তিটি x এর কেবল **বিশেষ বিশেষ মানের** ক্ষেত্রেই সত্য এবং ইহাকে শর্তাধীন সমীকরণ (conditional equation) বলা হইবে। এই অধ্যায়ে সমীকরণ বলিতে কেবল এইরূপ শর্তাধীন সমীকরণকে বুঝাইবে। ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের **সমাধানের** অর্থ, সম্ভাব্য এইরূপ সকল কোণ নির্ণয় করা যেগুলি সমীকরণটিকে সিদ্ধ করিবে। অজ্ঞাত কোণের যে মানগুলি কোন সমীকরণকে সিদ্ধ করে তাহাদের সমীকরণটির বীজ (roots) বলা হয়।

7·2. বিশেষ সমাধান (Particular solution)

কতিপয় উদাহরণ এখন পর্যালোচনা করা যাক্—বিষয়টির পরবর্তী অগ্রগতির জন্য, বিশেষত পরবর্তী অধ্যায়ের প্রসঙ্গে এইগুলির প্রয়োজন হইবে।

1. নিম্নে প্রদত্ত প্রতিটি সমীকরণ সমাধানপূর্বক x নির্ণয় কর, যেখানে $-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2$:

(*i*) $\sin x=-1$; (*ii*) $\sin x=1$; (*iii*) $\sin x=0$;
(*iv*) $\sin x=1/2$; (*v*) $\sin \quad -1/\sqrt{2}$; (*vi*) $\sin x=\sqrt{3}/2$.

সমাধানগুলি অবশ্যই (*i*) $x=-\pi/2$; (*ii*) $x=\pi/2$; (*iii*) $x=0$; (*iv*) $x=\pi/6$; (*v*) $x=-\pi/4$; (*vi*) $x=\pi/3$.

2. $0 \leqslant x \leqslant \pi$ এই বিষমীকরণকে x সিদ্ধ করিলে প্রতিক্ষেত্রে x নির্ণয় কর যখন

(*i*) $\cos x=1$; (*ii*) $\cos x=-1$; (*iii*) $\cos x=0$;
(*iv*) $\cos x=-\frac{1}{2}$; (*v*) $\cos x=-\sqrt{3}/2$; (*vi*) $\cos x=-1\sqrt{2}$.

সমাধানগুলি : $x=$(*i*) 0 ; (*ii*) π ; (*iii*) $\pi/2$; (*iv*) $2\pi/3$; (*v*) $5\pi/6$; (*vi*) $3\pi/4$.

3. $-\pi/2<x<\pi/2$ এই পরিপ্রেক্ষিতে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান করিয়া x নির্ণয় কর :

(*i*) $\tan x=0$; (*ii*) $\tan x=1$; (*iii*) $\tan x=-1$;
(*iv*) $\tan x=1/\sqrt{3}$; (*v*) $\tan x=-\sqrt{3}$; (*vi*) $\tan x=-1/\sqrt{3}$.

x এর মানগুলি : (*i*) 0 ; (*ii*) $\pi/4$; (*iii*) $-\pi/4$; (*iv*) $\pi/6$; (*v*) $-\pi/3$; (*vi*) $-\pi/6$.

উপরের উদাহরণগুলি হইতে ইহা সুস্পষ্ট যে প্রতিটি সমীকরণ সমাধান করিয়া x এর একটি অনন্য (unique) মান পাওয়া যায়। অনুরূপভাবে, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ এবং $x \neq \frac{\pi}{2}$ এই নির্দিষ্ট শর্তসাপেক্ষে $\sec x=k$ (যেখানে $k \geqslant 1$ অথবা $k \leqslant -1$) সমীকরণ সমাধানপূর্বক x এর একটি একক মান পাওয়া যাইতে পারে। একইভাবে বলা যায় যে $\operatorname{cosec} x=k$ (যখন $|k| \geqslant 1$) এই সমীকরণের একটি অনন্য সমাধান (অর্থাৎ x এর মান) বিদ্যমান হইবে, যদি x কে $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$ এবং $x \neq 0$ এই শর্তের অধীন রাখা হয়। আবার $\cot x$ এর ক্ষেত্রে এইরূপ অনন্য মান পাওয়া সম্ভব হইবে যদি x কে 0 (শূন্য) ব্যতিরেকে $-\pi/2$ এবং $\pi/2$ এই মানদ্বয়ের মধ্যে সীমাবদ্ধ রাখা হয়।

ছাত্রছাত্রীরা এই মানগুলির সহিত ইতিপূর্বেই পরিচিত হইয়াছে। এখন এই মান সম্পর্কে ধারণাটিকে আরও বিস্তৃত করা হইবে যাহাতে x অনিয়ন্ত্রিত হইলে উহার সম্ভাব্য অন্যান্য মানও অন্তর্ভুক্ত করা যায়।

7·3. $\sin x=0$, $\cos x=0$, $\tan x=0$ প্রভৃতির সাধারণ সমাধান

$\sin x=0$ হইলে x এর সাধারণ মান

1-এ দেখা গিয়াছে যে $\sin 0=0$, সুতরাং $x=0$, আবার যেহেতু $\sin \pi=0$, তাহা হইলে $x=\pi$; পুনরায় $\sin(x+n.2\pi)=\sin x$, যেখানে n যে কোন অখণ্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) অথবা শূন্য, সুতরাং $\sin(\pm 2\pi+0)=0$, $\sin(\pm 2\pi+\pi)=0$ ইত্যাদি। অতএব সাধারণ সমাধানগুলি হইল

$$x=0, \pi, 2\pi, 3\pi \cdots \quad \cdots \quad \cdots, -\pi, -2\pi, -3\pi, \cdots$$

বা, $\boldsymbol{x=n\pi}$, যেখানে n হইল ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা বা শূন্য।

বিকল্প পদ্ধতি :

সংজ্ঞা অনুসারে, $\sin x =$ লম্ব/রেডিয়াস-ভেক্টর ; সুতরাং $\sin x = 0$ হইলে লম্ব-দৈর্ঘ্য শূন্য এবং ইহা তখনই কেবল সম্ভব যখন x এর সীমারেখা (অর্ধরেখা) OX অথবা OX′ এর সহিত সম্পূর্ণ মিলিত হয় ; অর্থাৎ যখন

$$x = 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi,\ \cdots\cdots\cdots, \text{ বা, } x = n\pi,$$

যেখানে n শূন্যসহ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

$\cos x = 0$ এর সাধারণ সমাধান

2 এ দেখা গিয়াছে যে $\cos x = 0$ হইলে $x = \pi/2$, কারণ $\cos \pi/2 = 0$; এখন যেহেতু $\cos(\pi + \pi/2) = -\cos \pi/2 = 0$, সুতরাং $x = 3\pi/2$; কিন্তু n এর শূন্যসহ যে-কোন অখণ্ড মানের ক্ষেত্রে $\cos(x + 2n\pi) = \cos x$; সুতরাং সাধারণ সমাধানগুলি হইল

$$x = \pi/2,\ 3\pi/2,\ 5\pi/2,\ 7\pi/2,\ \cdots\cdots,\ -\pi/2,\ -3\pi/2,\ -5\pi/2\ \cdots\cdots$$

বা, $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, যেখানে n হইল ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য।

বিকল্প পদ্ধতি :

যেহেতু $\cos x =$ সন্নিহিত বাহু/রেডিয়াস-ভেক্টর, সুতরাং $\cos x = 0$ হওয়া তখনই সম্ভব যখন কেবল সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য $= 0$, অর্থাৎ যখন x এর সীমারেখা OY বা OY′ এর সহিত সম্পূর্ণরূপে মিলিত হয়, অর্থাৎ যখন

$$x = \pm\pi/2,\ \pm 3\pi/2,\ \pm 5\pi/2,\ \cdots\cdots, \text{ বা, } x = (2n+1)(\pi/2),$$

যেখানে n হইল ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য।

$\tan x = 0$, $\cot x = 0$ হইলে x এর সাধারণ মান

$\tan x = 0$, এর অর্থ $\sin x = 0$; সুতরাং

$x = n\pi$, যেখানে n ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য।

আবার $\cot x = 0$ হইবে যখন কেবল $\cos x = 0$ হইবে, সুতরাং

$x = (2n+1)(\pi/2)$, যেখানে n ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য।

বিকল্প পদ্ধতি :

$\tan x = 0$ হয় যখন লম্ব-দৈর্ঘ্য $= 0$ হয় এবং $\cot x = 0$ হয় যখন সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য $= 0$ হয়, সুতরাং x এর মান সম্পর্কে উপরে প্রদত্ত সিদ্ধান্ত সুস্পষ্ট।

টীকা। লক্ষণীয় যে $\sec x$ এবং $\operatorname{cosec} x$ কখনও শূন্য হইতে পারে না।

মন্তব্য : দেখা গেল যে প্রদত্ত কোন সমীকরণের একটি সমাধান থাকিলে সাধারণভাবে উহার সমাধানের সংখ্যা সীমাহীন।

7·4. $\sin x = k$, যেখানে $-1 \leqslant k \leqslant 1$, হইলে x এর সাধারণ মান

ধরা যাক α এমন একটি বিশেষ কোণ যেজন্য $\sin \alpha = k$ হয়। তাহা হইলে

$$\sin x = k = \sin \alpha$$

বা, $\sin x-\sin\alpha=0$

বা, $2\cos\frac{1}{2}(x+\alpha)\sin\frac{1}{2}(x-\alpha)=0.$

সুতরাং হয় $\cos\frac{1}{2}(x+\alpha)=0$ নতুবা $\sin\frac{1}{2}(x-\alpha)=0.$

এখন $\cos\frac{1}{2}(x+\alpha)=0$ হইতে পাওয়া যায়

$$\tfrac{1}{2}(x+\alpha)=(2m+1)(\pi/2),\ \text{বা},\ x=(2m+1)\pi-\alpha \quad\cdots\quad (1)$$

যেখানে m হইল ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য।

আবার $\sin\frac{1}{2}(x-\alpha)=0$ হইতে পাওয়া যায়

$$\tfrac{1}{2}(x-\alpha)=p\pi,\ \text{বা},\ x=2p\pi+\alpha \quad\cdots\quad\cdots\quad (2)$$

যেখানে p হইল ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য।

(1) ও (2) যুক্ত করিয়া সম্পূর্ণ (সাধারণ) সমাধান হইল

$$\boldsymbol{x=n\pi+(-1)^n\alpha} \quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad (3)$$

যেখানে n হইল শূন্যসহ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।

মন্তব্য : $\sin x=k(-1\leqslant k\leqslant 1)$ সমাধান করিবার সময় α কে যে-কোন একটি বিশেষ কোণ হিসাবে গ্রহণ করা হইয়াছে যাহাতে $\sin\alpha=k$ হয়। αর যে-কোন বিশেষ মানের জন্যই সাধারণ সমাধানটির সত্যতা বজায় থাকে। **কিন্তু 7·2 অনুচ্ছেদে প্রদর্শিত মানকেই αর মান হিসাবে গ্রহণ করা কার্যত উপযোগী ও সুবিধাজনক।** উদাহরণস্বরূপ বলা যায় যে sines এর ক্ষেত্রে αর এইরূপ মান লওয়াই অধিকতর বাঞ্ছনীয় যেন $-\pi/2\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$ হয়।

অনুসিদ্ধান্ত। $\operatorname{cosec} x=k$, যেখানে $|k|\geqslant 1$, এর সাধারণ সমাধান।

ধরা যাক্ α এমন একটি যে কোন বিশেষ কোণ যেন $\operatorname{cosec}\alpha=k$ হয়। (কার্যত α কে এমনভাবে নির্বাচিত করিতে হইবে যেন $-\pi/2\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$ এবং $\alpha\neq 0$ হয়)। তাহা হইলে $\operatorname{cosec} x=\operatorname{cosec}\alpha$ অর্থাৎ $\sin x=\sin\alpha$; সুতরাং

$$x=n\pi+(-1)^n\alpha,$$

যেখানে n হইল ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য।

7·5. $\cos x=k(-1\leq k\leq 1)$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

ধরা যাক α এমন একটি যে কোন বিশেষ কোণ যেন $\cos\alpha=k$ হয় (বাস্তবে α কে এমনভাবে নির্বাচিত করা সুবিধাজনক হইবে যেন $0\leq\alpha\leq\pi$ হয়)। তাহা হইলে

$$\cos x=k=\cos\alpha$$

বা, $\cos x-\cos\alpha=0$

বা, $-2\sin\frac{1}{2}(x+\alpha)\sin\frac{1}{2}(x-\alpha)=0$

সুতরাং হয় $\sin\frac{1}{2}(x+\alpha)=0$ নতুবা $\sin\frac{1}{2}(x-\alpha)=0$

এখন $\sin\frac{1}{2}(x+\alpha)=0$ হইতে পাওয়া যায়

$$\tfrac{1}{2}(x+\alpha)=m\pi,\quad\text{বা},\quad x=2m\pi-\alpha \quad\cdots\quad (1)$$

যেখানে m হইল ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য।

আবার যখন $\sin \frac{1}{2}(x-\alpha)=0$, তখন

$$\tfrac{1}{2}(x-\alpha)=p\pi, \text{ বা, } \quad x=2p\pi+\alpha \qquad \cdots \qquad (2)$$

যেখানে p হইল ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য।

(1) এবং (2) যুক্ত করিয়া পাওয়া যায়

$$x=2n\pi \pm \alpha,$$

যেখানে n হইল ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে কোন অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য।

অনুসিদ্ধান্ত। $\sec x=k$, যেখানে $|k| \geqslant 1$, এর সাধারণ সমাধান।

ধরা হইল যে α এমন একটি যে কোন বিশেষ কোণ যেন $\sec \alpha=k$ হয় (বাস্তবে α কে এমন কোণ হিসাবে গ্রহণ করা সুবিধাজনক হইবে যেন $0 \leq \alpha \leq \pi$ এবং $\alpha \neq \pi/2$ হয়)।

তাহা হইলে $\sec x=\sec \alpha$ বলিয়া $\cos x=\cos \alpha$; সুতরাং

$$x=2n\pi \pm \alpha,$$

যেখানে n হইল ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কোন অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য।

মন্তব্য : পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদের ন্যায় এক্ষেত্রেও ইহা জোরের সহিত বলা যাইতেছে যে αর যে বিশেষ মানই গ্রহণ করা হউক না কেন, $\cos x=\cos \alpha$ বা $\sec x=\sec \alpha$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান অপরিবর্তিতই থাকিবে, যদি ক্ষেত্র অনুসারে $\cos \alpha=k$ অথবা $\sec \alpha=k$ এই শর্ত সিদ্ধ হয়। কিন্তু 7·2 অনুচ্ছেদে উল্লিখিত মানের সীমার মধ্যে αর বিশেষ মানকে গ্রহণ করাই সুবিধাজনক হইবে।

7·6. $\tan x=k$, যেখানে $-\infty<k<+\infty$, এর সাধারণ সমাধান।

ধরা যাক, কোণ α এইরূপে নির্বাচিত হইল যেন $\tan \alpha=k$ হয় (কার্যত αকে এইরূপে নির্বাচন করা বাঞ্ছনীয় যেন $-\pi/2<\alpha<+\pi/2$ হয়)। তাহা হইলে

$$\tan x=k=\tan \alpha$$

$$\text{বা, } \quad \tan x-\tan \alpha=0$$

$$\text{বা, } \quad \frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}=0$$

$$\text{বা, } \quad \frac{\sin x \cos \alpha-\cos x \sin \alpha}{\cos x \cos \alpha}=0$$

$$\text{বা, } \quad \frac{\sin(x-\alpha)}{\cos x \cos \alpha}=0$$

$$\text{বা, } \quad \sec x \sec \alpha \sin(x-\alpha)=0.$$

সুতরাং, $\sin(x-\alpha)=0$, কারণ $\sec x$ এবং $\sec \alpha$ উভয়েই সংজ্ঞ (defined) এবং শূন্য নহে। অতএব, পাওয়া গেল যে

$$x-\alpha=n\pi, \text{ বা, } \quad x=n\pi+\alpha,$$

যেখানে n হইল ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য।

অনুসিদ্ধান্ত। $\cot x = k$, যেখানে k যে কোন সসীম রাশি, এর সমাধানের জন্য এমন কোণ α নির্বাচন করা হইল যেন $\cot \alpha = k$, $-\pi/2 < \alpha \leqslant \pi/2$ এবং $\alpha \neq 0$ হয়। তাহা হইলে $\cot x = \cot \alpha$, যাহা হইতে পাওয়া যায়

$$\cot x - \cot \alpha = 0$$

বা, $$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 0$$

বা, $$\frac{\cos x \sin \alpha - \sin x \cos \alpha}{\sin x \sin \alpha} = 0$$

বা, $$-\operatorname{cosec} x \operatorname{cosec} \alpha \sin(x - \alpha) = 0.$$

কিন্তু $\operatorname{cosec} x$, $\operatorname{cosec} \alpha$ কেহই শূন্য হইতে পারে না এবং উভয়েই সংজ্ঞাত; সুতরাং একমাত্র বিকল্প হইল

$\sin(x - \alpha) = 0$, যাহা হইতে পাওয়া যায়

$$x = n\pi + \alpha,$$

যেখানে n হইল ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কোন অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য।

প্রশ্নমালা VII (A)

1. নিম্নের সমীকরণগুলি সমাধান কর, যেখানে প্রতিক্ষেত্রে x, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$ এই শর্তকে সিদ্ধ করে :

(*i*) $\sin x = -1/2$. (*ii*) $\sin x = 1/\sqrt{2}$ (*iii*) $\sin x = -\sqrt{3}/2$

[উঃ (*i*) $-\pi/6$ (*ii*) $\pi/4$ (*iii*) $-\pi/3$]

2. নিম্নের প্রতিটি সমীকরণ সমাধান পূর্বক x নির্ণয় কর যেন $0 \leqslant x \leqslant \pi$ হয় :

(*i*) $\cos x = 1/2$ (*ii*) $\cos x = \sqrt{3}/2$ (*iii*) $\cos x = 1/\sqrt{2}$

[উঃ (*i*) $\pi/3$ (*ii*) $\pi/6$ (*iii*) $\pi/4$]

3. $-\pi/2 < x < \pi/2$ হইলে x নির্ণয় কর যখন

(*i*) $\tan x = -1/\sqrt{3}$ (*ii*) $\tan x = \sqrt{3}$ (*iii*) $\tan x = -1$

[উঃ (*i*) $-\pi/6$ (*ii*) $\pi/3$ (*iii*) $-\pi/4$]

4. $0 \leq x \leq \pi$ এবং $x \neq \pi/2$ এই শর্তাধীনে xকে আবদ্ধ রাখিয়া সমাধান কর :

(*i*) $\sec x = 1$ (*ii*) $\sec x = -1$ (*iii*) $\sec x = 2/\sqrt{3}$

(*iv*) $\sec x = -\sqrt{2}$ (*v*) $\sec x = \sqrt{2}$ (*vi*) $\sec x = -2$

(*vii*) $\sec x = 2$ (*viii*) $\sec x = -2/\sqrt{3}$

[উঃ (*i*) 0 (*ii*) π (*iii*) $\pi/6$ (*iv*) $3\pi/4$ (*v*) $\pi/4$ (*vi*) $2\pi/3$ (*vii*) $\pi/3$ (*viii*) $5\pi/6$]

5. যখন $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$ এবং $x \neq 0$, নিম্নে প্রতিক্ষেত্রে তখন x নির্ণয় কর :

(*i*) $\operatorname{cosec} x = 1$ (*ii*) $\operatorname{cosec} x = -1$ (*iii*) $\operatorname{cosec} x = 2$

(*vi*) $\operatorname{cosec} x = -2$ (*v*) $\operatorname{cosec} x = \sqrt{2}$ (*vi*) $\operatorname{cosec} x = -\sqrt{2}$

(*vii*) $\operatorname{cosec} x = 2/\sqrt{3}$ (*viii*) $\operatorname{cosec} x = -2/\sqrt{3}$

[উঃ (*i*) $\pi/2$ (*ii*) $-\pi/2$ (*iii*) $\pi/6$ (*iv*) $-\pi/6$ (*v*) $\pi/4$ (*vi*) $-\pi/4$ (*vii*) $\pi/3$ (*viii*) $-\pi/3$]

6. $-\pi/2 < x \leqslant \pi/2$ এই মানের সীমায় xকে আবদ্ধ রাখিয়া ও উহার শূন্য মানকে বাদ দিয়া সমাধান কর :

(i) $\cot x = 0$ (ii) $\cot x = 1$ (iii) $\cot x = -1$ (iv) $\cot x = \sqrt{3}$
(v) $\cot x = -\sqrt{3}$ (vi) $\cot x = 1/\sqrt{3}$ (vii) $\cot x = -1/\sqrt{3}$

[উঃ (i) $\pi/2$ (ii) $\pi/4$ (iii) $-\pi/4$ (iv) $\pi/6$ (v) $-\pi/6$ (vi) $\pi/3$ (vii) $-\pi/3$]

7. নিম্নের প্রতিটি সমীকরণ সমাধান পূর্বক $0 \leqslant x < 2\pi$ এই মানের সীমার অন্তর্ভুক্ত সকল x নির্ণয় কর :

(a) $\sin x = \sqrt{3}/2$ (b) $\sin 3x = -1/\sqrt{2}$ (c) $\cos x = 1/\sqrt{2}$
(d) $\cos \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$ (e) $\tan x = 0$ (f) $\tan 3x = 1$

[ইঙ্গিত : (d) যেহেতু x এর এমন মান আবশ্যক যাহাতে $0 \leqslant x < 2\pi$ হয়, সুতরাং $\frac{1}{2}x$ অবশ্যই এমন হইবে যেন $0 \leqslant \frac{1}{2}x < \pi$ হয় ; তাহা হইলে $\frac{1}{2}x = \pi/3$ অর্থাৎ $x = 2\pi/3$.

[উঃ (a) $\pi/3$, $2\pi/3$ (b) $5\pi/12$, $7\pi/12$, $13\pi/12$, $5\pi/4$, $7\pi/4$, $23\pi/12$, (c) $\pi/4$, $7\pi/4$ (e) 0, π (f) $\pi/12$, $5\pi/12$, $3\pi/4$, $13\pi/12$, $17\pi/12$, $7\pi/4$]

8. প্রতিক্ষেত্রে x এর সাধারণ মান নির্ণয় কর যাহাতে নিম্নের শর্তগুলি যথাক্রমে সিদ্ধ হয় :

(i) $\sin x = 1$ (ii) $\sin x = 1/2$ (iii) $\cos x = -1/2$ (iv) $\tan x = \sqrt{3}$
(v) $\cot x = -1$ (vi) $\sec x = 2$ (vii) $\operatorname{cosec} x = 2/\sqrt{3}$
(viii) $\sin^2 x = 1$ (ix) $\cos^2 x = 1/4$ (x) $\tan^2 x = 1/3$
(xi) $\sec^2 x = 4/3$ (xii) $\operatorname{cosec}^2 x = 4$

[ইঙ্গিত : (viii) $\sin^2 x = 1$ এর তাৎপর্য হইল $\sin x = \pm 1$, বা, $\sin x = \sin (\pm \pi/2)$ অর্থাৎ $x = n\pi + (-1)^n (\pm \pi/2)$, বা, $x = n\pi \pm \pi/2$, যেখানে n কে প্রচলিত তাৎপর্য সহকারে লওয়া হইয়াছে।
(x) $\tan x = \pm 1/\sqrt{3}$ যাহা হইতে পাওয়া যায় $\tan x = \tan(\pm \pi/6)$;
সুতরাং $x = n\pi \pm \pi/6$

[উঃ (i) $n\pi + (-1)^n(\pi/2)$ (ii) $n\pi + (-1)^n(\pi/6)$ (iii) $2n\pi \pm 2\pi/3$ (iv) $n\pi + \pi/3$ (v) $x = n\pi - \pi/4$ (vi) $2n\pi \pm \pi/3$ (vii) $n\pi + (-1)^n \pi/3$ (ix) $n\pi \pm \pi/3$ (xi) এবং (xii) $n\pi \pm \pi/6$]

9. দেখাও যে, যে সমস্ত কোণের sine এবং cosine যথাক্রমে α কোণের sine এবং cosine এর সমান তাহারা $2n\pi + \alpha$ সূত্রের অন্তর্গত। ইহা হইতে x এর সেই সাধারণ মান নির্ণয় কর যাহা নিম্নে প্রদত্ত উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করে, যথা :

$$\sin x = -\tfrac{1}{2} \text{ এবং } \cos x - \sqrt{3}/2.$$

[**সমাধান :** $n\pi + (-1)^n \alpha$ এবং $2n\pi \pm \alpha$ প্রদত্ত কোণগুলি $2n\pi + \alpha$ এর অন্তর্গত, কারণ $n\pi + (-1)^n \alpha$ এর অর্থ $2n\pi + \alpha$ এবং $(2n+1)\pi - \alpha$

দ্বিতীয় অংশের জন্য প্রথমত 0 এবং 2π এর মধ্যবর্তী কোণগুলি বিবেচনা করা যাক্। $\sin x = -1/2$ এর ক্ষেত্রে $x = 7\pi/6$ এবং $11\pi/6$, আর $\cos x = -\sqrt{3}/2$ এর ক্ষেত্রে পাওয়া যায় $x = 5\pi/6$ এবং $x = 7\pi/6$; সুতরাং 0 এবং 2π এর মধ্যবর্তী

x এর যে মান উভয় শর্তকেই সিদ্ধ করে তাহা হইল কেবল $7\pi/6$; অতএব x এর সাধারণ মান হইল $2n\pi+7\pi/6$]

10. নিম্নের প্রতিক্ষেত্রে x এর যে সাধারণ মান উভয় সমীকরকে সিদ্ধ করে তাহা নির্ণয় কর :

(*a*) $\sin x=-1/2$ এবং $\tan x=1/\sqrt{3}$

(*b*) $\cos x=-1/\sqrt{2}$ এবং $\tan x=1$

(*c*) $\cot x=-\sqrt{3}$ এবং $\operatorname{cosec} x=-2$

[উঃ (*a*) $2n\pi+7\pi/6$ (*b*) $2n\pi+5\pi/4$ (*c*) $2n\pi+11\pi/6$]

7.7. ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান প্রণালী (Procedures for solving trigonometric equations) :

ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সমাধানের কোন ধরা-বাঁধা প্রণালী নাই। ছাত্র-ছাত্রীদের সুবিধার্থে এখানে উদাহরণের আকারে কতিপয় আদর্শ পদ্ধতি প্রদত্ত হইল।

উৎপাদকে বিশ্লেষণ দ্বারা

উদা. 1. সমাধান কর : $\sin x-\sin x\cos x=0$

এখানে $\sin x(1-\cos x)=0$; সুতরাং

হয় $\sin x=0$ নতুবা $1-\cos x=0$

যখন $\sin x=0$, তখন $x=n\pi$

এবং যখন $1-\cos x=0$, তখন $\cos x=1=\cos 0$, যাহা হইতে পাওয়া যায়

$$x=2n\pi\pm 0=2n\pi$$

অতএব নির্ণেয় সমাধান হইল

$x=n\pi$ এবং $x=2n\pi$, যাহাদের যুক্ত করিয়া লেখা যায়

$x=n\pi$,

যেখানে n হইল ধন বা ঋণ অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য।

পরীক্ষা করিয়া দেখ : $x=n\pi$ এর ক্ষেত্রে $\sin x-\sin x\cos x=\sin n\pi-\sin n\pi\cos n\pi=0$.

বিভিন্ন প্রকার অপেক্ষককে একটিমাত্র অপেক্ষকের আকারে প্রকাশ দ্বারা

উদা. 2. সমাধান কর : $7\cos^2\theta+3\sin^2\theta=4$

$\sin^2\theta$র পরিবর্তে $1-\cos^2\theta$ লিখিয়া পাওয়া যায়

$$7\cos^2\theta+3(1-\cos^2\theta)=4$$

বা, $4\cos^2\theta=1$, বা, $\cos\theta=\pm\frac{1}{2}=\cos(\pi/3)$ বা $\cos(2\pi/3)$.

সুতরাং, $\theta=2n\pi\pm\pi/3$, বা, $2n\pi\pm 2\pi/3$,

যেখানে n হইল ধন বা ঋণ অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য।

যাচাই করিয়া দেখ : যখন $\theta=2n\pi\pm\pi/3$,

তখন $\cos^2\theta=\cos^2(2n\pi\ \pm\pi/3)=\frac{1}{4}$, $\sin^2\theta=3/4$;

আবার যখন $\theta=2n\pi\pm2\pi/3$, তখনও $\cos^2\theta=1/4$; $\sin^2\theta=3/4$, ইহা হইতে দেখা যায় :

$$7\cos^2\theta+3\sin^2\theta=7/4+9/4=4.$$

মন্তব্য : যাচাই করার পদ্ধতি অবলম্বন করিলে ছাত্রছাত্রীদের ভুল হইবার সম্ভাবনা থাকিবে না। উদাহরণ 3 এবং 5 এ যাচাই করার প্রয়োজনীয়তা প্রদর্শিত হইল।

উদা. 3. যদি সম্ভব হয় তবে সমাধান কর : $\sec x+\tan x=0$

এখন $\sec x+\tan x=\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}=0$,

সুতরাং $1+\sin x=0$, যদি $\cos x\neq0$ হয়।

$\cos x\neq0$ ইহা ধরিয়া লইলে,

$\sin x=-1=\sin(-\pi/2)$, যাহা হইতে পাওয়া যায়

$$x=n\pi+(-1)^n(-\pi/2),$$

যেখানে n হইল ধন বা ঋণ অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য।

কিন্তু যদি $\cos x=0$ হয়, তবে $\sec x$ এবং $\tan x$ উভয়েই অসংজ্ঞাত (undefined) হয় এবং সমীকরণটির তখন কোন সমাধান নাই।

যাচাই কর : যদি $\sec x+\tan x$ এ $x=n\pi+(-1)^n(-\pi/2)$ বসান হয় তবে দেখা যায় যে $\sec x=\sec\{n\pi+(-1)^n(-\pi/2)\}=(-1)^n\sec\{(-1)^n(-\pi/2)\}$ এবং $\tan x=\tan\{n\pi+(1)^n(-\pi/2)\}=\tan\{(-1)^n(-\pi/2)\}$,

ইহারা উভয়েই অসংজ্ঞাত (undefined) ; সুতরাং এই সিদ্ধান্ত করিতে হয় যে সমীকরণটির কোন সমাধান নাই।

একটি প্রয়োজনীয় দৃষ্টান্ত

উদা. 4. সমাধান কর : $a\cos x+b\sin x=c$, যেখানে a, b, c ধ্রুবক। যে সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রে সমীকরণটি সমাধানযোগ্য হইবে না তাহা নির্দেশ কর।

ধরা যাক্ $a=r\cos\alpha$, $b=r\sin\alpha$ (পূর্বের মত), যেখানে,

$r=+\sqrt{a^2+b^2}$, সুতরাং $\cos\alpha=a/\sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\alpha=b/\sqrt{a^2+b^2}$,

এবং $-\pi<\alpha\leq+\pi$

এখন সমীকরণটির আকার হইল নিম্নরূপ, যথা—

$$r\cos x\cos\alpha+r\sin x\sin\alpha=c$$

বা, $r\cos(x-\alpha)=c$

অর্থাৎ, $\cos(x-\alpha)=c/r=c/\sqrt{a^2+b^2}$

যদি সাংখ্যমান হিসাবে $c>\sqrt{a^2+b^2}$ হয়, তবে সমীকরণটির কোন সমাধান নাই, কারণ কোন কোণের cosine অনুপাতের সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা কখনও বৃহত্তর হইতে পারে না।

সমাধান তখনই সম্ভব যখন কেবল c এর সাংখ্যমান $\leqslant \sqrt{a^2+b^2}$; ধরা যাক β এমন একটি কোণ যাহাতে

$$\cos(x-\alpha)=c/\sqrt{a^2+b^2}=\cos\beta \text{ হয়}$$

$$\therefore\ x-\alpha=2n\pi\pm\beta, \text{ বা, } x=2n\pi+\alpha\pm\beta,$$

যেখানে n ধন বা ঋণ অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য ; সুতরাং α, β নির্ণীত হইল।

টীকা : $a=r\sin\alpha$, $b=r\cos\alpha$ ধরিয়াও $a\cos x+b\sin x=c$ কে $r\sin(x+\alpha)$'র আকারে প্রকাশ করা যাইত।

উদাহরণ 4 এর আকারে প্রকাশ দ্বারা

উদা. 5. সমাধান কর $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=1$

ধরা যাক্ $\sqrt{3}=r\cos\alpha$, $1=r\sin\alpha$, তাহা হইলে $r=+\sqrt{3+1}=2$

এবং $\cos\alpha=\sqrt{3}/2$, $\sin\alpha=1/2$ যাহা হইতে $\alpha=\pi/6$ পাওয়া যায়. কারণ $-\pi<\alpha\leq+\pi$.

সুতরাং, $r\cos\alpha\cos\theta+r\sin\alpha\sin\theta=1$

বা, $r\cos(\theta-\alpha)=1$, বা, $\cos(\theta-\pi/6)=1/2=\cos\pi/3$

অতএব, $\theta-\pi/6=2n\pi\pm\pi/3$, বা, $\theta=2n\pi+\pi/6\pm\pi/3$

$\therefore\ \theta=2n\pi+\pi/2$ বা $2n\pi-\pi/6$,

যেখানে n হইল ধন বা ঋণ অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য।

যাচাই কর : $\sqrt{3}\cos(2n\pi+\pi/2)+\sin(2n\pi+\pi/2)=1$

এবং $\sqrt{3}\cos(2n\pi-\pi/6)+\sin(2n\pi-\pi/6)=1$

বিকল্প পদ্ধতি : $\{(\sqrt{3})^2+1^2\}^{\frac{1}{2}}$ দ্বারা অর্থাৎ 2 দ্বারা ভাগ কর ;

সুতরাং $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

বা, $\cos\pi/6\cos\theta+\sin\pi/6\sin\theta=\frac{1}{2}$

বা, $\cos(\theta-\pi/6)=\cos\pi/3\cdots$ইত্যাদি পূর্ববৎ।

নতুবা : 2 দ্বারা ভাগ করিয়া পাওয়া যায়

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}$$

বা, $\sin(\pi/3)\cos\theta+\cos(\pi/3)\sin\theta=\frac{1}{2}$

বা, $\sin(\theta+\pi/3)=\sin\pi/6$

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান হইল $\theta+\pi/3=n\pi+(-1)^n(\pi/6)$

বা, $\theta=n\pi-\pi/3+(-1)^n(\pi/6)$ যেখানে n প্রচলিত তাৎপর্যে গ্রহণীয়।

[মন্তব্য : যাচাই করিয়া দেখ যে এই সমাধান শুদ্ধ। সাধারণ সমাধান এই ভাবে প্রায়ই কতিপয় প্রণালীতে পাওয়া যায়। বিভিন্ন আকারে যে ফলগুলি পাওয়া যায় তাহারা একই কোণ শ্রেণীর বিভিন্ন প্রকাশ পদ্ধতি মাত্র।]

নতুবা : প্রদত্ত সমীকরণটির বর্গ লইয়া :

$$\because \sqrt{3} \cos \theta = 1 - \sin \theta$$

অতএব, উভয় পক্ষের বর্গ লইয়া, $3 \cos^2 \theta = (1 - \sin \theta)^2$

$$= 1 - 2 \sin \theta + \sin^2 \theta$$

বা, $3(1 - \sin^2 \theta) = 1 - 2 \sin \theta + \sin^2 \theta$

বা, $4 \sin^2 \theta - 2 \sin \theta - 2 = 0$

বা, $2(1 - \sin \theta)(1 + 2 \sin \theta) = 0$

সুতরাং, $\sin \theta = 1$, বা, $\sin \theta = -1/2$.

$\therefore\ \theta = n\pi + (-1)^n(\pi/2)$, বা, $\theta = n\pi + (-1)^n(-\pi/6)$

যাচাই কর : দেখা যায় যে $\theta = n\pi + (-1)^n(\pi/2)$, যখন $n = 0, \pm 2, \pm 4 \cdots$ এবং $\theta = n\pi + (-1)^n(-\pi/6)$, যখন $n = \pm 1, \pm 3 \cdots$ প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না। ইহার কারণ কি? ইহার কারণ হইল, যে সমাধানগুলি এক্ষেত্রে পাওয়া যায় তাহারা প্রদত্ত সমীকরণের সমাধানের অন্তর্গত নহে। যেমন বর্তমান ক্ষেত্রে সমাধানগুলির মধ্যে সমীকরণ, $-\sqrt{3} \cos \theta = 1 - \sin \theta$ এর সমাধানগুলিও অন্তর্ভুক্ত হইয়াছে, যেমন অন্তর্ভুক্ত হইয়াছে প্রদত্ত সমীকরণের সমাধানগুলিও।

উপসংহার। সমীকরণ সমাধানে বর্গ লওয়ার পদ্ধতি যতদূর সম্ভব পরিহার করিয়া চলা উচিত। কিন্তু একান্তই যদি বর্গ লইয়া অথবা ধ্রুবক নহে এমন কোন উৎপাদক দ্বারা গুণ করিয়া (যেমন উদা. 3 এর ক্ষেত্রে) সমাধান নির্ণয় করা হয়, তবে প্রাপ্ত সমাধানগুলি যাচাই করিয়া লওয়া কর্তব্য, যাহাতে সম্ভাব্য অতিরিক্ত (extraneous) সমাধানসমূহ অপসৃত হয়।

উদা 6. সমাধান কর $5 \cos x - 2 \sin x = 2$, যেখানে প্রদত্ত হইল যে $\tan 21^\circ 48' = 2/5$.

ধরা যাক $21^\circ 48' = A$, তাহা হইলে $\tan A = 2/5$, ফলে $\sec^2 A = 1 + 4/25 = \frac{29}{25}$ সুতরাং $\cos A = 5/\sqrt{29}$ এবং $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = 2/\sqrt{29}$ এবং ইহারা সকলেই ধনাত্মক। এখন প্রদত্ত সমীকরণটিকে $\sqrt{5^2 + 2^2}$ অর্থাৎ $\sqrt{29}$ দ্বারা ভাগ করিলে পাওয়া যায়,

$$\frac{5}{\sqrt{29}} \cos x - \frac{2}{\sqrt{29}} \sin x = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

বা, $\cos A \cos x - \sin A \sin x = \sin A$

বা, $\cos(x+A) = \sin A = \cos(\pi/2 - A)$

$\therefore\ x + A = 2n\pi \pm (\pi/2 - A)$; অর্থাৎ $x = 2n\pi + \pi/2 - 2A$,

বা, $x = 2n\pi - \pi/2$,

অর্থাৎ, $x = 2n\pi + 90^\circ - 43^\circ 36' = 2n\pi + 46^\circ 24'$, বা, $x = 2n\pi - \pi/2$

অর্থাৎ, $x = n.360^\circ + 46^\circ 24'$, বা, $x = n.360^\circ - 90^\circ$,

যেখানে n ধন বা ঋণ অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য।

বিশেষ বিশেষ কৌশল (artifice) প্রয়োগ দ্বারা

উদা 7. সমাধান কর : $\cos m\theta = \sin n\theta,\ m \neq n$

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে $\cos m\theta = \sin n\theta = \cos(\pi/2 - n\theta)$

$$\therefore\ m\theta = 2k\pi \pm (\pi/2 - n\theta),$$

যেখানে k হইল ধন বা ঋণ অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য। সরল করিয়া ও পক্ষান্তর দ্বারা পাওয়া যায়

$$(m+n)\theta = 2k\pi + \pi/2,\ \text{বা},\ (m-n)\theta = 2k\pi - \pi/2$$

উদা 8. সমাধান কর $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

এখন $(\cos x + \cos 3x) + \cos 2x = 0$

বা, $2\cos 2x \cos x + \cos 2x = 0$

বা, $\cos 2x(2\cos x + 1) = 0$

অতঃপর $\cos 2x = 0$ হইতে $2x = (2n+1)(\pi/2)$

এবং $2\cos x + 1 = 0$ হইতে $\cos x = -1/2 = \cos 2\pi/3$,

যাহা হইতে $x = 2n\pi \pm 2\pi/3$

সুতরাং n ধন বা ঋণ অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য হইলে

$$x = (2n+1)(\pi/4),\ \text{অথবা},\ x = 2n\pi \pm 2\pi/3$$

উদা 9. সমাধান কর $\cos x + \sin x = \cos 2x + \sin 2x$

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে $\cos x - \cos 2x = \sin 2x - \sin x$

বা, $2\sin \frac{3}{2}x \sin \frac{1}{2}x = 2\cos \frac{3}{2}x \sin \frac{1}{2}x$

বা, $2\sin \frac{1}{2}x(\sin \frac{3}{2}x - \cos \frac{3}{2}x) = 0.$

যখন $\sin \frac{1}{2}x = 0$, তখন পাওয়া যায় $x = 2n\pi$

যদি $\sin \frac{3}{2}x - \cos \frac{3}{2}x = 0$ হয়, অর্থাৎ $\tan \frac{3}{2}x = 1 = \tan \pi/4$,

তবে $\frac{3}{2}x = n\pi + \pi/4$; সুতরাং n এর সাধারণ অর্থ সহকারে

$$x = 2n\pi,\ \text{বা},\ x = \tfrac{2}{3}[n\pi + \pi/4]$$

প্রশ্নমালা VII (B)

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1. $6 \cos^2 x + 4 \sin^2 x = 5.$
2. $\cot^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = 3.$
3. $\tan^2 x = 3 \operatorname{cosec}^2 x - 1.$
4. $2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1.$
5. $\cos 3\theta = \cos 2\theta$
6. $\tan 2\theta = \tan \theta$
7. $\sin 9\theta = \sin \theta$
8. $\sin mx + \sin nx = 0, m \neq n.$
9. $\cos m\theta + \cos n\theta = 0, m \neq n.$
10. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$
11. $\sin x + \sin 7x = \sin 4x.$
12. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0.$
13. $\sin 4x - \sin 3x + \sin 2x - \sin x = 0.$
14. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0.$
15. $\cos 6x + \cos 4x = \sin 3x + \sin x.$
16. $\cos x - \sin 3x = \cos 2x.$
17. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}.$
18. $\sin x + \cos x = 1/\sqrt{2}.$
19. $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}.$
20. $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1.$
21. $\tan x + \tan 2x + \tan x \tan 2x = 1.$

[ইঙ্গিত : $\tan x + \tan 2x = 1 - \tan x \tan 2x$ বা, $(\tan x + \tan 2x)/(1 - \tan x \tan 2x) = 1,$ বা, $\tan (x + 2x) = 1,$ বা, $x = \frac{1}{3}(n\pi + \pi/4)$]

2. $\tan(\frac{1}{4}\pi + x) + \tan(\frac{1}{4}\pi - x) = 4.$
23. $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = \tan x \tan 2x \tan 3x.$
24. $\sin 2\theta = \cos 3\theta.$
25. $\cot \theta = \tan 8\theta.$
26. $\tan \theta \tan 2\theta = 1.$
27. $\tan ax = \cot bx.$
28. $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0.$
29. $\tan^2 x - (\sqrt{3} + 1) \tan x + \sqrt{3} = 0.$
30. $\tan x - \cot x = \operatorname{cosec} x.$
31. $\cot x - \cot 2x = 2.$
32. $\cot 2x = \cos x + \sin x.$
33. $\tan x + \cot x = 2.$
34. $\cot x - \tan x = 2.$
35. $\sin 5x \cos 3x = \sin 9x \cos 7x.$
36. $\cos 9x \cos 7x = \cos 5x \cos 3x.$
37. $2 \sin x \sin 3x = 1$
38. $\cos 2x = \cos x \sin x.$
39. $2 \cot x + \sin x = 2 \operatorname{cosec} x.$
40. $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0.$
41. $\cos \theta = \sqrt{3}(1 - \sin \theta).$
42. $\sin 3\theta = 8 \sin^3 \theta.$
43. $\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta = \sqrt{3}.$
44. $\sin x + 2 \cos x = 1.$
45. $\cos x - \sin x = \cos \alpha + \sin \alpha.$
46. $\sin 2x \tan x + 1 = \sin 2x + \tan x.$
47. $2 \sin x \tan x + 1 = \tan x + 2 \sin x.$
48. $4 \sin x \cos x = 1 - 2 \sin x + 2 \cos x.$
49. $5 \sin x + 2 \cos x = 5,$ প্রদত্ত : $\tan 21^\circ 48' = 2/5.$

50. $5 \cos \theta+2 \sin \theta=2$, প্রদত্ত : $\tan 68°12'=5/2$.

51. $4 \cos x+5 \sin x=5$, প্রদত্ত : $\tan 51°21'=5/4$.

52. $1+\sin^2 x=3 \sin x \cos x$, প্রদত্ত : $\tan 71°34'=3$

53. নিম্নের প্রতিক্ষেত্রে, যেখানে সম্ভব, সমাধান পূর্বক $0 \leqslant x < 2\pi$ এই সীমার মধ্যে x এর সকল মান নির্ণয় কর :

(i) $2 \tan x \sin x-\tan x=0$. (ii) $2 \cos x+\sec x=3$.

(iii) $\sin x/2+\cos x=1$. (iv) $\cot x/3=-1/\sqrt{3}$

54. নিম্নের সমীকরণের প্রত্যেকটি প্রস্থ সমাধান কর, যেখানে $r \geqslant 0$ এবং $0 \leqslant \theta < 2\pi$:

(i) $r \sin \theta=2$ এবং $r \cos \theta=3$.

(ii) $r \sin \theta=3$ এবং $r=4(1+\sin \theta)$.

(iii) $r=a \sin \theta$ এবং $r=a \cos 2\theta$

(iv) $r=4(1+\cos \theta)$ এবং $r=3 \sec \theta$

[**সমাধান :** (i) বর্গ লইয়া ও যোগ করিয়া, $r^2=13$, যাহা হইতে পাওয়া যায় $r=+\sqrt{13}$ এবং $\sin \theta=2/\sqrt{13}$, $\cos \theta=3/\sqrt{13}$, ইহা হইতে θ নির্ণয় করা যাইবে।

(ii) ভাগ করিয়া, $\dfrac{1}{\sin \theta}=\dfrac{4(1+\sin \theta)}{3}$, বা, $4 \sin^2\theta+4 \sin \theta-3=0$,

বা, $(2 \sin \theta-1)(2 \sin \theta+3)=0$; $2 \sin \theta-1=0$ হইতে $\sin \theta=1/2$, $\theta=\pi/6$ এবং $5\pi/6$ এবং প্রদত্ত প্রথম সমীকরণটি হইতে, $r=6$; লক্ষ্য কর যে $2 \sin \theta+3=0$ কে বাদ দেওয়া হইল।]

55. দেখাও যে $\sin^2\theta=\sin^2\alpha$, $\cos^2\theta=\cos^2\alpha$ এবং $\tan^2\theta=\tan^2\alpha$, এই সমীকরণ তিনটি অভিন্ন (identical) এবং প্রতিক্ষেত্রে সমাধান হইবে $n\pi \pm \alpha$.

56. যদি $\tan ax=\tan bx (a \neq b)$ হয়, তবে দেখাও যে x এর মানগুলি একটি সমান্তর প্রগতি (A.P) গঠন করে।

57. সমাধান পূর্বক x এবং y নির্ণয় কর :

(i) $\sin(x-y)=1/2$ এবং $\cos(x+y)=1/2$.

(ii) $\cos 2x+3y)=1/2$ এবং $\cos(3x+2y)=\sqrt{3}/2$.

58. সমাধান পূর্বক x এবং y নির্ণয় কর, যেথানে প্রতিক্ষেত্রে $0 \leqslant x, y \leqslant \pi$:

(i) $\sin(x-y)=0$ এবং $\sin(x+y)=1$.

(ii) $\sin(x-y)=\sqrt{3}/2$ এবং $\cot(x+y)=0$.

(iii) $\tan x+\tan y=2$ এবং $2 \cos x \cos y=1$.

উত্তর

1. এবং **2.** $n\pi \pm \pi/4$. **3.** $n\pi \pm \pi/3$. **4.** $n\pi \pm \pi/6$. **5.** $2n\pi$ বা $2n\pi/5$. **6.** $n\pi$. **7.** $n\pi/4$ বা $(2n+1)\ \pi/10$. **8.** $2r\pi/(m+n)$ বা $(2r+1)\pi/(m-n)$. **9.** $(2r+1)\pi/(m \pm n)$. **10.** $(2n+1)\ \pi/4$ বা $2n\pi \pm 2\pi/3$. **11.** $n\pi/4$ বা $\frac{1}{3}(2n\pi \pm \pi/3)$, **12.** $n\pi/3$ বা $n\pi \pm \pi/3$, **13.** $2n\pi$ বা $(2n+1)\pi/2$ বা $(2n+1)\pi/5$. **14.** $(2n+1)\pi/2$ বা $(2n+1)\pi/4$ বা $(2n+1)\pi/8$, **15.** $(2n+1)\pi/2$ বা $(4n+1)\pi/14$ বা $(4n-1)\pi/6$ **16.** $2n\pi/3$ বা $(4n+1)\pi/4$ বা $(4n-1)\pi/2$ **17.** $2n\pi+\pi/4$ **18.** $2n\pi+7\pi/12$ বা $2n\pi-\pi/12$. **19.** $2n\pi+5\pi/12$ বা $2n\pi-\pi/12$. **20.** $2n\pi$ বা $2n\pi+2\pi/3$. **22.** $n\pi \pm \pi/6$. **23.** $n\pi/6$. **24.** $(4n+1)\pi/10$ বা $(4n-1)\pi/2$. **25.** $(2n+1)\pi/18$. **26.** $(2n+1)\pi/6$, **27.** $(2n+1)(\pi/2)(a+b)$ **28.** $2n\pi \pm \pi/3$, **29.** $n\pi+\pi/4$ বা $n\pi+\pi/3$ **30.** $2n\pi \pm \pi/3$ বা $(2n+1)\ \pi$ **31.** $\frac{1}{2}n\pi+(-1)^n\pi/12$. **32.** $n\pi-\pi/4$ বা $\frac{1}{2}n\pi+(-1)^n\alpha/2$, যেখানে $\sin\ \alpha=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, **33.** $n\pi+\pi/4$. **34.** $(4n+1)\pi/8$, **35.** $n\pi/4$ বা $(2n+1)\pi/24$, **36.** $n\pi/12$. **37.** $(2n+1)\pi/4$ বা $n\pi \pm \pi/6$, **38.** $\frac{1}{2}(n\pi+\theta)$, যেখানে $\tan\ \theta=2$, **39.** $2n\pi$, **40.** $n\pi/3$ বা $n\pi \pm \theta$ যেখানে $\tan\ \theta=1/\sqrt{2}$. **41.** $2n\pi+\pi/2$ বা $2n\pi+\pi/6$, **42.** $n\pi$ বা $n\pi \pm \pi/6$ **43.** $2n\pi+\pi/3$ বা $(2n+1)\ \pi$, **44.** $2n\pi+\pi/2$ বা $2n\pi-\pi/2+2\theta$ যেখানে $\sin\ \theta=1/\sqrt{5}$. **45.** $2n\pi-\alpha$ বা $2n\pi-\pi/2+\alpha$. **46.** $n\pi+\pi/4$, **47.** $n\pi+\pi/4$ বা $n\pi+(-1)^n\pi/6$, **48.** $2n\pi \pm 2\pi/3$ বা $n\pi+(-1)^n\pi/6$, **49.** $n\pi+(-1)^n(68°12')-21°48'$. **50.** $n\pi+(-1)^n\ (21°48')-68°12'$ **51.** $2n\pi+\pi/2$ বা $2n\pi+12°42'$ **52.** $n\pi \pm \pi/4$ বা $n\pi+26°34'$ **53,** (*i*) $0, \pi/6, 5\pi/6\ \pi$, (*ii*) এবং (*iii*) $0, \pi/3, 5\pi/3$, (*iv*) প্রদত্ত সীমার মধ্যে কোন সমাধান নাই।

54, (*iii*) $\theta=\pi/6, r=a/2$; $\theta=5\pi/6, r=a/2$; $\theta=3\pi/2, r=-a$
(*iv*) $\theta=\pi/3, r=6$; $\theta=5\pi/3, r=6$, **57,** (*i*) $x=(m+\frac{1}{2}n)\pi \pm \pi/6+(-1)^n\ \pi/12$; $y=(m-\frac{1}{2}n)\pi \pm \pi/6-(-1)^n\pi/12$. (*ii*) $\frac{1}{2}\{(6m-4n)\pi \pm \pi/2 \pm 2\pi/3\}$; $\frac{1}{2}\{(6n-4m)\ \pi \pm \pi \pm \pi/3$; যেখানে m, n শূন্য সহ অখণ্ড সংখ্যা। **58,** (*i*) $x=\pi/4=y$, বা $x=3\pi/4, y=-\pi/4$
(*ii*) $x=5\pi/12, y=\pi/12$; বা, $x=11\pi/12$, $y=7\pi/12$, (*iii*) $x=\pi/4=y$

8

বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক
(Inverse Circular Functions)

8.1. সূচনা

যখন এইরূপ লেখা হয় যে

$$x = \sin y,$$

তখন সমীকরণটির আকার হইতে ইহাই বুঝায় যে y জ্ঞাত রাশি হইলে x কিভাবে নির্ণয় করা যায় তাহাই বিবেচ্য। ইতিপূর্বে দেখা গিয়াছে যে $x = \sin y$ হইল y এর একটি অপেক্ষক, যাহা y এর সকল মানের ক্ষেত্রে সংজ্ঞাত (defined) এবং উহা y এর প্রত্যেক প্রদত্ত মানের জন্য x এর একটি **অনন্য** (unique) মান প্রদান করে। ইহাও লক্ষ্য করা হইয়াছে যে সম্পর্কটি ততক্ষণই সত্য যতক্ষণ $-1 \leqslant x \leqslant 1$ হয়। প্রসঙ্গত স্মরণ করিতে হইবে যে কেবল বাস্তব সংখ্যার এলাকার মধ্যেই সংশ্লিষ্ট আলোচনা সীমাবদ্ধ।

বিপরীত দৃষ্টিভঙ্গী (Opposite point of view)

কোন কোন সময় কিন্তু সম্পর্কটিকে বিপরীত দিক্‌ বা দৃষ্টিভঙ্গী হইতে দেখিবার এবং x জ্ঞাত রাশি হইলে y কি ভাবে নির্ণয় করা যায় তাহা বিবেচনা করিবার আগ্রহ হয়। এই দৃষ্টিভঙ্গীকে নির্দেশ করিবার জন্য নিম্নলিখিত অঙ্কপাতন (notation) এর সাহায্য গ্রহণ করা হয় ও লেখা হয়

$$y = \sin^{-1}x \quad \text{বা} \quad y = \text{আর্ক (arc) } \sin x \text{ ;}$$

তখন ইহাকে x এর একটি অপেক্ষক বলিয়া মনে করা যায়। অঙ্কপাতন $y = \sin^{-1}x$ কে পড়িতে হইবে **সাইন-ইনভার্স** x **(sin-inverse x বা sine-inverse x)** অথবা x **এর বিপরীত সাইন বা ইনভার্স সাইন (inverse sine of x)** এই ভাবে। বর্তমান গ্রন্থে বিপরীত অপেক্ষক (inverse function) এর অস্তিত্ব বিষয়ক আলোচনার মধ্যে প্রবেশ করা হইবে না, কেবল ধরিয়া লওয়া হইবে যে $x = \sin y$ এর বিপরীত আকার হইল $y = \sin^{-1}x$ এবং $y = \sin^{-1}x$ এর বিপরীত আকার হইল $x = \sin y$.

অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক সম্পর্কেও অনুরূপ সংজ্ঞা প্রযোজ্য, যথা, $x = \tan y$ এবং $y = \tan^{-1}x$ হইল পরস্পর পরস্পরের বিপরীত রূপ। এই পরিপ্রেক্ষিতে $y = \sin^{-1}x$, $y = \cos^{-1}x$ প্রভৃতিকে বলা হয় বিপরীত ত্রিকোণমিতিক (inverse trigonometric) বা বিপরীত বৃত্তীয় (inverse circular) অপেক্ষক।

টীকা : $\sin^{-1} x$ এবং $(\sin x)^{-1}$কে এক বলিয়া মনে করিলে ভুল হইবে,

$$\text{কারণ } (\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$$

8·2. $y=\sin^{-1}x$: সাধারণ মান : প্রধান বা মুখ্য মান : লেখ
($y=\sin^{-1}x$: General values : Principal values : Graph)

আপাতত : $y=\sin^{-1}x$ এর প্রতিই দৃষ্টি নিবদ্ধ করা যাক্। এই প্রতীকটির অর্থ হইল, y বা $\sin^{-1}x$ বলিতে এমন একটি কোণ বুঝায় যাহার সাইন হইল x; যেহেতু কোন কোণের সাইন এক (unity) অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না, সুতরাং বলা যায় যে

$y=\sin^{-1}x$ তখনই সংজ্ঞাত (defined) যখন কেবল $-1\leqslant x\leqslant 1$.

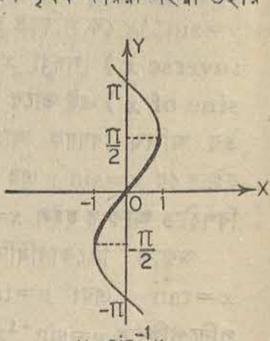
এখন $-1\leqslant x\leqslant 1$ এই সীমার মধ্যে x এর কোন একটি নির্দিষ্ট মান, ধরা যাক্ $\frac{1}{2}$, লওয়া হইল। তাহা হইলে $y=\sin^{-1}\frac{1}{2}$ নির্ণয় করিতে হইবে, অর্থাৎ, এমন একটি কোণ নির্ণয় করিতে হইবে যাহার সাইন হইল $\frac{1}{2}$; এ বিষয়ে পূর্ববর্তী জ্ঞান হইতে বলা যায় যে y এর মান হিসাবে নিম্নলিখিত অসীম সংখ্যক মানগুলির মধ্যে **যে কোন একটিকে** গ্রহণ করা যায়, যথা

$\pi/6,\ 5\pi/6,\ -7\pi/6,\ -11\pi/6,\ 13\pi/6, \cdots$ ইত্যাদি।

প্রকৃতপক্ষে 7·4 **অনুচ্ছেদ** হইতে জানা গিয়াছে যে, যে সমস্ত কোণের সাইন 1/2, তাহাদের সবই পাওয়া যায় $n\pi+(-1)^n\pi/6$ (যেখানে n ধন বা ঋণ অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য) এই সূত্র হইতে। অনুরূপভাবে, $y=\sin^{-1}0$ হইলে y এর মান, $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$, ইত্যাদির মধ্যে **যে কোন একটি** হইতে পারে। সুতরাং ইহা সুস্পষ্ট যে $y=\sin^{-1}x$ সম্পর্কটি **বহুমান-বিশিষ্ট (multiple-valued),** যাহার অর্থ হইল, x এর যে মানগুলির ক্ষেত্রে অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত (defined) তাহাদের প্রত্যেকটির জন্য y এর একাধিক মান পাওয়া যায়।

প্রধান বা মুখ্য মান (Principal Value)

প্রয়োগ বিষয়ক বহু ক্ষেত্রে (যদিও সব ক্ষেত্রে নহে) ইহা বাঞ্ছনীয় হয় না; সেই জন্য $y=\sin^{-1}x$ এর লেখচিত্রের এইরূপ একটি বিশেষ অংশ পৃথক করিয়া লইয়া উহার সাহায্যেই অভীষ্ট লক্ষ্যে অগ্রসর হওয়া রীতিসম্মত, যে অংশের এই গুণ বর্তমান যে **x এর স্বীকার্য প্রতিটি মানের জন্য এই অংশে y এর একটি এবং কেবলমাত্র একটি মানই পাওয়া যাইবে।** $y=\sin^{-1}x$ এর লেখর যে অংশ এই উদ্দেশ্যে নির্বাচন করা হয় তাহা $-\pi/2\leqslant y\leqslant\pi/2$ এই সীমার অন্তর্গত। ইহা **মুখ্য বা প্রধান মানের শাখা (Principal value branch)** বলিয়া পরিচিত —8.1 চিত্রে ইহাকে স্থূলতর রেখারূপে প্রদর্শন করা হইল। সুতরাং নিয়মমাফিক (formal) সংজ্ঞাটি হইল :



চিত্র 8.1

সংজ্ঞা : $1\leqslant x\leqslant 1$ এই সীমার মধ্যে x এর যেকোন মানের জন্য $y=\sin^{-1}x$ এর মুখ্য মান হইল সেই মান যাহা $-\pi/2\leqslant y\leqslant\pi/2$ এই শর্তকে সিদ্ধ করে।

উদাহরণ স্বরূপ বলা যায়:

$\sin^{-1}1$ এর মুখ্য-মান $=\pi/2$, কারণ $\sin \pi/2=1$

$\sin^{-1}(\frac{1}{2})$ এর মুখ্য মান $=\pi/6$, কারণ $\sin \pi/6=\frac{1}{2}$

$\sin^{-1}0$ এর মুখ্য মান $=0$, কারণ $\sin 0=0$

$\sin^{-1}(-\sqrt{3}/2)$ এর মুখ্য মান $=-\pi/3$, কারণ $\sin(-\pi/3)=-\sqrt{3}/2$, ইত্যাদি।

লক্ষণীয় যে $-\pi/2\leqslant\pi/2, \pi/6, 0, -\pi/3\leqslant\pi/2$

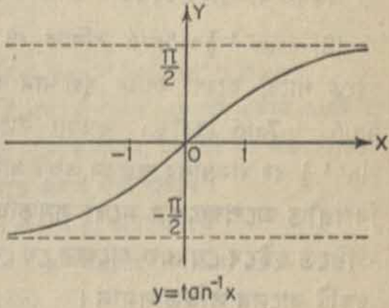
মন্তব্য: 1. $y=\sin^{-1}x$ এর মুখ্যমানের সংজ্ঞা y এর মানের নিম্নলিখিত সীমাগুলির যে কোন একটির সাহায্যে দেওয়া যাইতে পারে, যথা: $-\pi/2\leqslant y\leqslant\pi/2$, $\pi/2\leqslant y\leqslant 3\pi/2, 3\pi/2\leqslant y\leqslant 5\pi/2$, ইত্যাদি; কারণ x এর প্রত্যেক স্বীকার্য মানের জন্য এই সীমাগুলির প্রত্যেকটি হইতে y এর একটি এবং কেবলমাত্র একটি মান পাওয়া যায়। এইজন্য মুখ্যমানের সংজ্ঞা স্থির করার বিষয়ে বিভিন্ন গ্রন্থকারের মধ্যে মতপার্থক্য আছে, তবে উপরে প্রদত্ত সংজ্ঞাগুলি ক্যালকুলাস (calculus) এর পক্ষে সুবিধাজনক।

2. ছাত্রছাত্রীদের সহজেই স্মরণ হইবে যে পূর্ববর্তী অধ্যায়ে মানের এই আকারগুলির সহিত তাহাদের ইতিপূর্বে পরিচয় হইয়াছে। অনুচ্ছেদ 7·2(1) এবং প্রশ্নমালা VII(A)র প্রশ্ন এ সম্পর্কে দ্রষ্টব্য।

8·3. অন্যান্য বিপরীত ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক: মুখ্য বা প্রধান মান

(1) $x=\cos y$ হইল y এর অপেক্ষক যাহা y এর সকল মানের ক্ষেত্রে সংজ্ঞেয়; y এর প্রদত্ত প্রত্যেক মানের জন্য ইহা x এর একটি **অনন্য** মান প্রদান করে, এবং ইহা কেবল $-1\leqslant x\leqslant 1$ এই শর্তসাপেক্ষে সত্য।

$y=\cos^{-1}x$ বা $y=$আর্ক $\cos x$—ইহাকে এইরূপে পড়িতে হইবে, যথা কস-ইনভার্স (cos-inverse)x বা কোসাইন-ইনভার্স (cosine-inverse) x অথবা x এর বিপরীত কোসাইন বা ইনভার্স কোসাইন (inverse cosine of x)—এই অপেক্ষকটি হইল সংজ্ঞাত, যখন $-1\leqslant x\leqslant 1$; $y=\cos^{-1}x$ এর লেখর যে অংশটির ক্ষেত্রে $-1\leqslant x\leqslant 1$ এই সীমা মধ্যবর্তী x এর জন্য $0\leqslant y\leqslant\pi$, তাহাকে **মুখ্য মানের শাখা** বলা হয়।



চিত্র 8.2

(2) $x=\tan y$ হইল y এর পরে প্রদত্ত মানগুলি ব্যতীত আর সকল মানের ক্ষেত্রে y এর সংজ্ঞাত অপেক্ষক, কেবল $y=(2n+1)\pi/2$, যেখানে n অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য, ইহা হইতে প্রাপ্ত y এর মানগুলির ক্ষেত্রে নহে। আবার $y=\tan^{-1}x$, যেখানে $-\infty<x<\infty$, এর মুখ্য মান হইল এমন মান যাহা $-\pi/2<y<\pi/2$ কে সিদ্ধ করে। মুখ্যমানের শাখাটি 8.2 চিত্রে প্রদর্শন করা হইল।

(3) $x=\cot y$ হইল y এর সেই মানগুলি ব্যতীত আর সকল মানের ক্ষেত্রে y এর সংজ্ঞাত অপেক্ষক, যে মানগুলির জন্য $\sin y=0$ হয়, অর্থাৎ $y=n\pi$, যেখানে n অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য, ইহা হইতে প্রাপ্ত y এর মানগুলির ক্ষেত্রে নহে। আর $-\infty<x<\infty$ এর অন্তর্গত x এর যে কোন মানের জন্য $y=\cot^{-1}x$ এর মুখ্য মান হইল এমন মান যাহা $-\pi/2<y\leqslant\pi/2$ এবং $y\neq 0$কে সিদ্ধ করে।

(4) $x=\operatorname{cosec} y$ হইল y এর সেই মানগুলি ভিন্ন আর প্রত্যেক মানের জন্য সংজ্ঞাত, যে মানগুলি $n\pi$ যেখানে n অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য, হইতে পাওয়া যায়; আর $y=\operatorname{cosec}^{-1}x$ সংজ্ঞাত হইবে ও উহার মুখ্য মান থাকিবে কেবলমাত্র $-\pi/2\leqslant y\leqslant\pi/2$, $y\neq 0$ এই সীমার মধ্যে এবং $|x|\geqslant 1$ হইতে প্রাপ্ত x এর মানের ক্ষেত্রে।

(5) $x=\sec y$ হইল y আর সকল মানের ক্ষেত্রে সংজ্ঞাত, কেবল $y=(2n+1)\pi/2$, যেখানে n অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য; হইতে প্রাপ্ত মানের জন্য নহে; এবং $y=\sec^{-1}x$ এর মুখ্য মান কেবল $0\leqslant y\leqslant\pi$, $y\neq\pi/2$ এই সীমার মধ্যে এবং $|x|\geqslant 1$ হইতে প্রাপ্ত x এর মানের জন্য বর্তমান।

মন্তব্য : (1) **সাধারণ মান (General values) :** $\tan^{-1}\sqrt{3}$ বলিতে উহার মুখ্য মানকে বুঝাইবে; ঐ মুখ্য মান হইল এখানে $\pi/3$; সংশ্লিষ্ট অন্যান্য মান কিন্তু $n\pi+\pi/3$ (যেখানে n এর তাৎপর্য রীতিগত) এই সূত্র হইতে পাওয়া যায়। পূর্ববর্তী অধ্যায়ে এই সাধারণ মান সম্পর্কে আলোচনা করা হইয়াছে।

উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, $\cos^{-1}0$ এর মুখ্য মান $=\pi/2$. কিন্তু উহার সাধারণ মান পাওয়া যায় $2n\pi\pm\pi/2$ সূত্র হইতে। বরং বলিতে হয় যে $\cos^{-1}0$, $2n\pi\pm\pi/2$-এর অন্তর্গত মানগুলির যে কোন একটিকে নির্দেশ করে।

(2) $\sin^{-1}\frac{1}{2}=5\pi/6$ বলিতে যে সমান সম্পর্ক বুঝায় তাহা বিভ্রান্তিকর মনে হইতে পারে, কারণ এখানে মুখ্য মান হইল $\pi/6$, আর সাধারণ মানগুলি হইল $\pi/6$, $5\pi/6$, $-7\pi/6$ প্রভৃতি। সুতরাং উক্ত সম্পর্কটি কেবল ইহাই নির্দেশ করে যে $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ এর মানগুলির অন্যতম একটি মান $=5\pi/6$; অনুরূপভাবে **দুই বা তদধিক বিপরীত অপেক্ষকের মধ্যে সমতাজ্ঞাপক সম্পর্ক হইতে এই অর্থই গ্রহণ করিতে হইবে যে এক পক্ষের যে কোন একটি মান, অপর পক্ষের কোন একটি মানের সহিত সমান।**

(3) অন্য নির্দেশ না থাকিলে কেবল মুখ্যমান লইয়াই হিসাব করা হইবে; বিশেষত সংখ্যাগত উদাহরণের ক্ষেত্রে উহা আরও অধিকভাবে করা হইবে।

(4) $\sin^{-1}x$ এবং $\tan^{-1}x$ এর ক্ষেত্রে যেরূপ প্রদর্শিত হইয়াছে, অনুরূপভাবে অন্যান্য বিপরীত ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ অঙ্কন করা যায়।

8·4. কতিপয় সূত্র ও ফল (Some formulae and results)

(A) ধরা যাক $\sin^{-1} x = y$, তাহা হইলে $x = \sin y$; ইহা হইতে পাওয়া যায় $\sin(\sin^{-1}x) = x$; তদ্রূপ $\cos(\cos^{-1}x) = x$, $\tan(\tan^{-1}x) = x$, $\cot(\cot^{-1}x) = x$, $\operatorname{cosec}(\operatorname{cosec}^{-1}x) = x$, $\sec(\sec^{-1}x) = x$.

(B) মনে করা যাক $\sin x = y$, তাহা হইলে $x = \sin^{-1} y$, যাহা হইতে $\sin^{-1}(\sin x) = x$, অনুরূপে $\cos^{-1}(\cos x) = x$, $\tan^{-1}(\tan x) = x$, $\cot^{-1}(\cot x) = x$, $\operatorname{cosec}^{-1}(\operatorname{cosec} x) = x$, $\sec^{-1}(\sec x) = x$.

[স্মরণ করিতে হইবে, ইতিপূর্বেই উল্লেখ করা হইয়াছে যে $\sin^{-1}(\sin x)$ এর মানগুলির অন্যতম একটি মান হইল x, ইত্যাদি]

মন্তব্য : সতর্কতার সহিত লক্ষ্য করিতে হইবে যে

$$\sin(\sin^{-1} \tfrac{1}{2}) = \sin \pi/6 = \tfrac{1}{2},\ \cos\{\cos^{-1}(-\tfrac{1}{2})\} = \cos 2\pi/3 = -\tfrac{1}{2},$$
$$\sin^{-1}(\sin \pi/3) = \sin^{-1}(\sqrt{3}/2) = \pi/3,$$
$$\cos^{-1}\{\cos(-\pi/4)\} = \cos^{-1}(1/\sqrt{2}) = \pi/4.$$

শেষ উদাহরণে $\cos^{-1}\{\cos(-\pi/4)\} = \pi/4$ (কেন ?)। ইহা কি $\cos^{-1}(\cos x) = x$ এর সহিত সামঞ্জস্যপূর্ণ নহে ? অবশ্যই $-\pi/4$ হইল $\cos^{-1}\{\cos(-\pi/4)\}$ এর মানগুলির অন্যতম একটি মান। কিন্তু সংখ্যাগত হিসাবের ক্ষেত্রে এখানে যেহেতু মুখ্য মানটিই কেবল বিবেচ্য, সেইজন্য $\pi/4$ কে সমাধান হিসাবে লওয়া হইয়াছে।

সুতরাং এই সিদ্ধান্ত করা হইল যে $\sin(\sin^{-1} x)$ এর ক্ষেত্রে x হইল উহার একমাত্র মান, কিন্তু $\sin^{-1}(\sin x)$ এর ক্ষেত্রে ইহার মানগুলির অন্যতম একটি মান হইল x। অন্যগুলির ক্ষেত্রেও অনুরূপ মন্তব্য প্রযোজ্য।

(C) $\sin^{-1}x = \operatorname{cosec}^{-1}(1/x)$;

$$\cos^{-1}x = \sec^{-1}(1/x),\ \tan^{-1}x = \cot^{-1}(1/x).$$

এই ফলগুলির তাৎপর্য কেবল ইহাই যে $\sin^{-1}x$ এর যে কোন একটি মান, $\operatorname{cosec}^{-1}(1/x)$ এর কোন একটি মানের সহিত সমান, ইত্যাদি। উক্ত ফলগুলির একটি প্রমাণ করা যাক ; অন্যগুলি একইভাবে প্রমাণ করা যাইবে।

ধরা যাক $\sin^{-1}x = y$, তাহা হইলে $x = \sin y$, যাহা হইতে

$\operatorname{cosec} y = 1/\sin y = 1/x$, অর্থাৎ $y = \operatorname{cosec}^{-1}(1/x)$

সুতরাং $\sin^{-1} x = \operatorname{cosec}^{-1}(1/x)$.

(D) কোন একটি বিপরীত ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষককে অনুরূপ অন্য অপেক্ষকের সাহায্যে প্রকাশ (Expression of an inverse trigonometric function in terms of others)

ধরা যাক $\tan^{-1}x$ কে অপর অনুরূপ অপেক্ষকের সাহায্যে প্রকাশ করিতে হইবে ;

অনুরূপভাবে অন্যগুলিও করা যাইবে। মনে করা হইল যে

$\tan^{-1}x=y$, তাহা হইলে $x=\tan y$ যাহা হইতে

$$\sin y=\pm\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ \cos y=\pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ \cot y=\frac{1}{x}$$ ইত্যাদি।

সুতরাং y অর্থাৎ $\tan^{-1}x=\sin^{-1}\frac{\pm x}{\sqrt{1+x^2}}=\cos^{-1}\frac{\pm 1}{\sqrt{1+x^2}}=\cot^{-1}\frac{1}{x}$

$$=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\pm x}=\sec^{-1}\left(\pm\sqrt{1+x^2}\right).$$

প্রশ্নমালা VIII (A)

1. বিপরীত অপেক্ষকের অঙ্কপাতনে প্রকাশ কর (in inverse function notation):

(i) $\sin x=3/4$, (ii) $\cos\theta=1$, (iii) $\tan x=-4$.

2. নিম্নের প্রতিক্ষেত্রে মুখ্যমান (principal value) নির্ণয় কর:

(i) $\sin^{-1}0$, (ii) $\cos^{-1}(-1)$, (iii) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$
(iv) $\cot^{-1}(1)$, (v) $\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$, (vi) $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$,
(vii) $\sin^{-1}(\sqrt{3}/2)$, (viii) $\cos^{-1}(-1/2)$, (ix) $\cot^{-1}(\sqrt{3})$,
(x) $\sec^{-1}2$, (xi) $\operatorname{cosec}^{-1}(-2)$ (xii) $\tan^{-1}0$

[উঃ (i) 0, (ii) π, (iii) $-\pi/3$, (iv) $\pi/4$, (v) $-\pi/4$, (vi) $3\pi/4$, (vii) $\pi/3$, (viii) $2\pi/3$, (ix) $\pi/6$, (x) $\pi/3$, (xi) $-\pi/6$, (xii) 0.]

3. প্রতিক্ষেত্রে উভয় পক্ষের সমতা যাচাই কর:

(a) $\sin\sin^{-1}(-\tfrac{1}{2})=-\tfrac{1}{2}$, (b) $\cos\cos^{-1}(1/\sqrt{2})=1/\sqrt{2}$,
(c) $\sin\cos^{-1}(4/5)=3/5$, (d) $\cos\sin^{-1}(-12/13)=5/13$,
(e) $\tan\tan^{-1}(-1)=-1$, (f) $\tan\sin^{-1}(0)=0$,
(g) $\cos\sin^{-1}(-1/\sqrt{2})=1/\sqrt{2}$,
(h) $\cos^{-1}\tan(-5\pi/4)=\pi$ (i) $\sin^{-1}\tan(3\pi/4)=-\pi/2$,
(j) $\sin\cos^{-1}(-\sqrt{3}/2)=1/2$, (k) $\cos^{-1}\sin 220^\circ=130^\circ$,
(l) $\tan^{-1}\cot 230^\circ=40^\circ$.

[**সমাধান:** (c) ধরা যাক $\cos^{-1}(4/5)=x$, তাহা হইলে $\cos x=4/5$, যাহা হইতে পাওয়া যায়, $\sin x=+\sqrt{1-\cos^2 x}=3/5$, কারণ x প্রথম পাদতে, সুতরাং $\sin\cos^{-1}(4/5)=\sin x=3/5$.

(d) ধরা যাক $\sin^{-1}(-12/13)=\theta$, তাহা হইলে $\sin\theta=-12/13$, কারণ θ চতুর্থ পাদতে অবস্থিত কোণ। সুতরাং প্রদত্ত রাশি $=\cos\theta=+\sqrt{1-\sin^2\theta}$ $=5/13$.]

4. নিম্নের প্রতিক্ষেত্রে সাধারণ মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin^{-1}(1/\sqrt{2})$. (ii) $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)$. (iii) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$.

[উঃ (i) $n\pi+(-1)^n(\pi/4)$; (ii) $2n\pi\pm\pi/6$ · (iii) $n\pi-\pi/3$

5. দেখাও যে,

(i) $\sin^{-1}x$ এর সাধারণ মান $=n\pi+(-1)^n \sin^{-1}x$.

(ii) $\cos^{-1}x$ এর সাধারণ মান $=2n\pi\pm\cos^{-1}x$.

(iii) $\tan^{-1}x$ এর সাধারণ মান $=n\pi+\tan^{-1}x$.

যেখানে n হইল ধন বা ঋণ অখণ্ড সংখ্যা অথবা শূন্য এবং $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, সংশ্লিষ্ট ক্ষেত্রে কেবল মুখ্য মান নির্দেশ করিতেছে।

8·5. কতিপয় গুরুত্বপূর্ণ ফল (A few important results)

(A) দেখাইতে হইবে যে,

$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{1}{2}\pi$; $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{1}{2}\pi$

এবং $\sec^{-1}x+\operatorname{cosec}^{-1}x=\frac{1}{2}\pi$.

প্রথমটি প্রমাণ করা হইবে ; অপর দুইটি অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যাইবে।

ধরা যাক্ $\sin^{-1}x=y$; তাহা হইলে $x=\sin y$.

এখন $\sin y=\cos(\frac{1}{2}\pi-y)=x$, সুতরাং $\cos^{-1}x=\frac{1}{2}\pi-y$.

অতএব, $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=y+\frac{1}{2}\pi-y=\frac{1}{2}\pi$.

(B) প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$$

এবং $$\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}.$$

ধরা হইল, $\tan^{-1}x=\alpha$ এবং $\tan^{-1}y=\beta$, তাহা হইলে $\tan\alpha=x$ এবং $\tan\beta=y$.

এখন $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{x+y}{1-xy}.$$

সুতরাং, $$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\alpha+\beta=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$$

অনুরূপভাবে, $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{x-y}{1+xy}$ হইতে পাওয়া যায়

$$\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\alpha-\beta=\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}.$$

অনুসিদ্ধান্ত। $\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}y)=\tan\left(\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}\right)=\dfrac{x+y}{1-xy}$

এবং $\tan(\tan^{-1}x-\tan^{-1}y)=\tan\left(\tan^{-1}\dfrac{x-y}{1+xy}\right)=\dfrac{x-y}{1+xy}$.

(C) দেখাইতে হইবে যে

$\cot^{-1} x+\cot^{-1} y=\cot^{-1}\dfrac{xy-1}{y+x}$ এবং

$\cot^{-1} x-\cot^{-1} y=\cot^{-1}\dfrac{xy+1}{y-x}$

ধরা যাক্ $\cot^{-1} x=\alpha$ এবং $\cot^{-1} y=\beta$, তাহা হইলে

$$\cot\alpha=x \text{ এবং } \cot\beta=y.$$

এখন, $$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}=\frac{xy-1}{y+x}.$$

সুতরাং, $$\cot^{-1} x+\cot^{-1} y=\alpha+\beta=\cot^{-1}\frac{xy-1}{y+x}$$

অনুরূপভাবে দ্বিতীয় সম্বন্ধটিও প্রতিষ্ঠিত করা যাইবে।

(D) প্রমাণ করিতে হইবে যে

$$\tan^{-1} x+\tan^{-1} y+\tan^{-1} z=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}.$$

ধরা যাক্ $\tan^{-1} x=\alpha$, $\tan^{-1} y=\beta$, $\tan^{-1} z=\gamma$, তাহা হইলে

$$\tan\alpha=x,\ \tan\beta=y,\ \tan\gamma=z.$$

এখন, $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}.$$

সুতরাং, $\tan^{-1} x+\tan^{-1} y+\tan^{-1} z=\alpha+\beta+\gamma$

$$=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}$$

অন্য প্রকারে :

বাম পক্ষ $=(\tan^{-1} x+\tan^{-1} y)+\tan^{-1} z$

$$=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}+\tan^{-1} z$$

$$=\tan^{-1}\frac{\dfrac{x+y}{1-xy}+z}{1-\dfrac{x+y}{1-xy}\cdot z}=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}.$$

মন্তব্য : পূর্ববর্তী ফলগুলিতে ধরিয়া লওয়া হইয়াছে যে অপেক্ষকগুলি সকলেই বিদ্যমান এবং হরগুলি কোনও অবস্থাতেই শূন্য নহে। আর দুই পক্ষের মধ্যে সমতা-সূচক সম্বন্ধটির অর্থ, এক পক্ষের যে কোন মান অপর পক্ষের কোন একটি মানের সহিত সমান।

8·6. **প্রশ্ন সমাধানের পদ্ধতি (Procedures for working out exercises)**

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি ছাত্রছাত্রীদের প্রশ্ন সমাধানের সময় পথনির্দেশ করিবে।

উদা. 1. দেখাও যে $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\pi/4$

বামপক্ষ $=\tan^{-1}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\tan^{-1}\dfrac{5/6}{5/6}=\tan^{-1}1==\dfrac{\pi}{4}$

উদা. 2. দেখাও যে $\sin^{-1}x\pm\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}\pm y\sqrt{1-x^2}\}$

এবং $\cos^{-1}x\pm\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy\mp\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$

ধরা যাক্ $\sin^{-1}x=\alpha$, $\sin^{-1}y=\beta$, তাহা হইলে $\sin\alpha=x$, $\sin\beta=y$.

এখন, $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}$, $\cos\beta=\sqrt{1-y^2}$;

এবং $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$

এই প্রকারে, $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\alpha+\beta=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\}$

প্রথম সম্বন্ধটি প্রমাণিত হইল। অন্যগুলিও এইভাবে প্রমাণ করা যাইবে।

উদা. 3. $\sin^{-1}1/\sqrt{5}+\sin^{-1}2/\sqrt{5}=\pi/2$.

বামপক্ষ $=\sin^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{1-\dfrac{4}{5}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{1-\dfrac{1}{5}}\right\}$

$$=\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\sin^{-1}1=\frac{\pi}{2}.$$

উদা. 4. $\cos^{-1}\dfrac{3}{5}+\cos^{-1}\dfrac{12}{13}+\cos^{-1}\dfrac{63}{65}=\dfrac{\pi}{2}$

এখন, $\cos^{-1}\dfrac{3}{5}+\cos^{-1}\dfrac{12}{13}=\cos^{-1}\left\{\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{12}{13}-\sqrt{\left(1-\dfrac{9}{25}\right)\left(1-\dfrac{144}{169}\right)}\right\}$

$$=\cos^{-1}\left(\frac{36}{65}-\frac{4}{13}\right)=\cos^{-1}\frac{16}{65}=\sin^{-1}\sqrt{1-\frac{256}{4225}}=\sin^{-1}\frac{63}{65}$$

$\therefore$ বামপক্ষ $=\sin^{-1}\dfrac{63}{65}+\cos^{-1}\dfrac{63}{65}=\dfrac{\pi}{2}$.

উদা. 5. প্রমাণ কর যে $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$

এবং ইহার সাহায্যে দেখাও যে,

$$2\tan^{-1}\tfrac{1}{3}+\tan^{-1}\tfrac{1}{7}=\tfrac{\pi}{4}$$

$2\tan^{-1}x=\tan^{-1}x+\tan^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{x+x}{1-x\,x}=\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$ এবং

$2\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}\dfrac{2.\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}=\tan^{-1}\frac{3}{4}$

$\therefore$ বামপক্ষ $=\tan^{-1}\frac{3}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}}=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$

উদা. 6. দেখাও যে

$$2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}.$$

ধরা যাক $\tan^{-1}x=\theta$, তাহা হইলে $x=\tan\theta$; এখন

$$\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{2x}{1+x^2},\ \cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

সুতরাং,

$$2\tan^{-1}x=2\theta=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

অপর সম্বন্ধটি ইতিপূর্বে পূর্ববর্তী উদাহরণে প্রমাণিত হইয়াছে। উহাকে নিম্ন-প্রকারেও প্রমাণ করা যায়, যথা

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2x}{1-x^2}\text{ ; সুতরাং}$$

$$2\tan^{-1}x=2\theta=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}.$$

উদা. 7. সমাধান কর :

$$\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2}+\tan^{-1}\frac{x+1}{x+2}=\frac{\pi}{4}$$

$$\text{বামপক্ষ}=\tan^{-1}\frac{\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}}{1-\frac{x-1}{x-2}\cdot\frac{x+1}{x+2}}=\tan^{-1}\frac{2x^2-4}{-3}.$$

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণটি এখন নিম্ন আকারে আসিল, যথা

$$\frac{2x^2-4}{-3}=\tan\frac{\pi}{4}=1,\text{ যাহা হইতে পাওয়া যায়}$$

$$2x^2-1=0,\text{ বা, } x=\pm 1/\sqrt{2}.$$

উদা. 8. দেখাও যে $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x=x$.

ধরা যাক $\cos^{-1}x=\alpha$, তাহা হইলে $\cos\alpha=x$; এখন

$$\tan\cos^{-1}x=\tan\alpha=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

তাহা হইলে বামপক্ষ $=\sin\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$; এখন $\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\beta$ ধরা হইল।

সুতরাং $\cot\beta=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, যাহা হইতে এখন

$$\text{বামপক্ষ}=\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\beta}}=\frac{1}{\sqrt{1+\{(1-x^2)/x^2\}}}=x.$$

উদা 9. যদি $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$ হয়, তবে দেখাও যে

$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$$

ধরা যাক্ $\cos^{-1}x=A$, $\cos^{-1}y=B$, $\cos^{-1}z=C$;

তাহা হইলে $x=\cos A$, $y=\cos B$, $z=\cos C$ এবং $A+B+C=\pi$.

এখন 6·4 অনুচ্ছেদের অন্তর্গত উদা. 3 হইতে পাওয়া যায় যে

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1;$$

ইহা হইতে পাওয়া যায়, $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$.

প্রশ্নমালা VIII (B)

দেখাও যে :

1. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\pi/4.$ 2. $\tan^{-1}\frac{3}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{4}=\pi/4.$

3. $\tan^{-1}4-\tan^{-1}3=\cot^{-1}13.$

4. $\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}+\tan^{-1}\frac{1}{18}=\tan^{-1}\frac{1}{3}.$

5. $2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{4}=\tan^{-1}\frac{32}{43}.$

6. $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\pi/4.$

7. $\tan^{-1}1+\cot^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}3=\pi=2(\tan^{-1}1+\tan^{-1}\frac{1}{2}+\cot^{-1}3).$

8. $\tan^{-1}x+\cot^{-1}(x+1)=\tan^{-1}(1+x+x^2).$

9. $\tan^{-1}x+\cot^{-1}y=\tan^{-1}\dfrac{xy+1}{y-x}.$

10. $\tan^{-1}\dfrac{2a-b}{b\sqrt{3}}+\tan^{-1}\dfrac{2b-a}{a\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{3}.$

11. $\tan^{-1}\dfrac{1}{p+q}+\tan^{-1}\dfrac{q}{p^2+pq+1}=\tan^{-1}\dfrac{1}{p}.$

12. $\tan^{-1}a-\tan^{-1}c=\tan^{-1}\dfrac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\dfrac{b-c}{1+bc}.$

13. $\tan^{-1}\dfrac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\dfrac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}\dfrac{c-a}{1+ca}$

$$=\tan^{-1}\frac{a^2-b^2}{1+a^2b^2}+\tan^{-1}\frac{b^2-c^2}{1+b^2c^2}+\tan^{-1}\frac{c^2-a^2}{1+c^2a^2}.$$

14. $\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}=\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$$=\sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}.$$

15. $\sin^{-1}\dfrac{77}{85}-\sin^{-1}\dfrac{3}{5}=\cos^{-1}\dfrac{15}{17}.$

16. $\cot^{-1}\dfrac{43}{32}-\tan^{-1}\dfrac{1}{4}=\cos^{-1}\dfrac{12}{13}.$

17. $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{3}{4}=\frac{\pi}{2}$.

18. $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$

19. $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$ এবং $2\cos^{-1}x=\cos^{-1}(2x^2-1)$.

20. $3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3)$ এবং $3\cos^{-1}x=\cos^{-1}(4x^3-3x)$.

21. $3\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$.

22. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$.

23. $\cos^{-1}x=2\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}=2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}}$

$$=2\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}.$$

24. $\tan^{-1}\sqrt{x}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x}$.

25. $\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-q}{p-q}}=\cos^{-1}\sqrt{\frac{p-x}{p-q}}=\cot^{-1}\sqrt{\frac{p-x}{x-q}}$.

26. $\cos\left(\tan^{-1}\frac{15}{8}-\sin^{-1}\frac{7}{25}\right)=\frac{297}{425}$.

27. $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}-\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)=\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$.

28. $\tan\left(2\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}\right)=-\frac{253}{204}$.

29. $\{\cos(\sin^{-1}x)\}^2=\{\sin(\cos^{-1}x)\}^2$.

30. $\tan^{-1}(\frac{1}{2}\tan 2A)+\tan^{-1}(\cot A)+\tan^{-1}(\cot^3 A)=0$.

31. $2\tan^{-1}x+2\tan^{-1}y=\sin^{-1}\frac{2(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

32. $\cos^{-1}\left(\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right)=2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)$.

33. $\cot^{-1}3+\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{5}=\pi/4$.

34. $\cot^{-1}(\tan 2x)+\cot^{-1}(-\tan 3x)=x$.

35. $\sec^2(\tan^{-1}2)+\operatorname{cosec}^2(\cot^{-1}3)=15$.

36. $\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z)=\cot(\cot^{-1}x+\cot^{-1}y+\cot^{-1}z)$.

37. $\cot^{-1}\frac{ab+1}{a-b}+\cot^{-1}\frac{bc+1}{b-c}+\cot^{-1}\frac{ca+1}{c-a}=0$

38. প্রতি ক্ষেত্রে মান নির্ণয় কর :

(*i*) $\sin(\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2})$. (*ii*) $\tan\frac{1}{2}(\tan^{-1}x+\cot^{-1}x)$.

[উঃ (*i*) 1, (*ii*) 1]

39. যদি $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$ হয়, তবে দেখাও যে

$$x+y+z=xyz.$$

40. যদি $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\frac{1}{2}\pi$ হয়, তবে দেখাও যে

$$xy+yz+zx=1$$

41. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y+\sin^{-1}z=\pi$ হইলে প্রমাণ কর যে

$$x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}+z\sqrt{1-z^2}=2xyz.$$

42. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

(*i*) $\tan^{-1}\dfrac{2}{x}+\tan^{-1}\dfrac{x}{4}=\tan^{-1}3$.

(*ii*) $2\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}=\dfrac{\pi}{3}$.

(*iii*) $2\cot^{-1}\dfrac{1+x}{1-x}=\tan^{-1}x$.

(*iv*) $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=\pi/4$.

(*v*) $\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1)=\tan^{-1}(8/31)$.

(*vi*) $\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}=\sin^{-1}\dfrac{2a}{1+a^2}-\cos^{-1}\dfrac{1-b^2}{1+b^2}$.

(*vii*) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}2x=\pi/3$.

(*viii*) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1}(x+1)=\tan^{-1}3x$.

[উঃ (i) 2, 4 ; (ii) $2-\sqrt{3}$; (iii) $\pm 1/\sqrt{3}$; (iv) $-1, 1/6$; (v) $1/4$ -8 ; (vi) $(a-b)/(1+ab)$; (vii) $\pm\sqrt{21}/14$; (viii) $0, \pm\frac{1}{2}$.]

43. দেখাও যে

$$\tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)=\frac{x+y}{1-xy}.$$

44. যদি $\tan^{-1}y=4\tan^{-1}x$ হয়, তবে x এবং y এর মধ্যে একটি বীজগণিতীয় সম্পর্ক নির্ণয় কর।

[উঃ $y=4x(1-x^2)/(1-6x^2-x^4)$]

45. যদি $A+B+C=\pi$ হয় এবং যদি $A=\tan^{-1}2$, $B=\tan^{-1}3$ হয়, তবে দেখাও যে $C=\pi/4$.

46. একটি ত্রিভুজের C কোণ সমকোণ ; প্রমাণ কর যে

$$\tan^{-1}\frac{a}{b+c}+\tan^{-1}\frac{b}{a+c}=\frac{\pi}{4}.$$

47. যদি $\tan^{-1}x$, $\tan^{-1}y$, $\tan^{-1}z$ সমান্তর প্রগতিতে অবস্থিত হয়, তবে x, y, z এর মধ্যে বীজগণিতীয় সম্পর্কটি নির্ণয় কর। উপরন্তু x, y, z ও যদি A.P.তে অবস্থিত হয় তবে প্রমাণ কর যে $x=y=z$, যখন $y\neq 0, 1$ বা -1.

[উঃ $(x-y)(1+yz)=(y-z)(1+xy)$]

9

লগারিদ্‌মস্ (Logarithms)

9·1. সূচনা

বর্তমান অধ্যায়ে লগারিদ্‌ম্-এর ধর্মসমূহ সংক্ষেপে আলোচনা করা হইবে এবং সমতল ত্রিকোণমিতির পক্ষে আবশ্যিক গণনাপদ্ধতির সহিত ছাত্রছাত্রীদের পরিচিত করা হইবে। বিশদ আলোচনার জন্য লেখকদ্বয়ের বীজগণিত গ্রন্থ দ্রষ্টব্য।

সংজ্ঞা ঃ শূন্য নহে এইরূপ কোন ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ হইল সেই ঘাত (power), যাহাতে নিধান (base) বলিয়া কথিত কোন ধ্রুবক রাশি (>0 কিন্তু $\neq 1$)-কে অবশ্যই উন্নীত করিতে হইবে, যদি প্রদত্ত সংখ্যাটি পাইতে হয়।

[The logarithm of a non-zero positive real number is defined to be the power to which a constant (>0 but $\neq 1$) called the base must be raised to give the number]

সুতরাং $y=\log_a x$ বলিতে বুঝায় $x=a^y$; দেখা যায়, $y=\log_a x$ এবং $x=a^y$ হইল পরস্পর পরস্পরের **বিপরীত (inverse)**। স্পষ্টত 1 ভিন্ন যে কোন ধনাত্মক সংখ্যাকে কোন লগারিদ্‌ম্-তন্ত্রের (of a system of logarithms) নিধানরূপে গ্রহণ করা যাইত। নিধান 10 হইলে তন্ত্রটি (system)-কে **সাধারণ লগারিদ্‌ম্ (common logarithm)** এর তন্ত্র বলা হয়। কিন্তু নিধান যদি e হয়, যেখানে e এর সাংখ্যমান $e=2{\cdot}71828\cdots$, তবে তন্ত্রটিকে **স্বাভাবিক লগারিদ্‌মিক্ তন্ত্র (natural lograrithmic system)** বলা হয়। এই প্রসঙ্গে লগারিদ্‌ম্-এর কতিপয় ধর্ম নিম্নে বিবৃত হইল—এখানে $a>0$, $b>0$, কিন্তু a এবং $b\neq 1$, এইরূপ ধরিয়া লওয়া হইয়াছে :

1. $\log_a 1=0$; 2. $\log_a a=1$;
3. $\log_a(m\times n)=\log_a m+\log_a n$;
4. $\log_a(m/n)=\log_a m-\log_a n$;
5. $\log_a m^n=n\log_a m$; 6. $\log_a m=\log_b m\times\log_a b$;
7. $\log_b a\times\log_a b=1$; 8. $\log_a m=\log_b m/\log_b a$.

প্রসঙ্গত ঃ ইহাও স্মরণ রাখিতে হইবে যে—

9. ঋণাত্মক সংখ্যার কোন (বাস্তব) লগারিদ্‌ম্ নাই।

10. নিধান a যদি 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে 0 এবং 1 এর মধ্যবর্তী (কিন্তু 0 এবং 1 ব্যতীত) যে কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ ঋণাত্মক, এবং সংখ্যাটির মান শূন্যের অভিমুখে অগ্রসর হইলে উহার লগারিদ্‌ম্ ঋণাত্মক অসীমের অভিমুখে অগ্রসর হয়।

11. নিধান a যদি 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে 1 অপেক্ষা বৃহত্তর যে কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ ধনাত্মক, এবং সংখ্যাটি অসীমের অভিমুখে অগ্রসর হইলে উহার লগারিদ্‌ম্ অসীমের অভিমুখে অগ্রসর হয়।

9·2. সাধারণ লগারিদম্-তন্ত্র (The system of common logarithms)

ত্রিকোণমিতিতে গণনাবিষয়ক কার্যে সাধারণ লগারিদম্ তন্ত্র বা 10 নিধান সম্পর্কে লগারিদম্‌কে সাধারণভাবে প্রয়োগ করা হইবে। যদিও বীজগণিতে* এইরূপ লগারিদম্ সম্পর্কে অধিকতর বিশদ আলোচনা করা হইয়াছে, তথাপি এবিষয়ে সংক্ষেপে নিম্নলিখিত বিশেষত্বগুলির সহিত ছাত্রছাত্রীদের পরিচিত করা যাক্।

সকল সংখ্যাকে 10 কে অখণ্ড ঘাতে উন্নীত করিয়া পাওয়া যায় না ; সুতরাং সকল বাস্তব সংখ্যার লগারিদম্ অখণ্ড সংখ্যা নহে। সাধারণত কোন সংখ্যার লগারিদম্ **অখণ্ড** এবং **দশমিক** উভয় অংশ লইয়া গঠিত হইবে। অখণ্ড অংশটিকে **পূর্ণক** (characteristic) এবং দশমিক অংশ (ধনাত্মক আকারে রূপান্তরিত)-কে **অংশক** (mantissa) বলা হয়। যদি কোন ক্ষেত্রে কোন সংখ্যার লগারিদম্ ঋণাত্মক এবং অখণ্ড ও দশমিক উভয় অংশ লইয়া গঠিত হয়, তবে দশমিক অংশকে অর্থাৎ অংশককে সর্বদা অখণ্ড অংশের পরিবর্তন দ্বারা ধনাত্মক আকারে প্রকাশ করা হয়। **সুতরাং কোন সংখ্যার লগারিদম্-এর অংশক অংশটি সর্বদা ধনাত্মক।** উদাহরণস্বরূপ বলা যায় যে যদি কোন সংখ্যার লগারিদম্ $-3{\cdot}4$ হয়, তবে ইহাকে লিখিত হইবে $-4+{\cdot}6$ বা কেবল $\bar{4}{\cdot}6$, এই আকারে।

নিম্নলিখিত নিয়মগুলি স্মরণ রাখিতে হইবে :

নিয়ম 1 : (*i*) 1 অপেক্ষা বৃহত্তর যে কোন সংখ্যার সাধারণ লগারিদম্-এর পূর্ণক ধনাত্মক এবং উহার সাংখ্যমান, যে সংখ্যার লগারিদম্ নির্ণেয় তাহার অখণ্ড অংশের অঙ্ক সংখ্যা অপেক্ষা এক কম ; এবং (*ii*) 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর যে কোন ধনাত্মক (>0) সংখ্যার সাধারণ লগারিদম্-এর পূর্ণক ঋণাত্মক ও উহার সাংখ্যমান, যে রাশির লগারিদম্ নির্ণেয় তাহার দশমিক চিহ্নের পরবর্তী শূন্য-সংখ্যা অপেক্ষা এক বেশী।

নিয়ম 2 : যতক্ষণ কোন সংখ্যার অঙ্কগুলি একই ক্রমে থাকে ততক্ষণ ঐ সংখ্যার লগারিদম্-এর অংশক সংখ্যাটিতে দশমিক চিহ্নের অবস্থান (position) সম্পর্কে নিরপেক্ষ (independent)।

দৃষ্টান্ত হিসাবে বলিতে পারা যায়, 222, 50, 346·235, 1·32, 0·23, 0·014, 0·00156 এবং 0·1245 এর লগারিদম্-এর পূর্ণক হইল যথাক্রমে 2, 1, 2, 0, -1, -2, -3 এবং -1 ; অংশকগুলি যে কোন লগারিদ্‌মিক্ তালিকা হইতে পাওয়া যাইতে পারে। বইয়ের পরিশেষে প্রদত্ত পাঁচ অঙ্কের লগ্ তালিকায় log 74-এর অংশক দেওয়া আছে 86923. সুতরাং

$$\log 74 = 1{\cdot}86923,\ \log 7{\cdot}4 = 0{\cdot}86923,$$

$$\log {\cdot}0074 = \bar{3}{\cdot}86923,\ \log 7400 = 3{\cdot}86923.$$

---

* লেখকদ্বয়ের বীজগণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য।

প্রদত্ত লগারিদ্‌ম্‌ সম্পর্কে অনুরূপ সংখ্যা (Number corresponding to a given logarithm)

প্রদত্ত লগারিদ্‌ম্‌ সম্পর্কে অনুরূপ সংখ্যাটিকে উহার **এ্যান্টি লগারিদ্‌ম্‌ (antilogarithm)** বা anti-log বলা হয়। শূন্য নহে এইরূপ কোন ধনাত্মক সংখ্যার **কো-লগারিদ্‌ম্‌ (co-logarithm)** হইল সংখ্যাটির অন্যোন্যক (reciprocal) এর লগারিদ্‌ম্‌ এবং ইহাকে সংক্ষেপে লেখা হয় colog.

এখন 1·2345 এর anti-log নির্ণয় করা যাক। Anti-log এর তালিকা হইতে পাওয়া যায় :

অংশক	এ্যান্টি-লগ্‌
·234	=17140
··· 5	= 20
·2345	=17160

$\therefore$ antilog 1·2345 = 17·160

লগারিদ্‌মিক্‌ তালিকার সাহায্যেও ইহা নির্ণয় করা যায়।

ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক-এর লগারিদ্‌ম্‌ (Logarithms of trigonometric functions)

0 এবং $\pi/2$ এর মধ্যবর্তী কোণগুলির সাইন এবং কোসাইন, 0 এবং $\pi/4$ এর অন্তর্বর্তী কোণসমূহের ট্যানজেন্ট অথবা $\pi/4$ এবং $\pi/2$ এর মধ্যস্থ কোণগুলির কো-ট্যানজেন্ট (সকল ক্ষেত্রেই উল্লিখিত প্রান্তীয় কোণগুলি ব্যতিরেকে), ইহারা সকলেই 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, সুতরাং ইহাদের লগারিদ্‌ম্‌-এর পূর্ণক ঋণাত্মক। এই ঋণাত্মক পূর্ণক পরিহারের নিমিত্ত ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকসমূহের লগারিদ্‌ম্‌-এর সহিত 10 যোগ করা হয়। **θ কোণের লগারিদ্‌মিক্‌ সাইন (logarithmic sine)** বলিতে বুঝায় $10+\log \sin \theta$ (এবং $\log \sin \theta$ **নহে**) ও সংক্ষেপে ইহাকে লেখা হয় $L \sin \theta$. অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক-এর ক্ষেত্রেও অনুরূপ পদ্ধতি গ্রহণ করা হয়। যথা,

$L \tan \theta$ বলিতে বুঝাইবে, $10+\log \tan \theta$.

যদিও কোন কোণের সিক্যান্ট এবং কোসিক্যান্ট, $\pi/4$ এবং $\pi/2$ এর মধ্যবর্তী কোণগুলির ট্যানজেন্ট অথবা 0 এবং $\pi/4$ এর অন্তর্বর্তী কোণসমূহের কোট্যানজেন্ট (প্রান্তীয় কোণগুলি ব্যতিরেকে) ঋণাত্মক নহে, তথাপি সমরূপতা (uniformity) বজায় রাখিবার জন্য ইহাদের লগারিদ্‌ম্‌ এর সহিতও 10 যোগ করা হয়।

0° হইতে 90° পর্যন্ত $1'$ অন্তরে গৃহীত সকল কোণের $L \sin \theta$, $L \cos \theta$, $L \tan \theta$, প্রভৃতির মান যে কোন প্রমাণ (standard) তালিকা হইতে পাওয়া যাইতে পারে।

'সমানুপাতিক অংশের নীতি'-নির্ভর মধ্যবর্তিতার নিয়ম (Interpolation based on the principle of proportional parts)

লগারিদ্‌মিক্‌ তালিকা ব্যবহারের সময় প্রায়ই সমানুপাতিক অংশের নীতি অনুসারে মধ্যবর্তিতার নিয়ম অনুসরণের প্রয়োজন হয়। নিয়মটি নিম্নে বিবৃত হইল :

আর্গুমেন্টের **সামান্য পরিবর্তনের** ক্ষেত্রে আর্গুমেন্টটির লগারিদম্‌এ যে পার্থক্য সৃষ্ট হয় তাহা আর্গুমেন্টটির পার্থক্যের সহিত **প্রায় সমানুপাতিক**।

[For a **small change** in the argument, the change produced in their logarithms is **very nearly proportional** to the change in the argument.]

অতি সামান্য পরিবর্তনের ক্ষেত্রেই কেবল এই নিয়মের প্রয়োগ করা যাইবে। যেমন, log 7 এবং log 8 এর মান হইতে log 7·5 এর মান নির্ণয়ের জন্য এই নিয়ম অবশ্যই প্রয়োগ করা যাইবে না। কিন্তু যে ক্ষেত্রে এই নিয়ম প্রয়োগ করা চলিবে, সে ক্ষেত্রে যদি সংখ্যাগুলি কমপক্ষে চারি অঙ্কের হয়, তবে প্রাপ্ত ফলকে পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান হিসাবে গ্রহণ করা যাইবে। অনুরূপভাবে, সংখ্যাগুলি যদি কমপক্ষে তিন অঙ্কবিশিষ্ট হয়, তবে সাধারণভাবে ফলটিকে চারি দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান হিসাবে ধরা যাইবে।

পরবর্তী স্মরণযোগ্য বিষয়টি হইল এই যে অখণ্ড সংখ্যক ডিগ্রী ও মিনিট লইয়া গঠিত কোন কোণের সাইন তালিকা (tables) হইতে পাওয়া যায়; কিন্তু কোণটিতে যদি সেকেণ্ডও থাকে তবে ঐ সাইন মান নির্ণয় করিতে 'সমানুপাতিক অংশের নীতি' প্রয়োগ করা চলিবে। অনুরূপভাবে L sin θ, L tan θ প্রভৃতির ক্ষেত্রেও একই পদ্ধতি অবলম্বন করিতে হইবে।

মন্তব্য ঃ

সমানুপাতিক অংশের নীতি প্রয়োগের সময় মনে রাখিতে হইবে যে কোণের মান 0° হইতে 90° অভিমুখে যেমন বৃদ্ধি পায়, সাইন, ট্যানজেণ্ট, সিক্যাণ্ট এবং লগারিদ্‌মিক্‌ সাইন, ট্যানজেণ্ট ও সিক্যাণ্ট অপেক্ষকসমূহের মানও সঙ্গে সঙ্গে বৃদ্ধি পায়, কিন্তু কোসাইন, কোটানজেণ্ট, কোসিক্যাণ্ট এবং লগারিদ্‌মিক কোসাইন, কোট্যানজেণ্ট ও কোসিক্যাণ্টের মান হ্রাস পাইতে থাকে।

নিম্নের দৃষ্টান্তগুলিতে উক্ত নীতিসমূহের প্রয়োগ-কৌশল প্রদর্শিত হইল ঃ—

উদা. 1. প্রদত্ত log 18·906 = 1·2765997 এবং log 18·907 = 1·2766226; log 1890·635 নির্ণয় কর।

যেহেতু প্রদত্ত মান দুইটি হইতে লেখা যায়

log 1890·700 = 3·2766226

এবং log 1890·600 = 3·2765997

∴ 0·100 এর জন্য অন্তর 0·0000229.

(এক্ষেত্রে সাধারণত লেখা হয় যে 100 এর জন্য অন্তর 229.)

এখন 1890·635, 1890·600 অপেক্ষা ·035 বৃহত্তর, কারণ

1890·635 − 1890·600 = 0·035 [ইহাকে সাধারণতঃ লেখা হয় 35]।

∴ 0·035 (বা 35, যা সাধারণত লেখা হইয়া থাকে) এর জন্য পার্থক্য হইল

$$\frac{0{\cdot}0000229}{0{\cdot}100} \times 0{\cdot}035 = 0{\cdot}0000080 \text{ (প্রায়)।}$$

[সাধারণত লিখিত হয়: $\frac{229}{100} \times 35 = 80$ (প্রায়)।]

$\therefore \log 1890{\cdot}635 = 3{\cdot}2765997 + 0{\cdot}0000080 = 3{\cdot}2766077.$

উদা. 2. প্রদত্ত $\sin 43°28' = 0{\cdot}6879325$, $\sin 43°29' = 0{\cdot}6881435$; $\sin 43°28'14''$ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত: $1'$ এর জন্য অন্তর $= 0{\cdot}6881435 - 0{\cdot}6879325 = 0{\cdot}0002110$;

সুতরাং $14''$ এর জন্য অন্তর $= \frac{2110 \times 14}{60} = 492$ (প্রায়), অর্থাৎ,

প্রকৃতপক্ষে $0{\cdot}0000492$.

$\therefore \sin 43°28'14'' = 0{\cdot}6879325 + 0{\cdot}0000492 = 0{\cdot}6879817$ (প্রায়)।

উদা. 3. প্রদত্ত $L \tan 28°11' = 9{\cdot}7290196$

$L \tan 28°12' = 9{\cdot}7293230$;

$L \tan 28°11'18''$ নির্ণয় কর।

$1'$ এর জন্য প্রদত্ত অন্তর $= 9{\cdot}7293230 - 9{\cdot}7290196 = 0{\cdot}0003034$.

$\therefore$ $18''$ এর জন্য অন্তর $= \frac{3034}{60} \times 18 = 910$ (প্রায়), অর্থাৎ,

প্রকৃতপক্ষে $0{\cdot}0000910$.

$\therefore L \tan 28°11'18'' = 9{\cdot}7290196 + 0{\cdot}0000910$
$= 9{\cdot}7291106$ (প্রায়)।

প্রশ্নমালা IX

[ছাত্রছাত্রীদের উচিত হইবে, বীজগণিতের লগারিদ্‌ম্‌ সংক্রান্ত উদাহরণগুলি পাঠ করা—এ প্রসঙ্গে লেখকদের বীজগণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য। ত্রিকোণমিতির পক্ষে উপযুক্ত কতিপয় প্রশ্ন নিম্নে প্রদত্ত হইল।]

1. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির লগারিদ্‌ম্‌ নির্ণয় কর:

512, 16, 81, 10, ·01, যখন নিধানগুলি হইল

যথাক্রমে 2, 8, $\sqrt{3}$, ·01, ·001. [উঃ 9, $\frac{4}{3}$, 8, $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$]

2. প্রদত্ত $\log_{10} 2 = 0{\cdot}30103$ এবং $\log_{10} 3 = 0{\cdot}47712$; নিম্নে সংখ্যাগুলির লগারিদ্‌ম্‌ নির্ণয় কর:

(*i*) 30; (*ii*) 120; (*iii*) 25; (*iv*) 2·5; (*v*) $\sqrt{6}$; (*vi*) $(24)^{\frac{1}{3}}$

[উঃ (*i*) 1·47712; (*ii*) 2·07918; (*iii*) 1·39794; (*iv*) 0·39794 (*v*) 0·38908; (*vi*) 0·46007.]

3. নিম্নে প্রদত্ত সংখ্যাগুলির সাধারণ লগারিদ্‌ম্‌-এর পূর্ণক নির্ণয় কর:

(*i*) 5876; (*ii*) 0·4798; (*iii*) 33·75; (*iv*) 0·00042576.

[উঃ (*i*) 3, (*ii*) −1, (*iii*) 1, (*iv*) −4.]

4. দেখাও যে :

(i) $\log(1+2+3)=\log 1+\log 2+\log 3$.

(ii) $7\log\frac{16}{15}+5\log\frac{25}{24}+3\log\frac{81}{80}=\log 2$.

(iii) $\log 2+16\log\frac{16}{15}+12\log\frac{25}{24}+7\log\frac{81}{80}=1$.

5. নিম্নের প্রত্যেকটির সমতা যাচাই কর :

(i) antilog 2·5616 = 364·40.

(ii) antilog 0·7077 = 5·1010.

(iii) antilog $\bar{2}$·8136 = 0·0651.

6. (i) প্রদত্ত log 165·62 = 2·2191128, log 165·63 = 2·2191390 ;
দেখাও যে log 1656·24 = 3·2191233 (প্রায়) ।

(ii) প্রদত্ত log 33656 = 4·5270625, log 33657 = 4·5270754 ;
দেখাও যে log 33·656208 = 1·5270652 (প্রায়) ।

(iii) দেখাও যে $\sin 38°3'35'' = 0·6164825$ (প্রায়), যদি
$\sin 38°4' = 0·6165780$, $\sin 38°3' = 0·6163489$.

(iv) প্রদত্ত $\cos 32°16' = 0·84557$, $\cos 32°17' = 0·84542$;
দেখাও যে $\cos 32°16'24'' = 0·84551$ (প্রায়) ।

(v) দেখাও যে $\tan 76°21'29'' = 4·12031$ (প্রায়), যদি
$\tan 76°21' = 4·11778$, $\tan 76°22' = 4·12301$.

7. (i) প্রদত্ত $L\sin 44°18' = 9·8441137$,
$L\sin 44°17' = 9·8439842$,
দেখাও যে $L\sin 44°17'33'' = 9·8440554$ (প্রায়) ।

(ii) প্রদত্ত $L\tan 27°13' = 9·7112148$,
$L\tan 27°14' = 9·7115254$,
দেখাও যে $L\tan 27°13'25'' = 9·7113442$ (প্রায়) ।

(iii) প্রদত্ত $L\sec 18°27' = 10·0229168$,
$L\sec 18°28' = 10·0229590$,
দেখাও যে $L\sec 18°27'35'' = 10·0229414$ (প্রায়) ।

(iv) প্রদত্ত $L\,\mathrm{cosec}\,40°5' = 10·1911808$, 1′ এর জন্য অন্তর = 1502,
দেখাও যে $L\,\mathrm{cosec}\,40°4'17·5'' = 10·1912872$ (প্রায়) ।

10

ত্রিভুজের ধর্ম
(Properties of Triangles)

10·1. সূচনা

সমকোণী ত্রিভুজের ধর্ম ও উহার সমাধান প্রণালীর সহিত ইতিপূর্বে ছাত্রছাত্রীদের 3·3 **অনুচ্ছেদে** পরিচয় ঘটিয়াছে। এখন যে ত্রিভুজের কোন কোণ সমকোণ নহে তাহা হইল **বিষমকোণী ত্রিভুজ (oblique triangle)**। এইরূপ একটি ত্রিভুজের হয় তিনটি কোণই সূক্ষ্মকোণ অথবা দুইটি সূক্ষ্ম ও একটি স্থূলকোণ। বর্তমান এবং পরবর্তী অধ্যায়ে যে কোন ত্রিভুজের—অবশ্য সামতলিক ত্রিভুজের—ধর্ম ও উহার সমাধান প্রণালী বিষয়ে আলোচনা করা হইবে, তা ত্রিভুজটি সমকোণীই হউক আর বিষমকোণীই হউক। কোণ তিনটিকে A, B, C দ্বারা এবং অনুরূপ বিপরীত বাহুতিনটির দৈর্ঘ্যকে a, b, c দ্বারা নির্দেশ করার প্রচলিত রীতি এস্থলে অনুসৃত হইবে। প্রসঙ্গতঃ স্মরণীয় যে $A+B+C=\pi$.

10·2. কতিপয় প্রতিপাদ্য

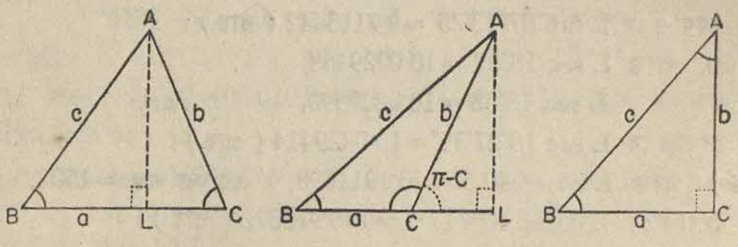
প্রতিপাদ্য 1. সাইনের সূত্র (The law of sines) : যে কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি উহাদের বিপরীত কোণের সাইনের সমানুপাতী ; অর্থাৎ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রে

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

আরও সাধারণভাবে বলিলে, যদি ABC ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R হয়, তবে

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

প্রমাণ। ধরা যাক্ ABC যে কোন ত্রিভুজ। A, B, এবং C কোণ তিনটির যে



চিত্র 10.1(a) চিত্র 10.1(b) চিত্র 10.1(c)

কোন দুইটিকে সূক্ষ্মকোণ এবং তৃতীয়টিকে হয় সূক্ষ্ম অথবা স্থূল অথবা সমকোণ ধরিয়া সকল ত্রিভুজের ক্ষেত্রেই বিবেচনা করা হইবে। এখানে C কে সূক্ষ্ম অথবা স্থূল অথবা সমকোণ ধরা হইবে।

10·1. (a) চিত্রে, C সূক্ষ্ম ; (b) তে, C স্থূল এবং (c) তে, C 90° ; BC অথবা BC বর্ধিতের উপর AC লম্ব অঙ্কিত হইল, (c) তে কিন্তু AC নিজেই লম্ব।

ক্ষেত্র I. যখন C সূক্ষ্ম অথবা স্থূল [চিত্র 10.1 (a) এবং (b)]

ABL ত্রিভুজে, $AL = AB \sin B = c \sin B$,

এবং ACL ত্রিভুজে, $AL = AC \sin C = b \sin C$ [a চিত্রে]

সুতরাং, $c \sin B = b \sin C$, বা $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

অনুরূপভাবে (B হইতে CAর উপর অথবা C হইতে ABর উপর লম্ব অঙ্কন করিয়া), পাওয়া যায়

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin B}, \text{ বা, } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

সুতরাং,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

ক্ষেত্র II. যখন C = 90° [চিত্র 10. 1 (c)].

$\sin B = \dfrac{b}{c}$, $\sin A = \dfrac{a}{c}$, $\sin C = \sin 90° = 1$.

সুতরাং,

$$\frac{a}{\sin A} = c = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{1} = \frac{c}{\sin C}$$

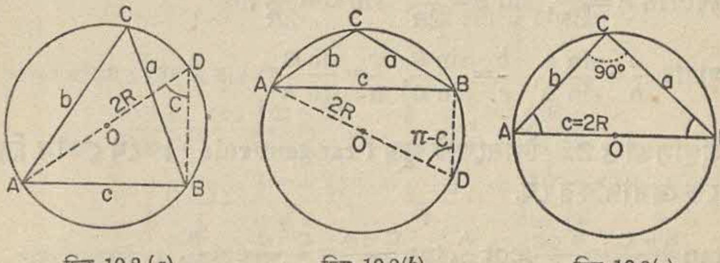
অতএব যে কোন ত্রিভুজে শেষ পর্যন্ত পাওয়া যায়

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

বিকল্প প্রমাণ।

ধরা যাক, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং পরিব্যাসার্ধ R

ক্ষেত্র 1. যখন C সূক্ষ্ম অথবা স্থূল [চিত্র 10.2 (a) এবং (b)]



চিত্র 10.2 (a) চিত্র 10.2(b) চিত্র 10.2(c)

AO যুক্ত করিয়া বর্ধিত করা হইল ; উহা বৃত্তটির পরিধিকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। DB যুক্ত করা হইল। তাহা হইলে AO = R, AD = 2R, ∠ABD = 90°.

যখন C সূক্ষ্ম, $\angle ADB = \angle ACB = C$, কারণ উভয়ে একই বৃত্তাংশ ABC তে অবস্থিত।

আবার, যখন, C স্থূল, $\angle ADB = \pi - \angle ACB = \pi - C$, যেহেতু ADBC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

সুতরাং, উভয় ক্ষেত্রে, $\sin ADB = \sin C$, যাহার ফলে $\triangle ABD$ হইতে,

$$\sin ADB = \sin C = c/2R.$$

অনুরূপভাবে (BO এবং CO যুক্ত করিয়া এবং পরিধি পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া) পাওয়া যায়

$$\sin B = b/2R \text{ এবং } \sin A = a/2R$$

সুতরাং,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

ক্ষেত্র II. **যখন** $c = 90^\circ$ [চিত্র 10.2 (*c*)]

O বিন্দু স্পষ্টত ABর উপর অবস্থিত এবং $AB = 2R$; আবার,
$\sin A = a/2R$, $\sin B = b/2R$, $\sin C = \sin 90^\circ = 1 = c/c = c/2R$.
সুতরাং,

$$\frac{a}{\sin A} = 2R = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

এইভাবে শেষ পর্যন্ত যে কোন ত্রিভুজে

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

অতএব প্রতিপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

অনুসিদ্ধান্ত 1. যে কোন ত্রিভুজে,

$$a = 2R \sin A,\ b = 2R \sin B,\ c = 2R \sin C;$$

এবং $\sin A = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$;

আবার $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin A}{\sin B}$, $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$, $\dfrac{c}{a} = \dfrac{\sin C}{\sin A}$.

অনুসিদ্ধান্ত 2. **ট্যানজেণ্ট সূত্র (tangent rule) :** **যে কোন ত্রিভুজ ABCতে প্রমাণ কর যে,**

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2},\ \tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2},$$

$$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

প্রমাণ। প্রতিপাদ্য 1 হইতে, যে কোন ত্রিভুজ ABCর ক্ষেত্রে পাওয়া গিয়াছে যে

$$a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C.$$

সুতরাং ইহা হইতে পাওয়া যায় যে

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}$$

অতএব
$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} = \frac{2\cos\frac{1}{2}(B+C)\sin\frac{1}{2}(B-C)}{2\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C)}$$
$$= \tan\tfrac{1}{2}(B-C)\cot\tfrac{1}{2}(B+C)$$
$$= \tan\tfrac{1}{2}(B-C)\cot\tfrac{1}{2}(\pi - A), \text{ কারণ } A+B+C=\pi$$
$$= \tan\tfrac{1}{2}(B-C)\cot(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}A)$$
$$= \tan\tfrac{1}{2}(B-C)\tan\tfrac{1}{2}A$$

সুতরাং, $\tan\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{b-c}{b+c}\cot\dfrac{A}{2}$.

অনুরূপভাবে অপর দুইটিও প্রমাণ করা যায়। অতএব অনুসিদ্ধান্তটি পাওয়া যায়।

অনুসিদ্ধান্ত 3. Mollweide এর সূত্র : প্রমাণ কর যে যে-কোন ত্রিভুজ ABC তে,

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}, \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}.$$

প্রমাণ। সাইনের সূত্র হইতে,

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C} \text{ এবং } \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}$$

তাহা হইলে
$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}$$
$$= \cos\tfrac{1}{2}(A-B)/\sin\tfrac{1}{2}C, \text{ কারণ } \sin\tfrac{1}{2}(A+B)$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}(\pi - C) = \cos\tfrac{1}{2}C.$$

অনুরূপে $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\sin A - \sin B}{\sin C} = \dfrac{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$ ইত্যাদি।

একই প্রকারে দেখান যায় যে

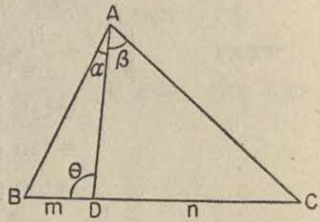
$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}A}, \quad \frac{b-c}{a} = \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}A}$$
$$\frac{c+a}{b} = \frac{\cos\frac{1}{2}(C-A)}{\sin\frac{1}{2}B}, \quad \frac{c-a}{b} = \frac{\sin\frac{1}{2}(C-A)}{\cos\frac{1}{2}B}.$$

অনুসিদ্ধান্ত 4. ধরা যাক, ABC ত্রিভুজের BC ভূমির উপর D এইরূপ যে কোন একটি বিন্দু যেন $BD/DC = m/n$ হয়, এবং $\angle BAD = \alpha$, $\angle DAC = \beta$ ও $\angle ADB = \theta$; তাহা হইলে প্রমাণ কর যে

$$(m+n) \cot \theta = n \cot \beta - m \cot \alpha$$
$$(m+n) \cot \theta = m \cot C - n \cot B.$$

প্রমাণ। প্রদত্ত, $\frac{m}{n}=\frac{BD}{DC}$, যাহাকে লেখা যায়

$$\frac{m}{n}=\frac{BD}{DC}=\frac{BD}{AD}\cdot\frac{AD}{DC}$$



চিত্র 12.3

এখন সাইনের সূত্র হইতে,

$$\frac{BD}{AD}=\frac{\sin \alpha}{\sin \{\pi-(\alpha+\theta)\}}=\frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha+\theta)}$$

এবং $\frac{AD}{DC}=\frac{\sin (\theta-\beta)}{\sin \beta}$,

কারণ $\angle ABD+\alpha+\theta=\pi$ এবং $\angle ACD+\beta=\theta$

$$\therefore \quad \frac{m}{n}=\frac{\sin \alpha \sin (\theta-\beta)}{\sin (\alpha+\theta) \sin \beta}=\frac{\sin \alpha(\sin \theta \cos \beta-\cos \theta \sin \beta)}{\sin \beta(\sin \alpha \cos \theta+\cos \alpha \sin \theta)}$$

এখন লব ও হরকে $\sin \alpha \sin \beta \sin \theta$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাওয়া যায়

$$\frac{m}{n}=\frac{\cot \beta-\cot \theta}{\cot \theta+\cot \alpha},$$ যাহা হইতে

$$(m+n) \cot \theta=n \cot \beta-m \cot \alpha.$$

অনুরূপভাবে দ্বিতীয়টি পাওয়া যাইবে।

প্রতিপাদ্য 2. অভিক্ষেপ সূত্র (Projection formulae)। যে কোন ত্রিভুজ ABCর ক্ষেত্রে,

$$a=b \cos C+c \cos B \; ; \; b=c \cos A+a \cos C \; ;$$
$$c=a \cos B+b \cos A.$$

প্রমাণ। ধরা যাক্, ABC যে কোন ত্রিভুজ, যেখানে C কোণ হয় সূক্ষ্ম, অথবা স্থূল অথবা সমকোণ। BC অথবা বর্ধিত BCর উপর AL লম্ব অঙ্কিত হইল ; সমকোণী ত্রিভুজ ABC তে কিন্তু AC নিজেই ঐ লম্ব।

ক্ষেত্র I. যখন C সূক্ষ্মকোণ [চিত্র 10.4(a)]।

$$a=BC=BL+LC=c \cos B+b \cos C,$$

কারণ ABL ত্রিভুজে $\cos B=BL/c$ এবং ALC ত্রিভুজে $\cos C=LC/b$.

ক্ষেত্র II. যখন C স্থূলকোণ [চিত্র 10.4(b)]।

ABL ত্রিভুজ হইতে, $\cos B=BL/c$, বা, $BL=c \cos B$

এবং ACL ত্রিভুজ হইতে, $\cos ACL=\cos (\pi-C)=-\cos C=CL/b$,

বা, $CL=-b \cos C$.

সুতরাং, $a=BC=BL-CL=c \cos B+b \cos C$.

ক্ষেত্র III. যখন $C=90^\circ$ [চিত্র 10.4(c)]।

$$\cos B=a/c,\ \cos C=\cos 90^\circ=0,$$

সুতরাং $a=c\cos B=c\cos B+0=c\cos B+b\cos C.$

অতএব, যে কোন ত্রিভুজে

$$a=b\cos C+c\cos B.$$

অনুরূপভাবে অপর সূত্র দুইটি প্রমাণ করা যায়। অতএব, প্রতিপাদ্যটি যথার্থ।

প্রতিপাদ্য 3. কোসাইনের সূত্র (The law of cosines): যে কোন ত্রিভুজে, যে কোন একটি বাহুর বর্গ, অপর দুই বাহুর বর্গের সমষ্টি এবং ঐ দুই বাহু ও উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের কোসাইনের গুণফলের দ্বিগুণের অন্তরফলের সমান; অর্থাৎ কোন ত্রিভুজ ABCর ক্ষেত্রে

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C;\ a^2=b^2+c^2-2bc\cos A;$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B.$$

প্রমাণ। ধরা যাক্, ত্রিভুজটি ABC, যাহার কোণ C হইল সূক্ষ্ম অথবা স্থূল অথবা সমকোণ। C সূক্ষ্মকোণ হইলে BCর উপর এবং C স্থূলকোণ হইলে বর্ধিত BCর উপর AL লম্ব অঙ্কন করা হইল। যখন $C=90^\circ$, তখন AC, BCর উপর লম্ব। চিত্র 10.4(a), (b) এবং (c) দ্রষ্টব্য।

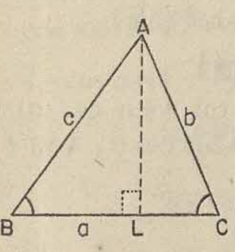
ক্ষেত্র I. যখন C সূক্ষ্মকোণ [চিত্র 10.4(a)]।

ABL ত্রিভুজ হইতে, $c^2=BL^2+LA^2$

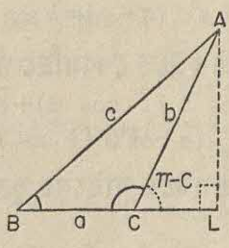
এবং ALC ত্রিভুজ হইতে, $\sin C=LA/b$ এবং $\cos C=LC/b$; যাহা হইতে

$LA=b\sin C,\ LC=b\cos C,\ BL=a-b\cos C$

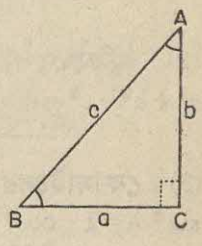
এবং $c^2=(a-b\cos C)^2+b^2\sin^2 C=a^2+b^2-2ab\cos C.$



চিত্র 10.4(a)



চিত্র 10.4(b)



চিত্র 10.4(c)

ক্ষেত্র II. যখন C স্থূলকোণ [চিত্র 10.4 (b)]

ABL ত্রিভুজ হইতে, $c^2=BL^2+LA^2$;

এবং ACL ত্রিভুজ হইতে,

$$\sin(\pi-C)=\sin C=LA/b,\ \cos(\pi-C)=-\cos C=CL/b.$$

সুতরাং, $LA=b\sin C,\ CL=-b\cos C,\ BL=a-b\cos C.$

এবং $c^2=(a-b\cos C)^2+b^2\sin^2 C=a^2+b^2-2ab\cos C$

ক্ষেত্র III যখন $C=90^\circ$ [চিত্র 10.4 (c)]

$c^2=a^2+b^2=a^2+b^2-2ab\cos C$, কারণ $\cos C=\cos 90^\circ=0$.

এইভাবে শেষ পর্যন্ত দেখা গেল যে, যে কোন ত্রিভুজে

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

অপর সূত্র দুইটিও একইভাবে প্রমাণ করা যাইবে। সুতরাং প্রতিপাদ্যটি যথার্থ।

অনুসিদ্ধান্ত। শেষ প্রতিপাদ্যতে প্রাপ্ত ফলগুলি নিম্নবর্ণিত আকারেও লেখা যায়, যথা

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

ইহার সহিত প্রতিপাদ্য 1 হইতে প্রাপ্ত ফলগুলি, যথা

$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$ কে যদি যুক্ত করা যায়,

তবে ভাগক্রিয়ার দ্বারা পাওয়া যায়

$$\tan A=\frac{abc}{R(b^2+c^2-a^2)},\ \tan B=\frac{abc}{R(c^2+a^2-b^2)},$$
$$\tan C=\frac{abc}{R(a^2+b^2-c^2)}.$$

মন্তব্য ঃ 1 হইতে 3 পর্যন্ত প্রতিপাদ্যগুলিতে প্রাপ্ত সূত্রগুলির সেট (set) তিনটি পরস্পর নিরপেক্ষ (independent) নহে ; যে কোন একটি সেট হইতে অপর দুইটি পাওয়া যায় ; যথা ঃ

(1) সাইনের সূত্র হইতে অভিক্ষেপের সূত্রসমূহ

ধরা যাক্ $a/\sin A=b/\sin B=c/\sin C=k$ (একটি ধ্রুবক) ; তাহা হইলে

$$a\cos B+b\cos A=k(\sin A\cos B+\cos A\sin B)=k\sin(A+B)$$
$$=k\sin(\pi-C)=k\sin C=c, \text{ ইত্যাদি।}$$

(2) অভিক্ষেপের সূত্র হইতে কোসাইনের সূত্র :

$$a^2+b^2-c^2=a(b\cos C+c\cos B)+b(c\cos A+a\cos C)$$
$$-c(a\cos B+b\cos A)=2ab\cos C\text{ ; ইত্যাদি।}$$

(3) কোসাইনের সূত্র হইতে সাইনের সূত্র

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A$$
$$=1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2=\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$$
$$=\frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{4b^2c^2}$$
$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$$

$=\frac{k}{4b^2c^2}$, ধরা যাক্, যেখানে $k=(b+c+a)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

সুতরাং $\dfrac{\sin^2 A}{a^2}=\dfrac{k}{4a^2b^2c^2}$.

তদ্রূপ, $\dfrac{\sin^2 B}{b^2}=\dfrac{k}{4a^2b^2c^2}$ এবং $\dfrac{\sin^2 C}{c^2}=\dfrac{k}{4a^2b^2c^2}$

সুতরাং $\dfrac{\sin^2 A}{a^2}=\dfrac{\sin^2 B}{b^2}=\dfrac{\sin^2 C}{c^2}$, ইত্যাদি।

অপরগুলি ছাত্রছাত্রীদের অনুশীলনীরূপে করা বাঞ্ছনীয়।

প্রতিপাদ্য 4. অর্ধ-কোণের সূত্রাবলী (Half angle formulae)। যে কোন ত্রিভুজ ABCর ক্ষেত্রে,

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\,;\ \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\,;$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

যেখানে $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ হইল ত্রিভুজটির অর্ধ-পরিসীমা; এবং অক্ষরগুলির ক্রম-পরিবর্তন (cyclic changes) দ্বারা লব্ধ অন্য সূত্রসমূহ অর্থাৎ,

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\,;\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\,;$$

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\,;\ \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\,;$$

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\,;\ \tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

প্রমাণ। কোসাইনের সূত্র হইতে পাওয়া যায় যে, যে কোন ত্রিভুজ ABCর ক্ষেত্রে $\cos A=(b^2+c^2-a^2)/2bc$; সুতরাং

$$1-\cos A=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}=\frac{(2s-2c)(2s-2b)}{2bc}$$

$$=\frac{2(s-b)(s-c)}{bc},\ \text{কারণ } 2s=a+b+c.$$

আবার, $1+\cos A=1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}=\frac{2s(2s-2a)}{2bc}$$

সুতরাং $1-\cos A=2\sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{2(s-b)(s-c)}{bc}$

$$1+\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{2s(s-a)}{bc}\,;$$

ইহা হইতে পাওয়া যায়,

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \text{ এবং } \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}};$$

এখানে উভয়ক্ষেত্রে বর্গমূলের চিহ্ন ধনাত্মক লওয়া হইয়াছে, কারণ $(A/2)<90^\circ$, যেহেতু A, B, C, হইল ত্রিভুজের কোণ। এখন ভাগক্রিয়ার দ্বারা পাওয়া যায়,

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

অবশিষ্ট সূত্রগুলি একই প্রকারে প্রমাণ করা যায়। সুতরাং প্রতিপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

টীকা। $\tan\frac{A}{2}$এর উল্লিখিত মানটি নিম্নের সূত্রটি হইতে সরাসরি নির্ণয় করা যায়, যথা $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$

প্রতিপাদ্য 5. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্রসমূহ : যে কোন ত্রিভুজ ABCর ক্ষেত্রফল $\triangle$ নিম্নে প্রদত্ত প্রণালী দ্বারা পাওয়া যায়, যথা :

(1) $\triangle=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

$=\frac{1}{2}\times$ **(দুইটি বাহুর গুণফল) $\times$ বাহুদুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সাইন, যখন বাহু দুইটি ও উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ প্রদত্ত হয় :**

(2) $\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,

যখন বাহু তিনটি প্রদত্ত হয় ;

(3) $\triangle=\frac{abc}{4R}$,

যখন বাহু তিনটি এবং পরিব্যাসার্ধ প্রদত্ত হয়।

প্রমাণ। চিত্র 10.4 (a), (b) এবং (c) দ্রষ্টব্য।

C যখন সূক্ষ্মকোণ, $\sin C=AL/b$ এবং

C যখন স্থূলকোণ, $\sin ACL=\sin(\pi-C)=\sin C=AL/b$; উভয় ক্ষেত্রে দেখা যায় যে

$$AL=b\sin c,$$

সুতরাং ক্ষেত্রফল $\triangle$ হইল নিম্নরূপ, যথা

$$\triangle=\frac{1}{2}(\text{ ভূমি })\times(\text{ উচ্চতা })$$
$$=\frac{1}{2}(BC)\times(AL)=\frac{1}{2}ab\sin C$$

এখন $C=90^\circ$ হইলে, $\sin C=\sin 90^\circ=1$,

এবং $\triangle=\frac{1}{2}(BC)\times(AC)=\frac{1}{2}ab.\ 1=\frac{1}{2}ab\sin C$.

সুতরাং যে কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রে

(1)...... $\triangle=\frac{1}{2}ab\sin C$.

অনুরূপভাবে (1) এর অন্য সূত্র দুইটি প্রমাণ করা যায়।

আবার,

$$\triangle = \tfrac{1}{2}ab \sin c = \tfrac{1}{2}ab.\ 2 \sin \tfrac{1}{2}C \cos \tfrac{1}{2}C$$

$$= ab\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.\ \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$(2) \cdots\cdots \quad = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

পুনরায়, সাইনের সূত্র হইতে যেহেতু পাওয়া যায়

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

সুতরাং

$$(3) \cdots\cdots \triangle = \tfrac{1}{2}ab \sin C = \frac{abc}{4R}$$

অতএব প্রতিপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

10·3 কতিপয় প্রয়োজনীয় উপসূত্র (Some useful results)

(A) কোণের সাইনকে বাহুর দ্বারা প্রকাশ

$$\sin A = 2 \sin A/2 \cos A/2$$

$$= 2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\ \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$= \{2/(bc)\} \sqrt{s(s-a)(s-b)\ s-c)}$$

অনুরূপে,

$$\sin B = \{2/(ca)\} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

এবং $\sin C = \{2/(ab)\} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$

(B) প্রমাণ কর যে

$$\sin A = \frac{2\triangle}{bc},\ \sin B = \frac{2\triangle}{ca},\ \sin C = \frac{2\triangle}{ab}$$

যেহেতু $\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b\ (s-c)}$, সুতরাং (A) হইতে এইগুলি পাওয়া যায়।

(C) দেখাও যে

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{\triangle},\ \tan\frac{B}{2} = \frac{(s-c)(s-a)}{\triangle},$$

$$\tan\frac{C}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{\triangle}$$

প্রতিপাদ্য 4 হইতে,

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \frac{(s-b)(s-c)}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},\ \text{ইত্যাদি।}$$

টীকা। $\cot\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{\triangle},\ \cot\frac{B}{2} = \frac{s(s-b)}{\triangle},\ \cot\frac{C}{2} = \frac{s(s-c)}{\triangle}$

10·31. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণসমূহ

উদা. 1. দেখাও যে, যে কোন ত্রিভুজ ABCতে (প্রচলিত অঙ্কপাতন অনুসারে),

$$b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)+a(\sin B-\sin C)=0$$

যেহেতু $a/\sin A=b/\sin B=c/\sin C$, সুতরাং

$$b\sin A=a\sin B,\ c\sin B=b\sin C,\ c\sin A=a\sin C,$$

এবং বামপক্ষ $=(b\sin C-c\sin B)+(c\sin A-a\sin C)$

$$+(a\sin B-b\sin A)=0+0+0=0.$$

উদা. 2. $A=60^\circ$ হইলে দেখাও যে ABC ত্রিভুজে,

$$b+c=2a\cos\tfrac{1}{2}(B-C).$$

$$b+c=2R(\sin B+\sin C)=4R\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=4R\sin\frac{120^\circ}{2}\cos\frac{B-C}{2}=4R\sin A\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=2a\cos\frac{B-C}{2},\text{ কারণ } B+C=180^\circ-A=120^\circ$$

উদা 3. কোন ত্রিভুজ ABCর ক্ষেত্রে অঙ্কপাতনের প্রচলিত তাৎপর্য অনুসারে প্রমাণ কর যে

$$\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0.$$

যেহেতু, $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}=\dfrac{4R^2\sin^2 A\sin(B-C)}{\sin A}$, [প্রতিপাদ্য 1]

$$=4R^2\sin(B+C)\sin(B-C),\text{ কারণ } A+B+C=\pi$$

$$=4R^2(\sin^2 B-\sin^2 C)$$

সুতরাং বামপক্ষ $=4R^2(\sin^2 B-\sin^2 C+\sin^2 C-\sin^2 A+\sin^2 A$

$$-\sin^2 B)=0.$$

উদা 4. যে কোন ত্রিভুজ ABCর ক্ষেত্রে (অঙ্কপাতনের প্রচলিত তাৎপর্য অনুসারে) প্রমাণ কর যে cot A, cot B, cot C সমান্তর প্রগতিতে থাকে, যদি a^2, b^2, c^2 সমান্তর প্রগতিতে হয়।

প্রতিপাদ্য 1 এর অনুসিদ্ধান্ত অনুসারে

$$\cot A=\frac{R(b^2+c^2-a^2)}{abc},\ \cot B=\frac{R(c^2+a^2-b^2)}{abc}\text{ ইত্যাদি।}$$

সুতরাং, cot A, cot B, cot C সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে, যদি

$$\cot B-\cot A=\cot C-\cot B,\text{ হয়,}$$

অর্থাৎ যদি $\dfrac{R}{abc}(c^2+a^2-b^2-b^2-c^2+a^2)$

$$=\frac{R}{abc}(a^2+b^2-c^2-c^2-a^2+b^2)\text{ হয়,}$$

বা যদি $2(a^2-b^2)=2(b^2-c^2)$ হয়, অর্থাৎ যদি $b^2-a^2=c^2-b^2$ হয়,
বা যদি a^2, b^2, c^2 সমান্তর প্রগতিতে হয়।

উদা. 5. প্রমাণ কর যে $(s-a)\tan\frac{1}{2}A=(s-b)\tan\frac{1}{2}B=(s-c)\tan\frac{1}{2}C$.

প্রতিপাদ্য 4 হইতে,

$$(s-a)\tan(A/2)=(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{\triangle}.$$

অনুরূপভাবে অপর অংশ দুইটি হইতেও এই একই মান পাওয়া যাইবে। সুতরাং···

উদা. 6. দেখাও যে

$$b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=4\triangle$$

বামপক্ষ $=b^2.\ 2\sin C\cos C+c^2.\ 2\sin B\cos B$

$=2b\sin C.\ b\cos C+2c\sin B.\ c\cos B$

$=2b\sin C\,(b\cos C+c\cos B)$, কারণ $b/\sin B=c/\sin C$

$=2\,ab\sin C$, অভিক্ষেপের সূত্র হইতে,

$=4\,\triangle$, কারণ $\triangle=\frac{1}{2}ab\sin C$.

প্রশ্নমালা X (A)

যে কোন ত্রিভুজ ABCর ক্ষেত্রে (অঙ্কপাতনের প্রচলিত তাৎপর্য অনুসারে) প্রমাণ কর যে (1 – 39) :

1. $\sin\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2}$.   2. $\cos\frac{A-B}{2}=\frac{a+b}{c}\sin\frac{C}{2}$.

3. $\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{A+B}{2}$.

4. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$

[ইঙ্গিত : $a=2R\sin A=2R\sin(B+C)$, কারণ $A+B+C=\pi$,
$a\sin(B-C)=2R\sin(B+C)\sin(B-C)=2R(\sin^2B-\sin^2C)$ ইত্যাদি।]

5. $a^2(\sin^2 B-\sin^2 C)+b^2(\sin^2 C-\sin^2 A)$
$+c^2(\sin^2 A-\sin^2 B)=0.$

6. $a^2(\cos^2 B-\cos^2 C)+b^2(\cos^2 C-\cos^2 A)$
$-c^2(\cos^2 B-\cos^2 A)=0$

7. $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c$

[**সমাধান :** বামপক্ষ $=(b\cos A+a\cos B)+(c\cos A+a\cos C)$
$+(b\cos C+c\cos B)=a+b+c$]

8. $a(b\cos C-c\cos B)=b^2-c^2$.

9. $bc \cos A + ca \cos B + ab \cos C = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

10. $b \cos^2 \frac{1}{2} C + c \cos^2 \frac{1}{2} B = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

11. $\frac{b^2-c^2}{a} \cos A + \frac{c^2-a^2}{b} \cos B + \frac{a^2-b^2}{c} \cos C = 0$.

12. $(b-c) \cos \frac{A}{2} = a \sin \frac{B-C}{2}$.

13. $\frac{a \sin (B-C)}{b^2-c^2} = \frac{b \sin (C-A)}{c^2-a^2} = \frac{c \sin (A-B)}{a^2-b^2}$.

14. $\frac{a^2 \sin (B-C)}{\sin B + \sin C} + \frac{b^2 \sin (C-A)}{\sin C + \sin A} + \frac{c^2 \sin (A-B)}{\sin A + \sin B} = 0$.

15. $a^3 \sin (B-C) + b^3 \sin (C-A) + c^3 \sin (A-B) = 0$.

16. $a^3 \cos (B-C) + b^3 \cos (C-A) + c^3 \cos (A-B) = 3abc$.

17. $a \cos (B-C) + b \cos (C-A) + c \cos (A-B) = abc/R^2$.

18. $\frac{\sin (B-C)}{\sin (B+C)} = \frac{b^2-c^2}{a^2}$.

19. $a \sin (\frac{1}{2}A + B) = (b+c) \sin \frac{1}{2} A$.

20. $a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A = 2ab \sin C = 4\triangle$.

21. $\frac{b^2-c^2}{a^2} \sin 2A + \frac{c^2-a^2}{b^2} \sin 2B + \frac{a^2-b^2}{c^2} \sin 2C = 0$.

[ইংগিত : $\frac{b^2-c^2}{a^2} \sin 2A = \frac{b^2-c^2}{a^2} \cdot 2 \sin A \cos A$

$= \frac{b^2-c^2}{a^2} \cdot 2 \frac{a}{2R} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{2Rabc}\left\{b^4-c^4-a^2\left(b^2-c^2\right)\right\}$ ইত্যাদি]

22. $(b^2-c^2) \cot A + (c^2-a^2) \cot B + (a^2-b^2) \cot C = 0$

23. $\frac{b^2-c^2}{\cos B + \cos C} + \frac{c^2-a^2}{\cos C + \cos A} + \frac{a^2-b^2}{\cos A + \cos B} = 0$.

24. $(b+c-a) \tan \frac{1}{2} A = (c+a-b) \tan \frac{1}{2} B = (a+b-c) \tan \frac{1}{2} C$.

25. $(b-c) \cot \frac{1}{2} A + (c-a) \cot \frac{1}{2} B + (a-b) \cot \frac{1}{2} C = 0$.

[ইংগিত : বামপক্ষ $= \triangle\left\{\frac{b-c}{(s-b)(s-c)} + \frac{c-a}{(s-c)(s-a)} + \frac{a-b}{(s-b)(s-a)}\right\}$

$= \frac{\triangle}{(s-a)(s-b)(s-c)} \times$

$[s(b-c+c-a+a-b) - \{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}] = 0$]

26. $b \cos^2 \frac{1}{2} A + a \cos^2 \frac{1}{2} B = s$.

27. $b \sin^2 \frac{1}{2} A + a \sin^2 \frac{1}{2} B = s - c$.

28. $s \tan \frac{1}{2} B \tan \frac{1}{2} C = s - a$.

29. $a \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} (B-C) + b \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} (C-A)$
$+ c \sin \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2} (A-B) = 0$

30. $bc \cos^2 \frac{1}{2}A + ca \cos^2 \frac{1}{2}B + ab \cos^2 \frac{1}{2}C = s^2$.

31. $\frac{b-c}{a} \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{c-a}{b} \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{a-b}{c} \cos^2 \frac{C}{2} = 0$.

32. $\frac{a \sin A + b \sin B + c \sin C}{a \cos A + b \cos B + c \cos C} = \frac{R}{abc}(a^2+b^2+c^2)$.

33. $a^2 \cot A + b^2 \cot B + c^2 \cot C = 4\triangle$.

[**সমাধান :**

বামপক্ষ $= 4R^2(\sin^2 A \cot A + \sin^2 B \cot B + \sin^2 C \cot C)$
$= 2R^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$
$= 8R^2 \sin A \sin B \sin C$
[$\because A+B+C=\pi$ (পূর্ববর্তী 'অভেদ' অধ্যায় দ্রষ্টব্য)]
$= 8R^2 . \frac{a}{2R} . \frac{b}{2R} . \frac{2\triangle}{ab} = 4\triangle$. [10·3(B) হইতে]]

34. $4\triangle(\cot A + \cot B + \cot C) = a^2+b^2+c^2$.

35. $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 4R \sin A \sin B \sin C$.

36. $a \sin B \sin C + b \sin C \sin A + c \sin A \sin B = 3\triangle/R$.

37. $a \cos B \cos C + b \cos C \cos A + c \cos A \cos B = abc/4R^2$.

38. $\frac{\cos A}{a} + \frac{a}{bc} = \frac{\cos B}{b} + \frac{b}{ca} = \frac{\cos C}{c} + \frac{c}{ab}$.

39. $\left(\frac{a^2}{\sin A} + \frac{b^2}{\sin B} + \frac{c^2}{\sin C}\right) \sin A/2 \sin B/2 \sin C/2 = \triangle$

[**সমাধান :** $a^2 = 4R^2 \sin^2 A$, $\therefore a^2/\sin A = 4R^2 \sin A$;

বামপক্ষ $= 4R^2(\sin A + \sin B + \sin C) \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C$
$= 16R^2 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C$.
[$\because A+B+C=\pi$ ('অভেদ' অধ্যায় দ্রষ্টব্য)]
$= 2R^2 \sin A \sin B \sin C = 2 . \frac{1}{2}a . \frac{1}{2}b \sin C$
$= \frac{1}{2}ab \sin C = \triangle$.]

40. কোন ত্রিভুজে যদি $a \cos^2 \frac{1}{2}C + c \cos^2 \frac{1}{2}A = \frac{3}{2}b$ হয়, তবে দেখাও যে ত্রিভুজটির বাহুগুলি A. P. তে আছে।

[ইঙ্গিত : $\cos^2 \frac{C}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos C) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$;

অনুরূপভাবে $\cos^2 \frac{1}{2}A$ ইত্যাদি।]

41. কোন ত্রিভুজ ABCর বাহুগুলি A. P. তে হইলে প্রমাণ কর যে $\cot \frac{1}{2}A$, $\cot \frac{1}{2}B$, $\cot \frac{1}{2}C$ও A. P তে আছে।

42. দেখাও যে কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য 3, 5, 7 হইলে উহা স্থূলকোণী।

[**সমাধান :** ধরা যাক $b=3$, $c=5$, $a=7$; তাহা হইলে A বৃহত্তম কোণ। এখন, $\cos A = (b^2+c^2-a^2)/2bc = -\frac{1}{2}$, অর্থাৎ $A = 120°$, ইত্যাদি।]

43. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি $2x+3$, x^2+3x+3, x^2+2x ; দেখাও যে উহার বৃহত্তম কোণটি $2\pi/3$.

44. কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু 300 সে.মি. এবং 120 সে.মি., এবং উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণটি 150° ; দেখাও যে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 9000 বর্গ সে.মি.।

45. দেখাও যে কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 171, 204 এবং 195 একক হইলে উহার ক্ষেত্রফল 15390 বর্গ একক।

46. ABC ত্রিভুজে

(i) যদি $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$ হয়, তবে দেখাও যে $A=60^\circ$.

(ii) যদি $c^4-2(a^2+b^2)c^2+a^4+b^4+a^2b^2=0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $C=60^\circ$ বা 120°.

(iii) যদি $a^4+b^4+c^4-2a^2c^2-2b^2c^2=0$ হয়, তবে দেখাও যে $C=45^\circ$ বা 135°.

(iv) যদি $\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{3}{a+b+c}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $C=60^\circ$.

(v) যদি $a=2b$, $A=3B$ হয় তবে দেখাও যে $A=90^\circ$, $B=30^\circ$, $C=60^\circ$.

[**সমাধান :** (iii) প্রদত্ত সম্বন্ধ হইতে

$$c^4-2c^2(a^2+b^2)+(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=0$$

বা $\{(a^2+b^2)-c^2\}^2=2a^2b^2$

বা $\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2=\frac{1}{2}$, বা $\cos^2 C=\frac{1}{2}$,

বা $\cos C=\pm 1/\sqrt{2}$, বা $C=45^\circ, 135^\circ$]

47. $2\cos A=(\sin B)/(\sin C)$ হইলে দেখাও যে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

48. যদি $(\cos A+2\cos C):(\cos A+2\cos B)=(\sin B):(\sin C)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু নতুবা সমকোণী।

[**ইঙ্গিত :** $\dfrac{\cos A+2\cos C}{\cos A+2\cos B}=\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{b}{c}$

বা $(c-b)\cos A+2c\cos C-2b\cos B=0$

বা $(c-b).\ \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+2c.\ \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-2b.\ \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=0.$

সরল করিয়া, $(c-b)(b^2+c^2-a^2)\{a-2(b+c)\}=0$, সুতরাং………]

49. কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণের কোসাইন, কোণ দুইটির বিপরীত বাহুদ্বয়ের সহিত সমানুপাতী হইলে দেখাও যে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

50. কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণের কোসাইন, উহাদের বিপরীত বাহুদ্বয়ের সহিত ব্যস্ত সমানুপাতে থাকিলে দেখাও যে ত্রিভুজটি হয় সমদ্বিবাহু নতুবা সমকোণী।

[**সমাধান :** এখানে $\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$,

বা $\sin A \cos A = \sin B \cos B$

বা $\sin 2A - \sin 2B = 0$, বা $2\cos(A+B)\sin(A-B) = 0$.

$\therefore$ হয়, $\cos(A+B) = 0$, অর্থাৎ $A+B = \pi/2$, বা ত্রিভুজটি সমকোণী ;

নতুবা, $\sin(A-B) = 0$, অর্থাৎ $A = B$, বা ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।]

51. যদি $(a^2+b^2)\sin(A-B) = (a^2-b^2)\sin(A+B)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি হয় সমদ্বিবাহু নতুবা সমকোণী।

52. যদি $(\sin A) : (\sin C) = \{\sin(A-B)\} : \{\sin(B-C)\}$ হয়, তবে দেখাও যে a^2, b^2, c^2 ; A. P. তে আছে।

53. ABC ত্রিভুজে,

(i) যদি a, b, c ; A.P. তে থাকে, তবে দেখাও যে
$\cos A \cot \frac{1}{2}A, \cos B \cot \frac{1}{2}B, \cos C \cot \frac{1}{2}C$; A.P. তে থাকে।

(ii) যদি a, b, c ; H.P. তে থাকে, তবে দেখাও যে
$\sin^2 \frac{1}{2}A, \sin^2 \frac{1}{2}B, \sin^2 \frac{1}{2}C$; H. P. তে থাকে।

(iii) যদি a^2, b^2, c^2 ; A. P. তে থাকে, তবে দেখাও যে
$\tan A, \tan B, \tan C$; H. P. তে থাকে।

(iv) যদি $\sin A, \sin B, \sin C$; A. P. তে থাকে, তবে দেখাও যে
$3 \tan \frac{1}{2}A \tan \frac{1}{2}C = 1$.

10·4. ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ (Circum-radius of a triangle)

ইতিপূর্বে 10·2 অনুচ্ছেদে দেখা গিয়াছে যে যদি ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ R হয়, তবে

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

এবং $$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} = \frac{abc}{2bc\sin A} = \frac{abc}{4\Delta}.$$

10·5. ত্রিভুজের অন্তর্ব্যাসার্ধ (In-radius of a triangle) : অন্তর্বৃত্ত (In-circle)

সংজ্ঞা। যে বৃত্ত ত্রিভুজের বাহু তিনটিকে স্পর্শ করে তাহাকে ত্রিভুজটির **অন্তর্লিখিত বৃত্ত** বা **অন্তর্বৃত্ত** বলা হয়। অন্তর্বৃত্তটির কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধকে যথাক্রমে I এবং r দ্বারা নির্দেশ করা হইবে। প্রসঙ্গত স্মরণ করা যাইবে যে I হইল ত্রিভুজটির কোণ তিনটির অন্তঃসমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের ছেদবিন্দু এবং r হইল I হইতে যে-কোন বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব-দূরত্বের সমান।

ধরা যাক্, ABC ত্রিভুজের অন্তর্লিখিত বৃত্তটির কেন্দ্র I (চিত্র 10.5) এবং r উহার ব্যাসার্ধ ; এবং অন্তর্বৃত্তটি BC, CA, AB বাহুকে যথাক্রমে D, E, F বিন্দুতে স্পর্শ করে।

ID, IE, IF, IA, IB এবং IC যুক্ত করা হইল।

তাহা হইলে $ID = IE = IF = r$.

(1) এখন, ত্রিভুজ ABCর ক্ষেত্রফল = ত্রিভুজ IBCর ক্ষেত্রফল + ত্রিভুজ ICAর ক্ষেত্রফল + ত্রিভুজ IABর ক্ষেত্রফল।

বা $\Delta = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a+b+c)r = rs.$

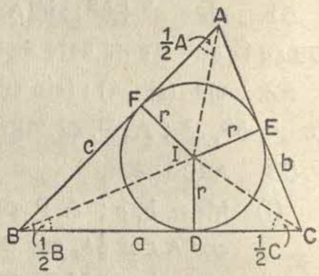
$\therefore\ r = \frac{\Delta}{s} \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots (1)$

(2) আবার, $a = \text{BC} = \text{BD} + \text{DC} = r \cot\frac{1}{2}\text{B} + r\cot\frac{1}{2}\text{C}$

$$= r\left\{\frac{\cos\frac{1}{2}\text{B}}{\sin\frac{1}{2}\text{B}} + \frac{\cos\frac{1}{2}\text{C}}{\sin\frac{1}{2}\text{C}}\right\}$$

$$= r\frac{\cos\frac{1}{2}\text{B}\sin\frac{1}{2}\text{C} + \sin\frac{1}{2}\text{B}\cos\frac{1}{2}\text{C}}{\sin\frac{1}{2}\text{B}\sin\frac{1}{2}\text{C}}$$

$$= r\frac{\sin(\frac{1}{2}\text{B}+\frac{1}{2}\text{C})}{\sin\frac{1}{2}\text{B}\sin\frac{1}{2}\text{C}} = r\frac{\cos\frac{1}{2}\text{A}}{\sin\frac{1}{2}\text{B}\sin\frac{1}{2}\text{C}},$$



চিত্র 10.5

[কারণ, $\frac{1}{2}\text{A} + \frac{1}{2}\text{B} + \frac{1}{2}\text{C} = \frac{1}{2}\pi$, $\therefore \sin(\frac{1}{2}\text{B} + \frac{1}{2}\text{C}) = \sin(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\text{A}) = \cos\frac{1}{2}\text{A}$]

$\therefore\ r = a\sin\frac{1}{2}\text{B}\sin\frac{1}{2}\text{C}\sec\frac{1}{2}\text{A}.$

কিন্তু অনুচ্ছেদ 10·4 হইতে, $a = 2\text{R}\sin\text{A} = 4\text{R}\sin\frac{1}{2}\text{A}\cos\frac{1}{2}\text{A}$; সুতরাং

$\mathbf{r = 4R\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C} \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots (2)$

(3) চিত্র 10.5 হইতে ইহা সুস্পষ্ট যে

$$\text{BD} = \text{BF},\ \text{DC} = \text{CE},\ \text{AF} = \text{AE};$$

সুতরাং, $\text{AF} + \text{BD} + \text{DC} = \frac{1}{2}(a+b+c) = s$

অর্থাৎ, $\text{AF} + a = s$, বা $\text{AF} = s - a$;

তদ্রূপ, $\text{BF} = s - b$; $\text{CE} = s - c$.

এখন ত্রিভুজ AFI হইতে,

$$r = \text{IF} = \text{AF}\tan\frac{1}{2}\text{A} = (s-a)\tan\frac{1}{2}\text{A}.$$

$\therefore\ \mathbf{r = (s-a)\tan\frac{1}{2}A} \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots (3)$

অনুরূপভাবে, $\mathbf{r = (s-b)\tan\frac{1}{2}B}$, $\mathbf{r = (s-c)\tan\frac{1}{2}C}$

4. শীর্ষ হইতে অন্তর্কেন্দ্রের দূরত্ব

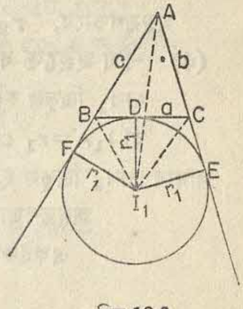
ত্রিভুজ AFI হইতে, $\text{IA} = \text{IF}\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\text{A} = r\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\text{A}.$

তদ্রূপ, $\text{IB} = r\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\text{B}$, $\text{IC} = r\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\text{C}.$

10·6. ত্রিভুজের বহির্ব্যাসার্ধ (Ex-radii of a triangle) : বহির্বৃত্ত (Ex-circles)

সংজ্ঞা। যে বৃত্ত ত্রিভুজের একটি বাহুকে এবং অপর দুই বর্ধিত বাহুকে স্পর্শ করে, তাহাকে ত্রিভুজটির বহির্লিখিত (escribed) বৃত্ত বা বহির্বৃত্ত (ex-circle) বলা হয়। স্পষ্টতঃ কোন ত্রিভুজের এইরূপ তিনটি বৃত্ত হইতে পারে। BC কে এবং বর্ধিত AB ও AC কে স্পর্শ করে যে বৃত্ত তাহাকে A কোণের অনুরূপ (অথবা, বিপরীত) বহির্বৃত্ত বলা হয়। A, B, C এর অনুরূপ বহির্বৃত্তটির ব্যাসার্ধগুলিকে যথাক্রমে r_1, r_2, r_3 দ্বারা এবং কেন্দ্র তিনটিকে যথাক্রমে I_1, I_2, I_3 দ্বারা নির্দেশ করা হয়। A কোণের অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক এবং B ও C কোণদ্বয়ের বহির্সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদবিন্দু হইল I_1 ; অনুরূপভাবে I_2 এবং I_3 পাওয়া যায়।

ধরা যাক্, ABC ত্রিভুজের A কোণের অনুরূপ বহির্বৃত্তটির কেন্দ্র I_1 এবং ব্যাসার্ধ r_1 (চিত্র 10.6) ; ধরা যাক্, বৃত্তটি BC বাহুকে এবং বর্ধিত AC ও AB বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে D, E, F বিন্দুতে স্পর্শ করে। I_1D, I_1E, I_1F, I_1A, I_1B এবং I_1C যুক্ত করা হইল। তাহা হইলে $I_1D = I_1E = I_1F = r_1$



চিত্র 10.6

(1). এখন, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= I_1AB$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $+ I_1AC$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $- I_1BC$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \tfrac{1}{2}cr_1 + \tfrac{1}{2}br_1 - \tfrac{1}{2}ar_1 = \tfrac{1}{2}r_1(b+c-a)$$
$$= \tfrac{1}{2}r_1(2s-2a) = (s-a)r_1$$
$$\therefore \quad r_1 = \frac{\Delta}{s-a} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(1)$$

তদ্রূপ, $r_2 = \dfrac{\Delta}{s-b}$ এবং $r_3 = \dfrac{\Delta}{s-c}$

(2). আবার, $a = BC = BD + DC = r_1 \cot I_1BD + r_1 \cot I_1CD$

$$= r_1 \cot(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}B) + r_1 \cot(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}C)$$
$$= r_1(\tan\tfrac{1}{2}B + \tan\tfrac{1}{2}C)$$
$$= r_1\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}B} + \frac{\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}C}\right\}$$
$$= r_1 \frac{\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C + \cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}$$
$$= r_1\frac{\sin(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C)}{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C} = r_1\frac{\cos\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}$$

[কারণ, $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}C$, $\sin(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C) = \sin(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}A) = \cos\frac{1}{2}A$]

$$\therefore \quad r_1 = a\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C\sec\tfrac{1}{2}A.$$

কিন্তু অনুচ্ছেদ 10·4 অনুসারে,

$a=2R\sin A=4R\sin \frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A$; সুতরাং

$r_1=4R\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C$ ... ... (2)

তদ্রূপ, $r_2=4R\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}A$

এবং $r_3=4R\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B$

(3). ইহার পর, $AE=AC+CE=b+DC$, কারণ $CE=DC$;

এবং $AF=c+BF=c+BD$, কারণ $BF=BD$.

কিন্তু, $AE=AF$, সুতরাং

$2AE=AE+AF=b+c+BD+DC=a+b+c=2s$,

অর্থাৎ, $AE=s$.

এখন, AI_1E ত্রিভুজ হইতে, $I_1E=AE\tan I_1AE$

বা $r_1=s\tan\frac{1}{2}A$ ... ...(3)

অনুরূপভাবে, $r_2=s\tan\frac{1}{2}B$ এবং $r_3=s\tan\frac{1}{2}C$

(4) শীর্ষ হইতে বহিঃকেন্দ্রের দূরত্ব

AFI_1 ত্রিভুজ হইতে, $I_1A=I_1F\operatorname{cosec} I_1AF=r_1\operatorname{cosec}\frac{1}{2}A$

বা $I_1A=r_1\operatorname{cosec}\frac{1}{2}A=4R\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C$.

আবার BFI_1 ত্রিভুজ হইতে, $I_1B=r_1\operatorname{cosec}(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}B)=r_1\sec\frac{1}{2}B$.

অনুরূপভাবে, $I_1C=r_1\sec\frac{1}{2}C$

একইভাবে I_2A, I_2B, প্রভৃতি নির্ণয় করা যায়।

প্রশ্নমালা X(B)

কোন ত্রিভুজ ABCর ক্ষেত্রে (অঙ্কপাতনের প্রচলিত তাৎপর্য অনুসারে) প্রমাণ কর (1-24) যে :

1. $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}$.

[**সমাধান :** $\text{L.H.S.}=\frac{s-a}{\Delta}+\frac{s-b}{\Delta}+\frac{s-c}{\Delta}$

$=\frac{3s-(a+b+c)}{\Delta}=\frac{3s-2s}{\Delta}=\frac{s}{\Delta}=\frac{1}{r}$.]

2. $r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2=s^2$.

3. $r_1+r_2+r_3-r=4R$.

4. $(r_1-r)(r_2-r)(r_3-r)=4Rr^2$.

[**সমাধান :** $r_1-r=\Delta\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s}\right)=\frac{\Delta}{s(s-a)}$

$\text{L.H.S.}=\frac{r^2\Delta abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{r^2abc}{\Delta}=4Rr^2$.]

5. $\sin A+\sin B+\sin C=s/R=\triangle/Rr$.

6. $\cos A+\cos B+\cos C=1+(r/R)$.

[ইঙ্গিত : $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C$, ইত্যাদি।]

7. $r\cos\frac{1}{2}A=a\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C$.

8. $r\cot\frac{1}{2}B\cot\frac{1}{2}C=r_1$.

9. $rr_1=r_2r_3\tan^2\frac{1}{2}A$.

10. $rr_1\cot\frac{1}{2}A=\triangle$.

11. $rr_1r_2r_3=\triangle^2$ এবং $r_1r_2+rr_3=ab$.

12. $r_1r_2r_3=rs^2=abc\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C$.

13. $\dfrac{b-c}{r_1}+\dfrac{c-a}{r_2}+\dfrac{a-b}{r_3}=0$.

14. $r_1=R(\cos B+\cos C-\cos A+1)$.

[ইঙ্গিত : $\cos B+\cos C-\cos A=-1+4\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C$, ইত্যাদি।]

15. $a\cos B\cos C+b\cos C\cos A+c\cos A\cos B=\triangle/R$.

16. $a\cot A+b\cot B+c\cot C=2(R+r)$.

[ইঙ্গিত : $a\cot A=\cos A\,(a/\sin A)=2R\cos A$, ইত্যাদি।]

17. $4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C=s/R$.

18. $\cos^2\frac{1}{2}A+\cos^2\frac{1}{2}B+\cos^2\frac{1}{2}C=2+r/2R$.

19. $r(\sin A+\sin B+\sin C)=2R\sin A\sin B\sin C$.

20. $\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{1}{ab}=\dfrac{1}{2Rr}$.

[**সমাধান :** $\text{L.H.S.}=\dfrac{a+b+c}{abc}=\dfrac{2s}{abc}=\dfrac{2\triangle}{r.abc}=\dfrac{2}{r.4R}=\dfrac{1}{2Rr}$.]

21. $bc+ca+ab=r^2+s^2+4Rr$.

22. $\triangle=\sqrt{rr_1r_2r_3}=r^2\cot\frac{1}{2}A\cot\frac{1}{2}B\cot\frac{1}{2}C$.

23. $\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{r_1^2}+\dfrac{1}{r_2^2}+\dfrac{1}{r_3^2}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{\triangle^2}$.

24. $\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_1}\right)\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_2}\right)\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_3}\right)=\dfrac{4R}{r^2s^2}=\dfrac{16R}{r^2(a+b+c)^2}$.

25. কোন বহির্বৃত্তের ব্যাস যদি ত্রিভুজটির পরিসীমার সমান হয়, তবে দেখাও যে ত্রিভুজটি সমকোণী।

[**সমাধান :** প্রদত্ত $r_1=s$, বা $s\tan\frac{1}{2}A=s$, বা $A=\pi/2$.]

26. কোন ত্রিভুজের $3R=4r$ হইলে দেখাও যে

$$4(\cos A+\cos B+\cos C)=7.$$

27. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি $3:7:8$ অনুপাতে আছে; দেখাও যে $R:r=7:2$.

28. a, b, c A.P. তে থাকিলে দেখাও যে r_1, r_2, r_3 H.P. তে থাকে।

29. যদি $r_1 = r_2 + r_3 + r$ হয়, তবে দেখাও যে ত্রিভুজটি সমকোণী।

[**সমাধান:** $r_1 - r = r_2 + r_3$, বা $\frac{\Delta}{s-a} - \frac{\Delta}{s} = \frac{\Delta}{s-b} + \frac{\Delta}{s-c}$,

বা $s(s-a) = (s-b)(s-c)$, বা $\tan^2 \frac{1}{2}A = 1$, বা $A = \pi/2$.]

30. যদি $\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\left(1 - \frac{r_1}{r_3}\right) = 2$ হয়, তবে দেখাও যে ত্রিভুজটি সমকোণী।

31. যদি $8R^2 = a^2 + b^2 + c^2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সমকোণী।

32. কোন ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের ক্ষেত্রফল A_1 এবং বহির্বৃত্ত তিনটির ক্ষেত্রফল A_2, A_3, A_4 হইলে দেখাও যে

$$\frac{1}{\sqrt{A_1}} = \frac{1}{\sqrt{A_2}} + \frac{1}{\sqrt{A_3}} + \frac{1}{\sqrt{A_4}}.$$

33. যে-কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে উহার অন্তর্বৃত্তের ক্ষেত্রফল এবং উহার ক্ষেত্রফল $\pi : \cot \frac{1}{2}A \cot \frac{1}{2}B \cot \frac{1}{2}C$ অনুপাতে থাকে।

34. ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব তিনটির দৈর্ঘ্য p_1, p_2, p_3 হইলে দেখাও যে

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

11

ত্রিভুজের সমাধান
(Solution of triangles)

11·1. সূচনা

ইতিপূর্বে সমকোণী ত্রিভুজের সমাধান সম্পর্কে আলোচনা করা হইয়াছে ; যে-কোন ত্রিভুজ সম্পর্কীয় ধর্মগুলি সম্বন্ধেও বিবিধ সিদ্ধান্ত করা হইয়াছে। এখন যে-কোন ত্রিভুজের সমাধান বিষয়ে পূর্ববর্তী অধ্যায় দুইটির সূত্রগুলি কিভাবে প্রয়োগ করা যায় তাহা প্রদর্শিত হইবে। এ বিষয়ে নিম্নপ্রকার ক্ষেত্রগুলির উদ্ভব হইতে পারে, যথা :

1. বাহু তিনটি প্রদত্ত হইতে পারে,
2. দুইটি বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণটি প্রদত্ত হইতে পারে,
3. দুইটি কোণ এবং একটি বাহু প্রদত্ত হইতে পারে,
4. তিনটি কোণ প্রদত্ত হইতে পারে,

এবং সর্বশেষে

5. দুইটি কোণ এবং উহাদের একটির বিপরীত বাহুটি প্রদত্ত হইতে পারে।

একটি গুরুত্বপূর্ণ টীকা

বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিভিন্ন সূত্র প্রয়োগ করা হইবে ; আবার একই প্রশ্নের সমাধান বিভিন্ন সূত্রের সাহায্যে বিভিন্ন প্রক্রিয়ায় করা যাইতে পারে। সুতরাং কোন প্রশ্নের পক্ষে যে সূত্র সর্বাপেক্ষা উপযোগী তাহার সন্ধান করিতে হইবে। ইহার জন্য যথেষ্ট সময় দিলে ছাত্রছাত্রীরা ভুল করিবে না। **লগারিদ্‌মিক্ গণনার ক্ষেত্রে (for logarithmic computation) ট্যানজেণ্ট সূত্র সর্বাপেক্ষা উপযোগী।** বস্তুতঃ সাত অঙ্কের লগারিদ্‌মিক্ সাইন বা কোসাইন তালিকা অপেক্ষা চারি অঙ্কের লগারিদ্‌মিক্ ট্যানজেট তালিকা হইতে সূক্ষ্মতর মান পাওয়া যায়। ত্রিভুজের সমাধানের জন্য যদি ইহা প্রদত্ত থাকে যে $\sin A=\frac{1}{2}$, তাহা হইলে $A=30^\circ$ অথবা 150° এই আপাতগ্রাহ্য উভয়মানই হইতে পারে। তখন ছাত্রছাত্রীদের Aর সেই মানটিই গ্রহণ করিতে হইবে যাহা প্রদত্ত অন্যান্য সম্পর্কগুলির সহিত সামঞ্জস্যপূর্ণ হইবে। সাধারণভাবে এই সমস্যাটিকে পরিহার করা যায় যদি ট্যানজেণ্ট সূত্রের সাহায্যে কোন কোণ নির্ণয় করা যায়। যাহা হউক, বাস্তবিক পক্ষে সেই সূত্রটিরই প্রয়োগ করিতে হইবে যাহা প্রদত্ত উপাত্ত (data) র পক্ষে উপযুক্ত হইবে।

11·2. তিনটি বাহু প্রদত্ত হইলে

যদি এমন তিনটি বাহু a, b, c প্রদত্ত হয় যে ইহাদের যে-কোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর তবে ত্রিভুজ ABC **অনন্য** (unique)। এক্ষেত্রে ইহার A কোণকে নিম্নলিখিত সূত্রগুলির যে-কোন একটি হইতে নির্ণয় করা যায় :

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\ ;\quad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\ ;$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\ ;\quad \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

অনুরূপে B এবং C নির্ণয় করা হয়। আবার যে-কোন দুইটি কোণ জানা হইলেই তৃতীয়টি জানা যায়, কারণ $A+B+C=\pi$। প্রদত্ত উপাত্ত অনুসারে সূত্র নির্বাচন করিতে হইবে, নতুবা $\tan\frac{A}{2}$ সূত্র প্রয়োগ করাই সঙ্গত হইবে।

দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ 1. কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটি 9, 10 এবং 11 ; বাহু 10 এর বিপরীত কোণটি নির্ণয় কর, যদি ইহা প্রদত্ত হয় যে $\log 2=0{\cdot}30103$ এবং $L\tan 29°30'=9{\cdot}7526420$, $L\tan 29°29'=9{\cdot}7523472$.

ধরা যাক $a=10$, $b=11$ এবং $c=9$, তাহা হইলে $s=\frac{1}{2}(10+11+9)=15$; $a=10$ এর বিপরীত কোণ A বলিয়া

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{(15-11)(15-9)}{15(15-10)}}=\sqrt{\frac{32}{100}}$$

$$\therefore\quad L\tan\frac{A}{2}=10+\frac{1}{2}\log(32/100)=10+\frac{5}{2}\log 2-\log 10$$

$$=10+\frac{5}{2}(0{\cdot}30103)-1=9{\cdot}7525750,$$

সুতরাং $\frac{1}{2}A$, $29°29'$ অপেক্ষা বৃহত্তর। ধরা যাক $\frac{1}{2}A=29°29'x''$।

এখন 1′ এর জন্য অন্তর 2948

এবং $L\tan 29°29'$ হইতে $L\tan\frac{1}{2}A$ এর অন্তর 2278

$$\therefore\quad x=\frac{60\times 2278}{2948}=46{\cdot}3''$$

$\therefore\quad A=2\times 29°29'46{\cdot}3''=58°59'33''$ (প্রায়)।

11·3. দুইটি বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ প্রদত্ত হইলে

দুইটি বাহু, ধরা যাক, a এবং b এবং উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ C প্রদত্ত হইলে ত্রিভুজ ABC **অনন্য (unique)** হয়।

যদি $a=b$ হয়, তবে $A=B$; সুতরাং $2A+C=\pi$ হইতে A নির্ণয় করা যাইবে।

কিন্তু যদি $a\neq b$ হয়, তবে $a>b$ ধরিলে tangent সূত্র হইতে পাওয়া যায়

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2},$$

আবার $A+B=\pi-C$; সুতরাং এখন A এবং B নির্ণয় করা যায়।

ইহার পর বাহু c নির্ণয় করা যাইবে নিম্নলিখিত sine সূত্র হইতে :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

অন্যথায়

c বাহু নির্ণয় করিতে cosine সূত্র, যথা, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ প্রয়োগ কর।

A নির্ণয় করিবার জন্য $\sin A=(a\sin C)/c$ সূত্রের সাহায্য লও।

B নির্ণয় কর $B=\pi-(A+C)$ এই সম্পর্ক হইতে।

লক্ষ্য কর, এই সূত্রগুলি লগারিদ্‌মিক্ গণনার পক্ষে উপযোগী নহে।

দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ 2. কোন ত্রিভুজের বাহু দুইটি 11 সে.মি. এবং 14 সে.মি. এবং উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60°; ইহার অপর কোণ দুইটি নির্ণয় কর, যদি $\log 2=0{\cdot}30103$, $\log 3=0{\cdot}47712$, $L\tan 11°44'=9{\cdot}3174299$, $L\tan 11°45'=9{\cdot}3180640$ হয়।

ধরা যাক্ $a=14$ সে.মি. $b=11$ সে.মি. এবং $C=60°$.

যেহেতু $\tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{a-b}{a+b}\cot\dfrac{C}{2}=\dfrac{12\sqrt{3}}{100}$,

সুতরাং $L\tan\dfrac{A-B}{2}=10+2\log 2+\frac{3}{2}\log 3-2=9{\cdot}3177400.$

ধরা যাক্ $\frac{1}{2}(A-B)=11°44'x''$; তাহা হইলে $x=\dfrac{60\times 3101}{6341}=29{\cdot}3''$ (প্রায়)

$\therefore\ A-B=23°28'58{\cdot}6''$ এবং $A+B=180°-60°=120°$

$\therefore\ A=71°44'29{\cdot}3''$ এবং $B=48°15'30{\cdot}7''$ (প্রায়)।

প্রশ্নমালা XI(A)

[নিম্নের প্রশ্নগুলিতে প্রচলিত অঙ্কপাতন (notations) অবলম্বন করা হইয়াছে।]

1. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 56 সে.মি., 65 সে.মি. এবং 33 সে.মি. হইলে বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর।

2. একটি ত্রিভুজের বাহু তিনটি x, y এবং $\sqrt{x^2+xy+y^2}$ হইলে দেখাও যে বৃহত্তম কোণটি 120°.

3. যদি $a=2$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{3}+1$ হয় তবে ত্রিভুজটি সমাধান কর।

4. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 4, 5, 6; দেখাও যে ইহার বৃহত্তম কোণ ক্ষুদ্রতম কোণের দ্বিগুণ।

5. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 2, 3, 4 এবং $\log 2=0{\cdot}30103$, $\log 3=0{\cdot}4771213$, $L\tan 52°14'=10{\cdot}1108395$, $L\tan 52°15'=10{\cdot}1111004$ হইলে ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণ নির্ণয় কর।

6. একটি ত্রিভুজের বাহু তিনটি 753, 375, 872; ইহার ক্ষুদ্রতম কোণ নির্ণয় কর, যদি $\log 2=0{\cdot}3010300$, $\log 247=2{\cdot}3926970$, $L\tan 12°39'=9{\cdot}3516968$, এবং 1′ এর জন্য অন্তর $=5901$ হয়।

7. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 15, 19, 24; ইহার বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর, যখন $\log 5{\cdot}7=0{\cdot}75587$, $L\cos 88°59'=8{\cdot}24900$, 1′ এর জন্য অন্তর $=718$.

8. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 5, 8 এবং 11 এর অনুপাতে আছে ; দেখাও যে উহার বৃহত্তম কোণটি প্রায় $113°34'41''$; প্রদত্ত

$$\log 7 = 0{\cdot}8450980,$$

$$L\sin 56°47' = 9{\cdot}9225205,\ L\sin 56°48' = 9{\cdot}9226032.$$

9. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য 7, 8, 9 ; তালিকার সাহায্যে ত্রিভুজটি সমাধান কর।

10. $b=\sqrt{3}$, $c=1$ এবং $A=30°$ হইলে ত্রিভুজটি সমাধান কর।

11. কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু 3 সে.মি. এবং 5 সে.মি. এবং উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণটি $120°$; দেখাও যে উহার তৃতীয় বাহুটি 7 সে.মি. এবং অপর কোণ দুইটি $38°12'48''$ এবং $21°47'12''$ (প্রায়) ; প্রদত্ত হইল যে $\log 4{\cdot}8 = 0{\cdot}6812412$, $L\tan 8°12' = 9{\cdot}1586706$ এবং $1'$ এর জন্য অন্তর $= 8940$.

12. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু 80 এবং 100 সে.মি. এবং উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণটি $60°$; অপর কোণ দুইটি নির্ণয় কর (তালিকার সাহায্য লও)।

13. একটি সামতলিক ত্রিভুজের দুইটি বাহু যথাক্রমে 540 এবং 420 সে.মি. এবং উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণটি $52°6'$; অবশিষ্ট কোণগুলি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে যে

$$\log 2 = 0{\cdot}3010300, \qquad L\tan 26°3' = 9{\cdot}6891430,$$

$$L\tan 14°20' = 9{\cdot}4074189, \quad L\tan 14°21' = 9{\cdot}4079453.$$

14. যদি $a=70$, $b=35$, $C=36°52'12''$, $\log 3 = 0{\cdot}4771213$, $L\cot 18°26'6'' = 10{\cdot}4771213$ হয় তবে A এবং B নির্ণয় কর।

15. ABC ত্রিভুজে $a : b = 7 : 3$ এবং $C = 60°$; A এবং B নির্ণয় কর, যখন প্রদত্ত আছে যে $\log 2 = 0{\cdot}3010300$, $\log 3 = 0{\cdot}4771213$, $L\tan 34°42' = 9{\cdot}8403776$ এবং $1'$ এর জন্য অন্তর $= 2699$.

উত্তরমালা

[**1.** 90° **3.** 45°, 60°, 75° **5.** 104°28'39" (প্রায়)
6. 25°19'4·4" (প্রায়) **7.** 88°59'41" (প্রায়) **9.** 48°11'23" ; 58°24'43" ; 73°23'54" (প্রায়) **10.** B=120°, C=30°, a=1.
12. 70°53'29", 49°6'31" (প্রায়) **13.** 78°17'40", 49°36'20" (প্রায়)
14. 116°33'54", 26°33'54" (প্রায়) **15.** A=94°42'54", B=25°17'6" (প্রায়)

11·4. দুইটি কোণ এবং একটি বাহু প্রদত্ত হইলে

ধরা যাক্ A, B এবং c প্রদত্ত। যেহেতু A, B জানা আছে, সুতরাং $C=\pi-(A+B)$ও জানা যাইবে। এইভাবে তিনটি কোণ এবং একটি বাহু জানা হইল। এখন a এবং b নির্ণয় করিবার জন্য sine সূত্র প্রয়োগ করা হইল, অর্থাৎ

$$a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C.$$

দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ 3 : যদি $b=1000$, $A=45^\circ$, $C=68^\circ17'40''$ হয় তবে ক্ষুদ্রতম বাহুটি নির্ণয় কর; দেওয়া আছে যে $\log 2=0{\cdot}3010300$, $\log 7{\cdot}6986=0{\cdot}8864118$, 1 এর জন্য অন্তর $=57$, $\text{Lsin } 66^\circ42'=9{\cdot}9630538$, $1'$ এর জন্য অন্তর $=544$.

$$B=180^\circ-(45^\circ+68^\circ17'40'')=66^\circ42'20''$$

$\therefore$ ক্ষুদ্রতম বাহু $=a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\dfrac{1000\sin 45^\circ}{\sin 66^\circ42'20''}$

এখন $\log a=\log 10^3+\log\sin 45^\circ-\log\sin 66^\circ42'20''$

বা $-10+\log a=3-\frac{1}{2}\log 2-\text{Lsin } 66^\circ42'20''$

যেহেতু $\text{Lsin } 66^\circ42'=9{\cdot}9630538$

এবং $20''$ এর জন্য অন্তর $=(544\times20)\div60=181$ (প্রায়)

$\therefore$ $\text{Lsin } 66^\circ42'20''=9{\cdot}9630538+0{\cdot}0000181=9{\cdot}9630719$

$\therefore$ $\log a=13-0{\cdot}1505150-9{\cdot}9630719=2{\cdot}8864131$

কিন্তু $\log 769{\cdot}86=2{\cdot}8864118$; এবং 1 এর জন্য অন্তর $=57$

এখানে অন্তর $=13$ এবং ইহা $13/57=0{\cdot}22$ (প্রায়) এর জন্য হয়।

$\therefore$ $a=769{\cdot}86+0{\cdot}0022=769{\cdot}8622$ (প্রায়)।

11·5. তিনটি কোণ প্রদত্ত হইলে

এই ক্ষেত্রে কোন অনন্য ত্রিভুজ সম্ভব নহে, কিন্তু সংশ্লিষ্ট সমুদয় ত্রিভুজ পরস্পর সদৃশকোণী হওয়ায় উহারা সদৃশ ; সুতরাং উহাদের বাহুগুলির অনুপাত sine সূত্র যথা $a/\sin A=b/\sin B=c/\sin C$ হইতে নির্ণয় করা যায়।

দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ 4 : কোন ত্রিভুজের কোণগুলি 45°, 60° এবং 75° ; ইহার বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয় কর।

$$a:b:c=\sin 45^\circ:\sin 60^\circ:\sin 75^\circ$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}:\frac{\sqrt3}{2}:\frac{\sqrt3+1}{2\sqrt2}=2:\sqrt6:(\sqrt3+1)$$

প্রশ্নমালা XI(B)

1. $A=60^\circ$, $B=75^\circ$, $a=2\sqrt3$ হইলে ত্রিভুজটি সমাধান কর।

2. যদি $B=45^\circ$, $C=10^\circ$, $a=200$ হয় তবে b নির্ণয় কর, যখন $\log 2=0{\cdot}30103$, $\text{Lsin } 55^\circ=9{\cdot}9133645$, $\log 1726{\cdot}4=3{\cdot}2371414$, $\log 1726{\cdot}5=3{\cdot}2371666$.

3. যদি $B=60^\circ15'$, $C=54^\circ30'$, $a=100$ হয়, তবে c নির্ণয় কর ; প্রদত্ত হইল যে $\log 8{\cdot}9646162=0{\cdot}9525317$, $\text{Lsin } 54^\circ30'=9{\cdot}9106860$, $\text{Lsin } 65^\circ15'=9{\cdot}9581543$

4. কোন ত্রিভুজে $a=10$, $A=51°30'40''$, $B=76°$; b নির্ণয় কর, যদি
$\log 12396=4·0932816$, $\log 12397=4·0933166$,
$L\sin 51°30'=9·8935444$, $L\sin 51°31'=9·8936448$,
$L\sin 76°=9·9869041$ হয়।

5. তালিকার সাহায্যে b এবং c নির্ণয় কর, যখন দেওয়া আছে যে
$A=37°15'$, $B=72°5'$, $a=75·2$.

6. কোন ত্রিভুজের কোণগুলি $105°$, $60°$ এবং $15°$; ইহার বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয় কর।

7. কোন ত্রিভুজের কোণগুলি $7:2:1$ অনুপাতে আছে ; প্রমাণ কর যে ইহার ক্ষুদ্রতম এবং বৃহত্তম বাহু দুইটির অনুপাত হইল $(\sqrt{5}-1):(\sqrt{5}+1)$.

8. কোন ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণ দুইটি যথাক্রমে $22\frac{1}{2}°$ এবং $112\frac{1}{2}°$ হইলে দেখাও যে উহার উচ্চতা ভূমির অর্ধ পরিমাণ হইবে।

উত্তরমালা

1. $45°$, $\sqrt{2}+\sqrt{6}$, $2\sqrt{2}$. 2. 172·6436. 3. 89·646162.
4. 12·39632. 5. $b=118·9$, $c=117·2$. 6. $(\sqrt{3}+1):\sqrt{6}:(\sqrt{3}-1)$.

11·6. দুইটি বাহু এবং উহাদের একটির বিপরীত কোণটি প্রদত্ত হইলে

ধরা যাক্ a, b, A প্রদত্ত ; তাহা হইলে B, C, c নির্ণয় করিতে হইবে।

sine সূত্র হইতে B নির্ণয় করা যায়, যথা

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}, \text{ বা } \sin B=\frac{b}{a}\sin A.$$

এখন $b\sin A >=$ বা $<a$ এই সম্পর্ক অনুসারে **তিনটি ক্ষেত্রের** উদ্ভব হয়।

(*a*) যদি $b\sin A>a$ হয়, তবে $\sin B>1$; কিন্তু ইহা অসম্ভব, সুতরাং **কোন ত্রিভুজ সম্ভব নহে।**

(*b*) যদি $b\sin A=a$ হয়, তবে $\sin B=1$, অর্থাৎ $B=90°$; সুতরাং $A+C=90°$; অতএব ত্রিভুজ উৎপন্ন করিতে হইলে A অথবা C কেহই $0°$ বা $90°$ হইতে পারে না। তাহা হইলে $0<A<90°$, সুতরাং $0<\sin A<1$, অথবা $0<a/b<1$, অর্থাৎ $a<b$. এইভাবে একটি সমকোণী ত্রিভুজ পাওয়া যায়।

অথবা, এই কথা বলা যায় যে

যদি $a<b$ হয়, তবে একটি সমকোণী ত্রিভুজ সম্ভব ;

এবং যদি $a=b$ হয়, তবে কোন ত্রিভুজ সম্ভব নহে।

(*c*) যদি $b\sin A<a$ হয়, তাহা হইলে $\sin B<1$, যাহা হইতে B এর **দুইটি মান** পাওয়া যায়—একটি প্রথম পাদতে এবং অপরটি দ্বিতীয় পাদতে। বিষয়টি সম্পর্কে আরও অনুসন্ধান করা যাক্।

(*i*) যদি $a>b$ হয়, তাহা হইলে $A>b$; তখন Bএর কেবল সূক্ষ্ম মানটি সম্ভব এবং **একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ** পাওয়া যায় ;

(*ii*) যদি $a=b$ হয়, তবে $A=B$; তখনও B এর কেবল সূক্ষ্ম মানটি গ্রহণীয় এবং **একটি অনন্য ত্রিভুজ** পাওয়া যায় ;

(*iii*) যদি $a<b$ হয় তবে $A<B$; তখন B এর উভয় মানই গ্রহণীয় এবং a, b এবং Aর প্রদত্ত মানের **দুইটি ত্রিভুজ সম্ভব**। এক্ষেত্রে A সূক্ষ্মকোণ। যেহেতু এখানে দুইটি সমাধান সম্ভব, সেইজন্য ইহাকে **দ্ব্যর্থবোধক ক্ষেত্র (ambiguous case)** বলা হয়। সমগ্র আলোচনাটিকে সংক্ষিপ্ত আকারে এইভাবে বলা যায় : প্রদত্ত a, b এবং A :

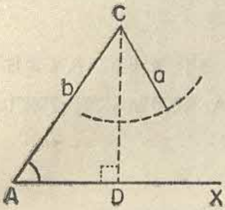
(1) যদি $b \sin A>a$
অথবা যদি $b \sin A=a$ এবং $a=b$ হয় } কোন ত্রিভুজ সম্ভব নহে

(2) যদি $b \sin A=a, a<b$ ... ... সমকোণী
বা যদি $b \sin A<a, a>b$ } একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ
বা যদি $b \sin A<a, a=b$ ... ... সমদ্বিবাহু

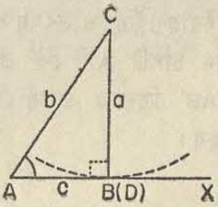
(3) যদি $b \sin A<a, a<b$ ... দুইটি ত্রিভুজ (দ্ব্যর্থবোধক ক্ষেত্র)

B হইতে অন্যান্যগুলি নির্ণয় করা যাইবে।

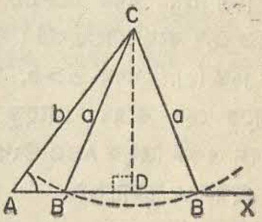
জ্যামিতিক বিচার (Geometrical treatment)



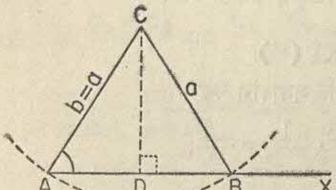
চিত্র 11.1 (*a*)



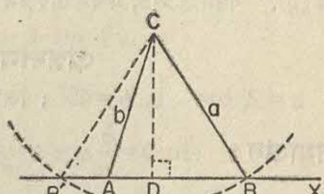
চিত্র 11.1 (*b*)



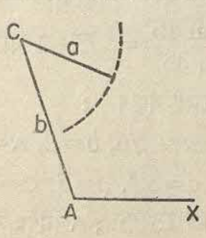
চিত্র 11.1 (*c*)



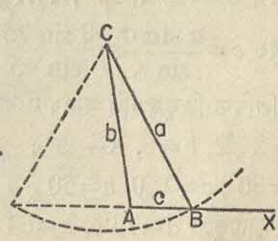
চিত্র 11.1 (*d*)



চিত্র 11.1 (*e*)



চিত্র 11.1 (*f*)



চিত্র 11.1 (*g*)

ধরা যাক a, b এবং A প্রদত্ত। A কোণ অঙ্কন করিয়া b এর সমান AC লওয়া হইল। C কে কেন্দ্র করিয়া ও aর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হইল এবং CD⊥AX অঙ্কন করা হইল। প্রদত্ত কোণ A সূক্ষ্ম হইলে যে সমস্ত ক্ষেত্রের উদ্ভব হয় তাহাদের চিত্র 11.1(a) – (e) তে এবং A স্থূলকোণ হইলে উৎপন্ন ক্ষেত্রগুলিকে চিত্র 11.1(f) ও (g) তে প্রদর্শন করা হইয়াছে।

যখন A সূক্ষ্ম

চিত্র (a). যখন $a<\text{CD}=b \sin A$, চাপটি তখন AX কে স্পর্শ বা ছিন্ন করে না এবং কোন ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় না।

চিত্র (b). যখন $a=\text{CD}=b \sin A$, তখন চাপটি AX কে স্পর্শ করে এবং একটিমাত্র ত্রিভুজ—B কোণ সমকোণবিশিষ্ট একটি সমকোণী ত্রিভুজ—উৎপন্ন হয়। লক্ষ্য কর যে $a<b$।

চিত্র (c). যখন $a>\text{CD}=b \sin A$ এবং $a<b$, তখন চাপটি AX কে Aর একই দিকে B এবং B′ এই দুই বিন্দুতে ছেদ করে। এখানে দুইটি ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, যথা, ABC যাহার B সূক্ষ্মকোণ এবং AB′C যাহার কোণ $B'=180°-B$ = স্থূলকোণ।

চিত্র (d). যখন $a>\text{CD}=b \sin A$ এবং $a=b$, তখন চাপটি AX কে A এবং B তে ছেদ করে এবং একটি (সমদ্বিবাহু) ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়।

চিত্র (e). যখন $a>b$, তখন চাপটি AX কে B তে এবং বর্ধিত XA কে B′ বিন্দুতে ছেদ করে। যেহেতু CAB′ ত্রিভুজে প্রদত্ত কোণ A অন্তর্ভুক্ত নহে, সুতরাং কেবল একটি ত্রিভুজ ABC উৎপন্ন হয়।

যখন A স্থূলকোণ

চিত্র (f). যখন $a<b$ অথবা $a=b$, তখন কোন ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় না।

চিত্র (g). যখন $a>b$, তখন একটিমাত্র ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়।

প্রশ্নমালা XI (C)

1. $a=2, b=\sqrt{6}, A=45°$; ত্রিভুজটি সমাধান কর।

[**সমাধান :** $\sin B=\frac{b}{a}\sin A=\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

সুতরাং $B=60°$ বা $120°$,

তাহা হইলে $C=75°$ বা $15°$; যেহেতু $a<b$, অতএব উভয় মানের সেট গ্রহণীয়

এবং $c=\frac{a \sin C}{\sin A}=\frac{2 \sin 75°}{\sin 45°}$ বা $\frac{2 \sin 15°}{\sin 45°}=\sqrt{3}+1$ বা $\sqrt{3}-1$]

2. নিম্নলিখিত ত্রিভুজগুলি সমাধান কর (যেখানেই সম্ভব) :

(i) $a=2\sqrt{2}, b=6, A=45°$; (ii) $a=\sqrt{6}, b=2, A=60°$;

(iii) $B=30°, c=150, b=50\sqrt{3}$; (iv) $c=3{\cdot}4, a=7, C=30°$.

3. কোন ত্রিভুজে $a=73{\cdot}4, b=64{\cdot}9, B=48°13'25''$; A নির্ণয় কর, যেখানে দেওয়া হইল $\log 734=2{\cdot}8656961$, $\log 649=2{\cdot}8122447$,

Lsin $48°13'25'' = 9·8725936$, Lsin $57°30' = 9·9260292$ ($1'$ এর জন্য পার্থক্য $=804$)। ইহা কি দ্ব্যর্থবোধক ক্ষেত্র ?

[**সমাধান :** $\sin A = \frac{a}{b}\sin B = \frac{734}{649}\sin 48°13'25''$; সুতরাং

Lsin $A = \log 734 - \log 649 + \text{Lsin } 48°13'25'' = 9·9260450.$

এখন ধরা যাক্ $A = 57°30'x''$; তাহা হইলে $x = 60 \times (158/804)$

$= 11·8''$ (প্রায়)

$\therefore$ $A = 57°30'11·8''$ (প্রায়), বা $= 180° - 57°30'11·8'' = 122°29'48·2''$

এখানে $a > b$, সুতরাং $A > B$ এবং A র উভয় মানই গ্রহণীয়। অতএব ইহা দ্ব্যর্থবোধক ক্ষেত্র এবং দুইটি সমাধান পাওয়া যাইবে।]

4. প্রদত্ত $a=8$, $b=7$, $A=120°$, $\log 2 = 0·3010300$,
$\log 3 = 0·4771213$, $\log 7 = 0·8450980$, Lsin $49°16' = 9·8795287$,
Lsin $49°17' = 9·8796375$.

5. যদি $a=30$, $b=300$ হয়, তবে A নির্ণয় কর যাহাতে B সমকোণ হইতে পারে ; দেওয়া আছে Lsin $5°44' = 8·9995595$, $1'$ এর জন্য অন্তর $= 12565$.

6. দ্ব্যর্থবোধক ক্ষেত্রে a, b, A প্রদত্ত ; যদি c_1, c_2, B_1, B_2 এবং C_1, C_2 যথাক্রমে c, B এবং C এর অনুরূপ মানগুলি নির্দেশ করে, তবে $c_1 > c_2$ (বা $C_1 > C_2$) হইলে দেখাও যে

(i) $C_1 - C_2 = B_2 - B_1$

(ii) $c_1 - c_2 = 2a \cos B_1$

(iii) $\cos \frac{C_1 - C_2}{2} = \frac{b}{a} \sin A$

(iv) $\sin \frac{C_1 + C_2}{2} \sin \frac{C_1 - C_2}{2} = \cos A \cos B_1$

(v) $\frac{\sin C_1}{\sin B_1} + \frac{\sin C_2}{\sin B_2} = 2 \cos A$

(vi) $c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2 \cos 2A = 4a^2\cos^2 A$

(vii) $A = 60°$ বা $120°$, যদি $c_1^2 + c_1c_2 + c_2^2 = a^2$

7. যদি $2b = 3a$ এবং $\tan^2 A = \frac{3}{5}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে তৃতীয় বাহুটির দুইটি মান বর্তমান, যাহাদের একটি অপরটির দ্বিগুণ।

উত্তরমালা

2. (*i*) এবং (*iv*) কোন সমাধান নাই ; (*ii*) $B=45°$, $C=75°$, $c=\sqrt{3}+1$; (*iii*) $C=60°, 120°$; $A=90°, 30°$; $a=100\sqrt{3}, 50\sqrt{3}$.

4. $B=49°16'5''$, $C=10°43'55''$. 5. $5°44'21''$.

12

সমীকরণের লৈখিক সমাধান
(Graphical Solution of Equations)

12·1. সূচনা

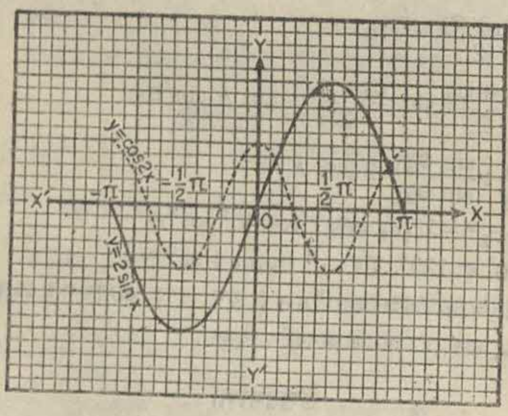
ইতিপূর্বে $y=\sin x$, $y=\tan x$ প্রভৃতির লেখ অঙ্কন করা হইয়াছে। অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখও অনুরূপভাবে অঙ্কন করা যায়। নিম্নে উহাদের কয়েকটি দৃষ্টান্তস্বরূপ প্রদর্শিত হইল। স্মরণ রাখিতে হইবে যে x কে রেডিয়ান মানে লওয়া হইল।

দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ 1. $y=2\sin x$ এর লেখ অঙ্কন কর, যেখানে $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$

x এবং y এর অনুরূপ কতিপয় মান হইল (তালিকা 6 দ্রষ্টব্য):

$x=0,$	$\frac{1}{6}\pi,$	$\frac{1}{4}\pi,$	$\frac{1}{3}\pi,$	$\frac{1}{2}\pi,$	$\frac{2}{3}\pi,$	$\frac{3}{4}\pi,$	$\frac{5}{6}\pi,$	$\pi.$
$y=0,$	1,	1·42,	1·74,	2,	1·74,	1·42,	1,	0.
$x=-\frac{1}{6}\pi,$	$-\frac{1}{4}\pi,$	$-\frac{1}{3}\pi,$	$-\frac{1}{2}\pi,$	$-\frac{2}{3}\pi,$	$-\frac{3}{4}\pi,$	$-\frac{5}{6}\pi,$	$-\pi.$	
$y=-1,$	$-1·42,$	$-1·74,$	$-2,$	$-1·74,$	$-1·42,$	$-1,$	0.	

গৃহীত একক : x অক্ষ বরাবর 12টি ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহু π কে নির্দেশ করে এবং y অক্ষ বরাবর 5টি ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহু 1 নির্দেশ করে।



চিত্র 12.1

চিত্র 12.1এ লেখটি প্রদর্শিত হইল।

দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ 2. $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ এই সীমার মধ্যে $y=\cos 2x$ এর লেখ অঙ্কন কর।

x এবং y এর কতিপয় অনুরূপ মান (তালিকা 6 দ্রষ্টব্য) হইল :

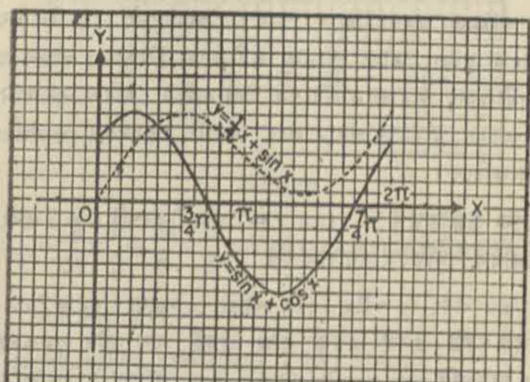
$x=0,$	$\pm\frac{1}{6}\pi,$	$\pm\frac{1}{4}\pi,$	$\pm\frac{1}{3}\pi,$	$\pm\frac{1}{2}\pi,$	$\pm\frac{2}{3}\pi,$	$\pm\frac{3}{4}\pi,$	$\pm\frac{5}{6}\pi,$	$\pm\pi.$
$y=1,$	$0.5,$	$0,$	$-0.5,$	$-1,$	$-0.5,$	$0,$	$0.5,$	$1.$

লেখটি 12.1 চিত্রে বিন্দু চিহ্নিত রেখার সাহায্যে প্রদর্শিত হইল (উদা. 1 এর অনুরূপ একক লওয়া হইয়াছে)।

দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ 3. $y=\sin x+\cos x$ এর লেখ চিত্র অঙ্কন কর, যেখানে $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ এবং লেখ হইতে x এর মান নির্ণয় কর যখন (*i*) $y=0$, (*ii*) y এর মান গরিষ্ঠ, (*iii*) y এর মান লঘিষ্ঠ। 'ক্যালকুলাসে'র (Calculus) সাহায্যে মানগুলি যাচাই কর।

x এবং y এর কতিপয় অনুরূপ মান (তালিকা 6 দ্রষ্টব্য) হইল :

$x=0,$	$\frac{1}{6}\pi,$	$\frac{1}{4}\pi,$	$\frac{1}{3}\pi,$	$\frac{1}{2}\pi,$	$\frac{2}{3}\pi,$	$\frac{3}{4}\pi,$	$\frac{5}{6}\pi,$	$\pi,$
$y=1,$	$1.37,$	$1.42,$	$1.37,$	$1,$	$0.37,$	$0,$	$-0.37,$	$-1,$
$x=$	$\frac{7}{6}\pi,$	$\frac{5}{4}\pi,$	$\frac{4}{3}\pi,$	$\frac{3}{2}\pi,$	$\frac{5}{3}\pi,$	$\frac{7}{4}\pi,$	$\frac{11}{6}\pi,$	$2\pi.$
$y=-1.37,$	$-1.42,$	$-1.37,$	$-1,$	$-0.37,$	$0,$	$0.37,$	$1.$	



চিত্র 12.2

লেখটি 12.2 চিত্রে প্রদর্শিত হইল (1 এর অনুরূপ একক লইয়া)। উহা হইতে দেখা যায় যে (*i*) $y=0$ হয় যখন $x=\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$; (*ii*) y এর মান গরিষ্ঠ হয় যখন $x=\frac{\pi}{4}$; (*iii*) y এর মান লঘিষ্ঠ যখন $x=\frac{5}{4}\pi$। শেষ অংশের উত্তরের জন্য গ্রন্থকারদ্বয়ের ক্যালকুলাস (Calculus) গ্রন্থ দ্রষ্টব্য।

দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ 4. $y=\frac{1}{4}x+\sin x$ এর লেখ অঙ্কন কর, যেখানে $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

x এবং y এর কতিপয় অনুরূপ মান (তালিকা 6 দ্রষ্টব্য) হইল :

$x=0,\ \frac{1}{6}\pi,\ \frac{1}{4}\pi,\ \frac{1}{3}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{6}\pi,\ \pi,$
[0·525] [0·7875] [1·05] [1·575] [2·1] [2·3625] [2·625] [3·14]
$y=0,\ 0·63,\ 0·91,\ 1·13,\ 1·393,\ 1·394,\ 1·30,\ 1·15,\ 0·78,$
$x=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{11}{6}\pi,\ 2\pi.$
[3·675] [3·9375] [4·2] [4·725] [5·25] [5·5125] [5·775] [6·3]
$y=0·41,\ 0·27,\ 0·177,\ 0·178,\ 0·44,\ 0·66,\ 0·94,\ 1·57.$

3 প্রশ্নের অনুরূপ একক লইয়া অঙ্কিত লেখটি 12.2 চিত্রে বিন্দু-চিহ্নিত রেখার দ্বারা প্রদর্শিত হইল।

12·2. সমীকরণসমূহের লৈখিক সমাধান (Graphical solution of equations)

পূর্বে প্রদর্শিত প্রণালীসমূহ দ্বারা ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধানে কখনও কখনও কিছু কঠিনতা দেখা দিতে পারে। সমাধানের যে লৈখিক পদ্ধতি নিম্নে দৃষ্টান্তস্বরূপ প্রদত্ত হইল, তাহা অনেক সমীকরণ, বিশেষতঃ বাস্তব প্রয়োগের ক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় সমীকরণ, সমাধানে বিশেষ উপযোগী। যদিও সমাধানগুলি এক্ষেত্রে অনেক সময় আসন্ন মানমাত্র প্রদান করে, তথাপি প্রশ্নসমূহ (problems) সমাধানে উহারা সাহায্য করিবে।

দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ 5. $\tan x=2x$ সমীকরণটি $x=0$ এবং $x=\pi/2$ এই সীমার মধ্যে লৈখিক পদ্ধতিতে সমাধান কর।

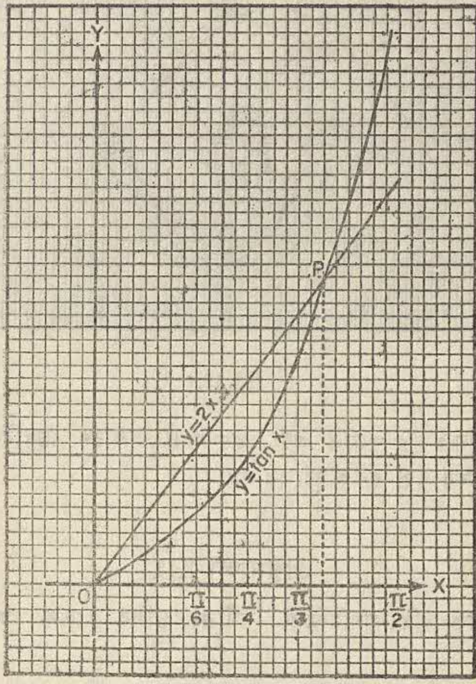
$y=\tan x$ এবং $y=2x$ ($y_1=\tan x$ এবং $y_2=2x$ও লওয়া যায়) সমীকরণের লেখ দুইটি একই একক এবং একই অক্ষ লইয়া পৃথকভাবে অঙ্কন কর। x এর সাধারণ মানগুলি $\tan x=2x$ কে ($y_1=y_2$ বলিয়া) সিদ্ধ করিবে।

কতিপয় মান (তালিকা 6 দ্রষ্টব্য) হইল :

$x=0,$	$\frac{1}{6}\pi,$	$\frac{1}{4}\pi,$	$\frac{1}{3}\pi,$	$\frac{1}{2}\pi.$
$2x=0,$	1·05,	1·57,	2·1,	3·14.
$\tan x=0,$	0·58,	1,	1·73,	$\to+\infty$.

গৃহীত একক : x-অক্ষ বরাবর 24টি ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহু $\frac{1}{2}\pi$ নির্দেশ করে
এবং y-অক্ষ বরাবর 10টি ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহু 1 নির্দেশ করে।

12.3 চিত্রে লেখ দুইটির স্থূলরূপ প্রদর্শিত হইল। উহারা পরস্পরকে $x=0$ বিন্দুতে এবং P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, যেখানে P এর ভুজ হইল O হইতে OX বরাবর প্রায় 18 একক দূরত্ব।



চিত্র 12.3

সুতরাং $x=\frac{18}{24}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{8}=\frac{3}{8}\times 3{\cdot}14$ (দুই দশমাঙ্ক পর্যন্ত লইয়া)

$=1{\cdot}18$ (প্রায়)

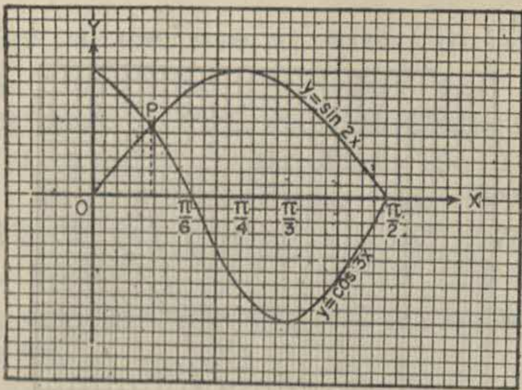
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হইল $x=0,\ 1{\cdot}18$ (প্রায়)।

দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ 6. লৈখিক পদ্ধতিতে সমাধান কর : $\cos 3x=\sin 2x$, যেখানে $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\pi$.

$y=\cos 3x$ এবং $y=\sin 2x$ এর লেখ দুইটি অঙ্কন কর।

$x=0,$	$\frac{1}{6}\pi,$	$\frac{1}{4}\pi,$	$\frac{1}{3}\pi,$	$\frac{1}{2}\pi.$
$\cos 3x=1,$	$0,$	$-0{\cdot}71,$	$-1,$	$0.$
$\sin 2x=0,$	$0{\cdot}87,$	$1,$	$0{\cdot}87,$	$0.$

5 প্রশ্নের অনুরূপ একক লইয়া অঙ্কিত লেখ দুইটি 12.4 চিত্রে প্রদর্শিত হইল :



চিত্র 12.4

নির্ণেয় সমাধান : $x=\pi/2$ এবং $x=\pi/10$, কারণ ছেদবিন্দু P এর ভুজ, O হইতে OX বরাবর 4·8 একক দূরত্বের সমান।

প্রশ্নমালা XII

1. নিম্নলিখিত ত্রিকোণমিতিক সমীকরণগুলির লেখ অঙ্কন কর, যখন $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$:

(i) $y=2 \sin x$ (ii) $y=\sin 2x$ (iii) $y=4 \sin \frac{1}{2}x$
(iv) $y=8 \cos x$ (v) $y=2 \cos \frac{1}{3}x$ (vi) $y=\sin x+2\cos x$
(vii) $y=\sin 3x-\cos x$ (viii) $y=\sin x+3\cos x$ (ix) $y=\cos x-\sin x$

2. $0 \leqslant x < \frac{1}{2}\pi$ সীমার মধ্যে নিম্নের লেখগুলি অঙ্কন কর :

(i) $y=\tan 2x$ (ii) $y=-\frac{1}{2} \tan x$ (iii) $y=\sin x \cos x$
(iv) $y=\cot \frac{1}{2}x$ (v) $y=\operatorname{cosec} \frac{1}{3}x$ (vi) $y=\sec \frac{1}{2}x$

3. লৈখিক পদ্ধতিতে সমাধান কর, যখন $0<x<\frac{1}{2}\pi$:

(i) $x=\tan x$ (ii) $x=\cos x$ (iii) $\tan x=1$

4. লৈখিক পদ্ধতিতে সমাধান কর :

(i) $x+\sin x=1$, যখন x এর মান 0 এবং 2π এর মধ্যে
(ii) $x^2=\cos x$, যখন x, $-\frac{1}{2}\pi$ এবং $\frac{1}{2}\pi$ এর মধ্যে
(iii) $\cot x-\tan x=2$, যখন x, 0 এবং π এর মধ্যে অবস্থিত

(*iv*) $5 \sin x + 2 \cos x = 5$, যখন x এর মান 0 এবং $\frac{3}{2}\pi$ মধ্যে

(*v*) $2 \sin^2 x = \cos 2x$, যখন x, $-\frac{1}{2}\pi$ এবং $\frac{3}{2}\pi$ এর মধ্যে

5. নিম্নলিখিত রাশির চিহ্ন এবং মানের পরিবর্তনসূচক লেখ অঙ্কন কর :

$$(2 \sin \theta - \sin 2\theta)/(2 \sin \theta + \sin 2\theta)$$

6. 0 এবং $\frac{1}{2}\pi$ এর অন্তর্বর্তী বিভাগকে 9টি সমান ভাগে বিভক্তকরণের দ্বারা প্রাপ্ত x এর মানগুলি লইয়া তালিকা প্রস্তুত কর এবং $\tan x$ ও $\cos x$ এর লেখ অঙ্কন কর। যদি $\tan x = \cos x$ হয়, তবে উক্ত লেখদ্বয় হইতে x এর আসন্ন মানগুলি নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

3. (*i*) 0 (*ii*) 0·74 (*iii*) $\frac{1}{4}\pi$. 4. (*i*) 0·51 (*ii*) $\pm 0·82$ (*iii*) $\pi/8$, $5\pi/8$, (*iv*) 46°25′ এবং 90° (*v*) $-\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$. 6. 38°11′ (প্রায়)

13

উচ্চতা এবং দূরত্ব (কঠিনতর প্রশ্ন)

(Heights and distances—Harder Problems)

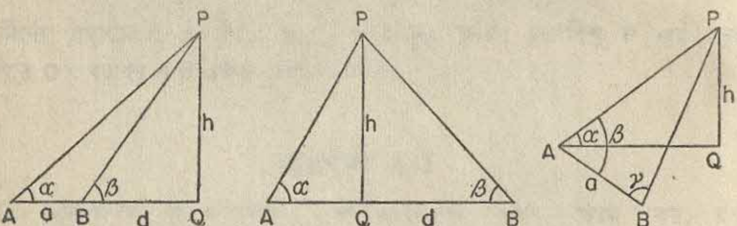
13.1. সূচনা

ইতিপূর্বে উচ্চতা ও দূরত্ব বিষয়ক সরল প্রশ্নগুলি বিবেচনা করা হইয়াছে। বর্তমান অধ্যায়ে উপস্থাপিত প্রশ্নগুলি তুলনামূলক বিচারে অধিকতর সাধারণ প্রকৃতির— ইহাদের সমাধানে প্রয়োজন সমতল ত্রিকোণমিতির জ্ঞান এবং প্রয়োগ নৈপুণ্য।

অনুভূমিক সমতলের উপর দণ্ডায়মান অনধিগম্য বুরুজের উচ্চতা ও দূরত্ব

প্রথম ক্ষেত্র : **একই সমতলে পরিমাপবিষয়ক প্রশ্ন :**

ধরা যাক্ বুরুজটি PQ এবং উহার পাদবিন্দু Q গামী জমি অনুভূমিক (চিত্র 13.1(a))।



চিত্র 13.1(a) চিত্র 13.1(b) চিত্র 13.1(c)

এই জমির উপর কোন বিন্দু A তে বুরুজ-শীর্ষের উন্নতি কোণ α পরিমাপ দ্বারা নির্ণয় করা হইল। A হইতে Q অভিমুখে সোজাসুজি দূরত্ব $AB=a$ মাপিয়া লইয়া B বিন্দুতে উন্নতিকোণ $\beta(>\alpha)$ পরিমাপপূর্বক নির্ণয় করা হইল। ধরা হইল $PQ=h$, $BQ=d$; h এবং d নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন, $a=AQ-BQ=h\cot\alpha-h\cot\beta$

$$=h\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right)=h.\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

$\therefore\quad h=a\sin\alpha\sin\beta\operatorname{cosec}(\beta-\alpha)$

এবং $d=h\cot\beta=a\sin\alpha\cos\beta\operatorname{cosec}(\beta-\alpha)$.

A এবং B বুরুজটির পরস্পর বিপরীত দিকে অবস্থিত হইলে :

চিত্র 13.1 (b) হইতে, $a=AB=AQ+QB=h(\cot\alpha+\cot\beta)$,

যাহা হইতে পাওয়া যায় $h=a\sin\alpha\sin\beta\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)$

এবং $d=h\cot\beta=a\sin\alpha\cos\beta\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)$.

টীকা : লক্ষ্য কর যে AP, AB, BP, PQ সকলেই এক সমতলে অবস্থিত। h এবং dএর প্রাপ্ত মানের সরলীকরণের জন্য লগারিদ্‌মিক্ হিসাব উপযুক্ত।

দ্বিতীয় ক্ষেত্র : **একাধিক সমতলে পরিমাপবিষয়ক প্রশ্ন :**

ধরা যাক্ PQ($=h$) হইল বুরুজ এবং উহার পাদবিন্দু Q গামী অনুভূমিক সমতলে A একটি বিন্দু [চিত্র 13.1(c)]। অন্য যে-কোন সুবিধাজনক অভিমুখে দূরত্ব AB($=a$) মাপিয়া লইয়া $\angle PAQ=\alpha$, $\angle PAB=\beta$, $\angle ABP=\gamma$ [চিত্র 13.1(c) দ্রষ্টব্য] পরিমাপ দ্বারা নির্ণয় করা হইল।

তাহা হইলে PAB ত্রিভুজ হইতে,

$$\frac{AP}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin(\pi-\beta-\gamma)}=\frac{a}{\sin(\beta+\gamma)}\,;\ AP=\frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

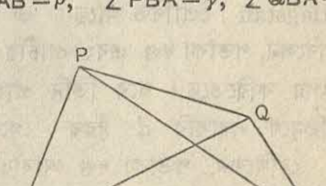
$\therefore\ h=AP\sin\alpha=a\sin\alpha\sin\gamma\,\text{cosec}\,(\beta+\gamma)$; এবং যদি $AQ=d$ হয়, তবে

$$d=AP\cos\alpha=a\cos\alpha\sin\gamma\,\text{cosec}\,(\beta+\gamma).$$

দুইটি দৃশ্যমান কিন্তু অনধিগম্য বস্তুর মধ্যে দূরত্ব :

ধরা যাক্, দুইটি বস্তু P এবং Qএর মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে। দুইটি উপযুক্ত বিন্দু A এবং B লওয়া হইল, যেখানে $AB=a$; PA, PB, QA, QB যুক্ত করা হইল। ধরা যাক্ $\angle PAB=\alpha$, $\angle QAB=\beta$, $\angle PBA=\gamma$, $\angle QBA=\delta$ (চিত্র 13.2 দ্রষ্টব্য)।

যদি AP, AQ, AB রেখাগুলি **এক সমতলীয় হয়,** তবে $\angle PAQ=\alpha-\beta$ কিন্তু যদি ঐ রেখাগুলি **এক সমতলে অবস্থিত না হয়,** তবে $\angle PAQ(\neq\alpha-\beta)$ পরিমাপপূর্বক নির্ণয় করিতে হইবে। যাহাই হউক না কেন, ধরা হইল যে $\angle PAQ$ জ্ঞাত এবং উহা θ.



চিত্র 13.2

ত্রিভুজ PAB হইতে,

$$\frac{AP}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin(\pi-\alpha-\gamma)}=\frac{a}{\sin(\alpha+\gamma)}$$

এবং ত্রিভুজ AQB হইতে,

$$\frac{AQ}{\sin\delta}=\frac{a}{\sin(\pi-\beta-\delta)}=\frac{a}{\sin(\beta+\delta)}.$$

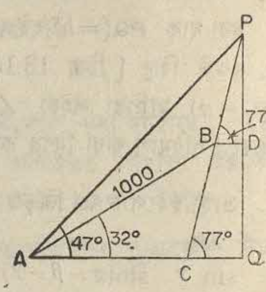
$\therefore\ AP=a\sin\gamma\,\text{cosec}\,(\alpha+\gamma)$, $AQ=a\sin\delta\,\text{cosec}\,(\beta+\delta)$.

এইভাবে PAQ ত্রিভুজে AP, AQ এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ θ নির্ণয় করা হইল ; সুতরাং এখন $PQ^2=AP^2+AQ^2-2AP.AQ\cos\theta$ হইতে PQ জানা যাইবে।

13·2. দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ

উদা. 1. একটি পর্বতের উন্নতি, দেখা গেল, 47° ; অনুভূমিক তলের সহিত 32° কোণে নত একটি ঢালু পথ বরাবর পর্বতটির অভিমুখে 1000 মিটার উঠিবার পর দেখা গেল ঐ উন্নতি হইল 77° ; প্রথম পর্যবেক্ষণ স্থল হইতে পর্বতটির উল্লম্ব উচ্চতা নির্ণয় কর [প্রদত্ত $\sin 47^\circ = 0·731$]।

চিত্র 13.3 দেখ। PQ হইল পর্বতটির উল্লম্ব উচ্চতা $(=h)$, পর্যবেক্ষণ স্থল দুইটি হইল A এবং B, BD, AQ এর সহিত সমান্তরাল।



চিত্র 13.3

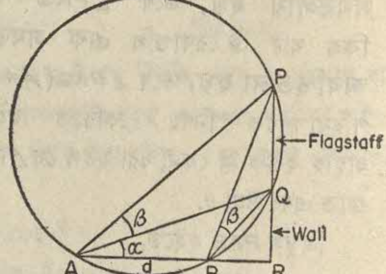
APB ত্রিভুজে, $\angle PAB = 47^\circ - 32^\circ = 15^\circ$; $\angle APB = \angle APC = 77^\circ - 47^\circ = 30^\circ$, $\angle PBA = 180^\circ - (15^\circ + 30^\circ) = 135^\circ$, এবং

$$\frac{AP}{\sin 135^\circ} = \frac{AB}{\sin 30^\circ}, \quad \text{বা} \quad AP = 1000.\frac{1}{\sqrt{2}}.\ 2 = 1000\sqrt{2}$$

এইভাবে, $h = AP \sin 47^\circ = 1000\sqrt{2} \times 0·731 = 1034$ মিটার (প্রায়), যদি $\sqrt{2} = 1·414$ লওয়া হয়।

উদা. 2. অনুভূমিক তলে অবস্থিত একটি প্রাচীরের উপর একটি পতাকা দণ্ড (flagstaff) প্রোথিত আছে। ঐ তলের কোন এক বিন্দুতে দণ্ডায়মান এক দর্শক দেখিলেন, পতাকা দণ্ড এবং প্রাচীর (wall) ঐ বিন্দুতে যথাক্রমে α এবং β কোণ উৎপন্ন করিতেছে। পরে তিনি প্রাচীর অভিমুখে সরাসরি d দূরত্ব গেলেন ও দেখিলেন, পতাকা দণ্ড আবার β কোণ উৎপন্ন করিল। প্রাচীর ও পতাকা দণ্ডের উচ্চতা নির্ণয় কর।

চিত্র 13.4 দেখ। RQ হইল প্রাচীর, QP পতাকা দণ্ড ; A, B হইল পর্যবেক্ষণ বিন্দু দুইটি, সুতরাং $AB = d$; এখন PQ, A এবং B বিন্দুতে একই কোণ β উৎপন্ন করে বলিয়া A, B, Q, P সমবৃত্ত।



চিত্র 13.4

এখন $\angle ABQ = 180^\circ - \angle APQ = 180^\circ - (90^\circ - \alpha - \beta) = 90^\circ + \alpha + \beta$,
$\angle AQB = 180^\circ - \angle ABQ - \angle QAB = 180^\circ - 90^\circ - \alpha - \beta - \alpha = 90^\circ - (2\alpha + \beta)$

ত্রিভুজ AQB হইতে,

$AQ = AB \sin ABQ \operatorname{cosec} AQB = d \sin(90^\circ + \alpha + \beta) \operatorname{cosec}\{90^\circ - (2\alpha + \beta)\}$
$= d\cos(\alpha + \beta)\sec(2\alpha + \beta)$.

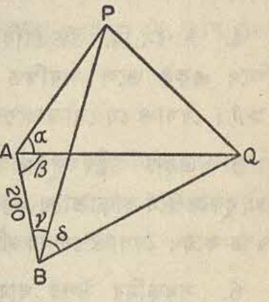
সুতরাং ত্রিভুজ AQR হইতে,

$RQ = AQ \sin \alpha = d \sin \alpha \cos(\alpha+\beta) \sec(2\alpha+\beta)$; এবং ত্রিভুজ PAQ হইতে,

$QP = AQ \sin \beta . \operatorname{cosec} APQ = AQ \sin \beta \sec(\alpha+\beta)$

$= d \sin \beta \sec(2\alpha+\beta)$

উদা. 3. কোন প্রদত্ত বিন্দু A হইতে দুইটি অনধিগম্য বস্তু P এবং Q এর প্রত্যেকটির দূরত্ব নির্ণয় কর, যেখানে ইহা জ্ঞাত আছে যে অপর একটি স্থির বিন্দু B হইতে Aর দূরত্ব 200 মিটার এবং $\angle PAQ = \alpha = 42°27'$, $\angle BAQ = \beta = 58°13'$, $\angle ABP = \gamma = 32°19'$, $\angle PBQ = \delta = 43°54'$; এবং ইহাও প্রদত্ত যে $\log 2 = 0·30103$, $L\sin 32°19' = 9·72803$, $L\sin 47°1' = 9·86425$, $L\sin 76°13' = 9·98731$, $L\sin 45°34' = 9·85374$, $\log 146·2 = 2·16481$, $\log 272·02 = 2·43460$ (ধরিয়া লও যে A, B, Q, P এক সমতলে আছে)।



চিত্র 13.5

চিত্র 13.5 দেখ। APB ত্রিভুজে,

$$\frac{AP}{\sin \gamma} = \frac{AB}{\sin APB} = \frac{200}{\sin(\pi-\alpha-\beta-\gamma)},$$

বা $AP = 200 \sin \gamma / \sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

আবার AQB ত্রিভুজ হইতে,

$$\frac{AQ}{\sin(\gamma+\delta)} = \frac{AB}{\sin(AQB)} = \frac{200}{\sin(\pi-\beta-\gamma-\delta)},$$

বা $AQ = 200 \sin(\gamma+\delta)/\sin(\beta+\gamma+\delta)$.

সুতরাং, $AP = 200 \sin 32°19'/\sin 132°59' = 200 \sin 32°19'/\sin 47°1'$

ইহা হইতে পাওয়া যায়, $\log (AP) = \log 200 + L\sin 39°19' - L\sin 47°1'$
$= 2·16481$

এবং $AP = 146·2$ মিটার (প্রায়)

আবার, $AQ = 200 \sin 76°13'/\sin 45°34'$, যাহা হইতে পাওয়া যায় $AQ = 272·02$ মিটার (প্রায়)।

প্রশ্নমালা XIII

1. একটি উল্লম্ব দণ্ডের ছায়া 60 সে.মি. দীর্ঘতর হয়, যখন সূর্যের উন্নতি কোণ 45° হইতে 30° হয়। দেখাও যে দণ্ডটির উচ্চতা $30(\sqrt{3}+1)$ সে.মি.।

2. 250 সে.মি. উচ্চ একটি স্তম্ভের উপর দণ্ডায়মান প্রতিমূর্তি স্তম্ভের পাদমূল হইতে 600 সে.মি. দূরবর্তী কোন বিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন করে তাহার ট্যানজেন্ট হইল 0·125 ; দেখাও যে স্তম্ভটির উচ্চতা $92\frac{6}{7}$ সে.মি. ।

3. (a) দেখাও যে কোন বুরুজের ছায়ার দৈর্ঘ্য ও উহার উচ্চতার অনুপাত যখন $1 : \sqrt{3}$ হইবে তখন সূর্যের উন্নতি কোণ 60°.

(b) যখন কোন উল্লম্ব খুঁটির ছায়ার দৈর্ঘ্য খুঁটির দৈর্ঘ্যের সমান হয় তখন সূর্যের উন্নতি কোণ কত ? [উঃ 45°]

4. h সে.মি. উচ্চতাবিশিষ্ট একটি খাড়া উচ্চ পর্বতশীর্ষ হইতে পর্বতটির ঠিক দক্ষিণে একই তলে অবস্থিত দুইটি নৌকার অবনতি কোণ যথাক্রমে α ও β এবং $\alpha > \beta$; দেখাও যে নৌকাদ্বয়ের অন্তর্বর্তী দূরত্ব $h(\cot\beta - \cot\alpha)$ সে.মি. ।

5. একটি উল্লম্ব বুরুজ অনুভূমিক সমতলস্থ কোন বিন্দুতে α কোণ উৎপন্ন করে এবং বুরুজ শীর্ষে খাড়াভাবে দণ্ডায়মান h উচ্চতার একটি খুঁটি ঐ একই বিন্দুতে β কোণ উৎপন্ন করে ; দেখাও যে বুরুজটির উচ্চতা $h \sin\alpha \operatorname{cosec}\beta \cos(\alpha+\beta)$ ।

6. সমভূমির উপর খাড়াভাবে দণ্ডায়মান ABCDE স্মৃতিস্তম্ভের AB, AC, AD অংশ ঐ সমভূমির কোন বিন্দু P তে যথাক্রমে α, β, γ কোণ উৎপন্ন করে। যদি $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$, $AP = x$ এবং $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$ হয়, তবে দেখাও যে $(a+b+c)x^2 = abc$.

7. A অবস্থান হইতে কোন পর্বত চূড়ার উন্নতি কোণ α ; অনুভূমিক সমতলের সহিত β কোণে নত ঢালু পথ ধরিয়া ঐ চূড়ার দিকে c দূরত্ব যাইলে উন্নতি কোণটির পরিমাণ γ হইয়া যায়। দেখাও যে পর্বতটির উচ্চতা $c \sin\alpha \sin(\gamma-\beta) \operatorname{cosec}(\gamma-\alpha)$ সে.মি. ।

8. পরস্পর হইতে এক কিলোমিটার দূরে অবস্থিত দুইটি স্থান হইতে এবং উহাদের সংযোজক রেখার মধ্যবিন্দু হইতে ঐ রেখাগামী উল্লম্ব তলের বাহিরে অবস্থিত একটি উড়োজাহাজের উন্নতি কোণ যথাক্রমে 60°, 30° এবং 45° ; দেখাও যে উড়োজাহাজটির উচ্চতা $250\sqrt{6}$ মিটার ।

9. কোন অনুভূমিক আয়তাকার ক্ষেত্র ABCDর উপর একটি খুঁটি উল্লম্বভাবে স্থাপন করা হইল। A, B, C, D হইতে ঐ খুঁটির শীর্ষের উন্নতি কোণ যথাক্রমে $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ হইলে দেখাও যে $\cot^2\alpha - \cot^2\beta = \cot^2\delta - \cot^2\gamma$.

10. একটি নির্দিষ্ট স্থান হইতে কোন অনুভূমিক সরলরেখা বরাবর উড্ডীয়মান একটি পক্ষীর উন্নতি কোণ সময়ের সমব্যবধানে পরপর চারিবার পর্যবেক্ষণ দ্বারা নির্ণয় করিয়া দেখা গেল যে উহারা যথাক্রমে α, β, γ এবং δ ; পক্ষীটি সমবেগে উড়িতেছে, ইহা ধরিয়া লইয়া দেখাও যে $\cot^2\alpha - \cot^2\delta = 3(\cot^2\beta - \cot^2\gamma)$.

11. কোন একটি অনুভূমিক সরলরেখা একটি বস্তুর সরাসরি নিম্ন দিয়া যায় এবং ঐ সরলরেখার উপর অবস্থিত তিনটি বিন্দু A, B, C হইতে বস্তুটি পর্যবেক্ষণ করা হইল। দেখা গেল যে B বিন্দুতে উন্নতি কোণ A বিন্দুতে উন্নতি কোণের দ্বিগুণ এবং C বিন্দুতে উন্নতি কোণ A বিন্দুতে উন্নতি কোণের তিনগুণ ; যদি $AB=a$, $BC=b$ হয়, তবে দেখাও যে বস্তুটির উচ্চতা $\frac{a}{2b}\sqrt{(a+b)(3b-a)}$.

12. পর্বতের উপর অবস্থিত এক ব্যক্তি দেখিলেন যে অনুভূমিক সমতলে দণ্ডায়মান তিনটি বুরুজ তাঁহার চক্ষুতে সমান কোণ উৎপন্ন করে এবং বুরুজগুলির পাদদেশের অবনতি কোণ যথাক্রমে α, β, γ ; যদি বুরুজ তিনটির উচ্চতা a, b, c হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\frac{\sin(\beta-\gamma)}{a\sin\alpha}+\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{b\sin\beta}+\frac{\sin(\alpha-\beta)}{c\sin\gamma}=0.$$

13. C এবং D বিন্দু হইতে একই সমতলে অবস্থিত অপর দুই বিন্দু A ও B কে পর্যবেক্ষণ করা হইল, যেখানে $CD=d$; যদি ACD, BCD, ADC, BDC কোণ চারিটি যথাক্রমে $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ হয় এবং $\alpha+\gamma=\beta+\delta$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $AB=d\sin(\alpha-\beta)\operatorname{cosec}(\alpha+\gamma)$.

14. একই অনুভূমিক তলে অবস্থিত দুইটি অনধিগম্য বিন্দু P ও Q এবং অপর দুই অবস্থান S ও T, যাহার প্রত্যেকটিতে PQ কে α কোণ ধারণ করিতে দেখা গেল। আবার PT, S বিন্দুতে β কোণ এবং QS, T তে γ কোণ ধারণ করে ; প্রমাণ কর যে $PQ=ST\sin\alpha\operatorname{cosec}(\beta+\gamma-\alpha)$.

15. O অবস্থান হইতে d দূরত্বে অবস্থিত F দুর্গে তোপ দাগা হইল ; C এর সহিত এক সরলরেখায় অবস্থিত ও O হইতে যথাক্রমে a এবং b দূরত্বে অবস্থিত A ও B অবস্থানে অগ্নিশিখা (flash) দর্শন এবং শব্দ (report) শ্রবণের অন্তর্বর্তী সময় দেখা গেল যথাক্রমে t এবং t' ; দেখাও যে শব্দের বেগ হইল

$$\sqrt{\frac{(d^2-ab)(a-b)}{at'^2-bt^2}}.$$

16. কোন পর্বতের ঢালুগাত্র অনুভূমিক তলের সহিত α কোণে নত এবং ঐ ঢালুদেশে দণ্ডায়মান এক ব্যক্তি পর্যবেক্ষণ করিলেন যে পর্বতটির পাদমূলে অবস্থিত একটি উল্লম্ব স্তম্ভের শীর্ষের উন্নতি কোণ 30° ; পরে তিনি স্তম্ভ অভিমুখে পর্বতগাত্র বরাবর a দূরত্ব নামিয়া আসিয়া দেখিলেন, ঐ স্তম্ভশীর্ষের উন্নতি কোণ 60° ; দেখাও যে স্তম্ভটির উচ্চতা $\frac{1}{2}a(\sqrt{3}\sec\alpha+4\sin\alpha)$.

17. একটি হ্রদের h সে.মি. উপরে অবস্থিত একটি বিন্দুতে কোন বেলুনের উন্নতি কোণ α এবং ঐ একই বিন্দুতে হ্রদের জলে বেলুনটির প্রতিবিম্বের অবনতি কোণ β ; জলের তল হইতে প্রতিবিম্বটির খাড়া গভীরতা ঐ জলের তল হইতে বেলুনটির উচ্চতার সমান এবং বেলুন ও উহার প্রতিবিম্ব একই উল্লম্ব রেখায় অবস্থিত, ইহা ধরিয়া লইয়া প্রমাণ কর যে হ্রদ হইতে বেলুনটির উচ্চতা $h\sin(\alpha+\beta)\operatorname{cosec}(\beta-\alpha)$.

18. সূর্যের মধ্য দিয়া গমন করে এইরূপ একটি উল্লম্ব তলে ঘূর্ণনক্ষম ও নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের একটি দণ্ডের এক প্রান্ত ভূপৃষ্ঠে আবদ্ধ ; দণ্ডটি যে দীর্ঘতম ছায়া উৎপাদনে সক্ষম তাহা যদি দণ্ডটির দৈর্ঘ্যের 10/3 গুণ হয়, তবে দেখাও যে সূর্যের উন্নতি কোণ 17° 27′ 30″, যখন দেওয়া আছে যে ,

$$\log 3 = 0{\cdot}47712,\ L\cos 72°32'30'' = 9{\cdot}47712$$

19. কোন হ্রদের 12 মিটার উপরে অবস্থিত এক বিন্দুতে দূরবর্তী বুরুজশীর্ষস্থ আলোকের উন্নতি কোণ 24°55′ এবং হ্রদের জলে উহার প্রতিবিম্বের অবনতি কোণ 35°5′ ; দেখাও যে বুরুজটির উচ্চতা প্রায় 58·88 মিটার যদি দেওয়া থাকে যে

$$\log 2 = 0{\cdot}30103,\ \log 3 = 0{\cdot}47712,\ \log 588 = 2{\cdot}76938,$$
$$\log 589 = 2{\cdot}77012,\quad L\sin 10°10' = 9{\cdot}24677.$$

20. এক ব্যক্তি কোন জলসেচনের খালের প্রসার PQ পরিমাপের জন্য Q অভিমুখে বর্ধিত PQ সরলরেখার উপরিস্থিত R বিন্দুতে গমন করিলেন ; পরে এই রেখার সহিত সমকোণে অবস্থিত রেখা বরাবর 100 মিটার অগ্রসর হইয়া দেখিলেন যে PQ এবং QR তাঁহার চক্ষুতে যথাক্রমে 15° এবং 25° কোণ উৎপন্ন করিতেছে। দেখাও যে খালটির প্রসার 37·27919 মিটার, যখন দেওয়া থাকে যে $L\cos 25° = 9{\cdot}9572757$,

$$L\cos 40° = 9{\cdot}8842540,\ L\cos 75° = 9{\cdot}4129962,$$
$$\log 37279 = 4{\cdot}5714643,\ \log 3728 = 3{\cdot}5714759.$$

21. এক ব্যক্তি কোন অট্টালিকা অভিমুখে পদব্রজে অগ্রসর হইতেছেন ; ঐ অট্টালিকা শীর্ষে একটি পতাকাদণ্ড উল্লম্বভাবে রক্ষিত আছে। তিনি লক্ষ্য করিলেন যে অট্টালিকা হইতে তাঁহার দূরত্ব যখন d, তখন পতাকাদণ্ডটি তাঁহার চক্ষুতে সর্বোচ্চ কোণ উৎপন্ন করিল। যদি ঐ সর্বোচ্চ কোণ θ হয়, তবে দেখাও যে পতাকাদণ্ডটির দৈর্ঘ্য $2d \tan\theta$ এবং অট্টালিকার উচ্চতা $d \tan(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\theta)$.

22. একটি পর্বতের নতি (gradient) 70 এ 1 এবং পর্বতটির উপর অবস্থিত একটি পথ সর্বোচ্চ ঢালের রেখার সহিত (to the line of greatest slope) 45° কোণে নত। দেখাও যে পথটির নতি হইল 99 এ 1.

পরিশিষ্ট

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	00000	00432	00860	01284	01703						42	85	127	170	212	254	297	339	381
						02119	02531	02938	03342	03743	40	81	121	162	202	242	283	323	364
11	04139	04532	04922	05308	05690						37	77	116	154	193	232	270	309	348
						06070	06446	06819	07188	07555	37	74	111	148	185	222	259	296	333
12	07918	08279	08636	08991	09342						36	71	106	142	177	213	248	284	319
						09691	10037	10380	10721	11059	34	68	102	136	170	204	238	272	307
13	11394	11727	12057	12385	12710						33	66	98	131	164	197	229	262	295
						13033	13354	13672	13988	14301	32	63	95	126	158	190	221	253	284
14	14613	14922	15229	15534	15836						30	61	91	122	152	183	213	244	274
						16137	16435	16732	17026	17319	29	59	88	118	147	177	206	236	265
15	17609	17898	18184	18469	18752						28	57	85	114	142	171	199	228	256
						19033	19312	19590	19866	20140	28	55	83	110	138	165	193	221	248
16	20412	20683	30951	21219	21484						27	53	80	107	134	160	187	214	240
						21748	22011	22272	22531	22789	26	52	78	104	130	156	182	208	233
17	23045	23300	23553	23805	24055						26	50	76	101	126	151	176	201	227
						24304	24551	24797	25042	25285	25	49	73	98	122	147	171	196	220
18	25527	25768	26007	26245	26482						24	48	71	95	119	143	167	190	214
						26717	26951	27184	27416	27646	23	46	69	93	116	139	162	185	208
19	27875	28103	28330	28556	28780						23	45	68	90	113	135	158	180	203
						29003	29226	29447	29667	29885	22	44	66	88	110	132	154	176	198
20	30103	30320	30535	30750	30963	31175	31387	31597	31806	32015	21	43	64	85	106	127	148	170	190
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244	33445	33646	33846	34044	20	41	61	81	101	121	141	162	182
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218	35411	35603	35793	35984	20	39	58	77	97	116	135	154	174
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107	37291	37475	37658	37840	19	37	56	74	93	111	130	148	167
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917	39094	39270	39445	39620	18	35	53	71	89	106	124	142	159

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654	40824	40993	41162	41330	17	34	51	68	85	102	119	136	153
26	41497	41664	41830	41996	42160	42325	42488	42651	42813	42975	16	33	49	66	82	98	115	131	148
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933	44091	44248	44404	44560	16	32	47	63	79	95	111	126	142
28	44716	44871	45025	45179	45332	45484	45637	45788	45939	46090	15	30	46	61	76	91	107	122	137
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982	47129	47276	47422	47567	15	29	44	59	74	88	103	118	132
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430	48572	48714	48855	48996	14	29	43	57	72	86	100	114	129
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831	49969	50106	50243	50379	14	28	41	55	69	83	97	110	124
32	50515	50650	50786	50920	51054	51188	51322	51455	51587	51720	13	27	40	54	67	80	94	107	121
33	51851	51983	52114	52244	52375	52504	52634	52763	52892	53020	13	26	39	52	65	78	91	104	117
34	53148	53275	53403	53529	53656	53782	53908	54033	54158	54283	13	25	38	50	63	76	88	101	113
35	54407	54531	54654	54777	54900	55023	55145	55267	55388	55509	12	24	37	49	61	73	85	98	110
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229	56348	56467	56585	56703	12	24	36	48	60	71	83	95	107
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403	57519	57634	57749	57864	12	23	35	46	58	70	81	93	104
38	57978	58092	58206	58320	58433	58546	58659	58771	58883	58995	11	23	34	45	57	68	79	90	102
39	59106	59218	59329	59439	59550	59660	59770	59879	59988	60097	11	22	33	44	55	66	77	88	99
40	60206	60314	60423	60531	60638	60746	60853	60959	61066	61172	11	21	32	43	54	64	75	86	97
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805	61909	62014	62118	62221	10	21	31	42	53	63	74	84	95
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839	62941	63043	63144	63246	10	20	31	41	51	61	71	82	92
43	63347	63448	63548	63649	63749	63849	63949	64048	64147	64246	10	20	30	40	50	60	70	80	90
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836	64933	65031	65128	65225	10	20	29	39	49	59	68	78	88
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801	65896	65992	66087	66181	10	19	29	38	48	57	67	76	86
46	66276	66370	66464	66558	66652	66745	66839	66932	67025	67117	9	19	28	37	47	56	65	74	84
47	67210	67302	67394	67486	67578	67669	67761	67852	67943	68034	9	18	27	36	46	55	64	73	82
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574	68664	68753	68842	68931	9	18	27	36	45	53	63	72	81
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461	69548	69636	69723	69810	9	18	26	35	44	53	62	70	79

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329	70415	70501	70586	70672	9	17	26	34	43	52	60	69	77
51	70757	70842	70927	71012	71096	71181	71265	71349	71433	71517	8	17	25	34	42	50	59	67	76
52	71600	71684	71767	71850	71933	72016	72099	72181	72263	72346	8	17	25	33	42	50	58	66	75
53	72428	72509	72591	72673	72754	72835	72916	72997	73078	73159	8	16	24	32	41	49	57	65	73
54	73239	73320	73400	73480	73560	73640	73719	73799	73878	73957	8	16	24	32	40	48	56	64	72
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429	74507	74586	74663	74741	8	16	23	31	39	47	55	63	70
56	74819	74896	74974	75051	75128	75205	75282	75358	75435	75511	8	15	23	31	39	46	54	62	69
57	75587	75664	75740	75815	75891	75967	76042	76118	76193	76268	8	15	23	30	38	45	53	60	68
58	76343	76418	76492	76567	76641	76716	76790	76864	76938	77012	7	15	22	30	37	44	52	59	67
59	77085	77159	77232	77305	77379	77452	77525	77597	77670	77743	7	15	22	29	37	44	51	58	66
60	77815	77887	77960	78032	78104	78176	78247	78319	78390	78462	7	14	22	29	36	43	50	58	65
61	78533	78604	78675	78746	78817	78888	78958	79029	79099	79169	7	14	21	28	36	43	50	57	64
62	79239	79309	79379	79449	79518	79588	79657	79727	79796	79865	7	14	21	28	35	41	48	55	62
63	79934	80003	80072	80140	80209	80277	80346	80414	80482	80550	7	14	20	27	34	41	48	54	61
64	80618	80686	80754	80821	80889	80956	81023	81090	81158	81224	7	13	20	27	34	40	47	54	60
65	81291	81358	81425	81491	81558	81624	81690	81757	81823	81889	7	13	20	26	33	40	46	53	59
66	81954	82020	82086	82151	82217	82282	82347	82413	82478	82543	7	13	20	26	33	39	46	52	59
67	82607	82672	82737	82802	82866	82930	82995	83059	83123	83187	6	13	19	26	32	38	45	51	58
68	83251	83315	83378	83442	83506	83569	83632	83696	83759	83822	6	13	19	25	32	38	44	50	57
69	83885	83948	84011	84073	84136	84198	84261	84323	84386	84448	6	12	19	25	31	37	43	50	56
70	84510	84572	84634	84696	84757	84819	84880	84942	85003	85065	6	12	19	25	31	37	43	50	56
71	85126	85187	85248	85309	85370	85431	85491	85552	85612	85673	6	12	18	24	31	37	43	49	55
72	85733	85794	85854	85914	85974	86034	86094	86153	86213	86273	6	12	18	24	30	36	42	48	54
73	86332	86392	86451	86510	86570	86629	86688	86747	86806	86864	6	12	18	24	30	35	41	47	53
74	86923	86982	87040	87099	87157	87216	87274	87332	87390	87448	6	12	17	23	29	35	41	46	52

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
75	87506	87564	87622	87679	87737	87795	87852	87910	87967	88024	6	12	17	23	29	35	41	46	52
76	88081	88138	88195	88252	88309	88366	88423	88480	88536	88593	6	11	17	23	29	34	40	46	51
77	88649	88705	88762	88818	88874	88930	88986	89042	89098	89154	6	11	17	22	28	34	39	45	50
78	89209	89265	89321	89376	89432	89487	89542	89597	89653	89708	6	11	17	22	23	33	39	44	50
79	89763	89818	89873	89927	89982	90037	90091	90146	90200	90255	6	11	17	22	28	33	39	44	50
80	90309	90363	90417	90472	90526	90580	90634	90687	90741	90795	5	11	16	22	27	32	38	43	49
81	90848	90902	90956	91009	91062	91116	91169	91222	91275	91328	5	11	16	21	27	32	37	42	48
82	91381	91434	91487	91540	91593	91645	91698	91751	91803	91855	5	11	16	21	27	32	37	42	48
83	91908	91960	92012	92064	92117	92169	92221	92273	92324	92376	5	10	16	21	26	31	36	42	47
84	92428	92480	92531	92583	92634	92686	92737	92788	92840	92891	5	10	15	20	26	31	36	41	46
85	92942	92993	93044	93095	93146	93197	93247	93298	93349	93399	5	10	15	20	26	31	36	41	46
86	93450	93500	93551	93601	93651	93702	93752	93802	93852	93902	5	10	15	20	25	30	35	40	45
87	93952	94002	94052	94101	94151	94201	94250	94300	94349	94399	5	10	15	20	25	30	35	40	45
88	94448	94498	94547	94596	94645	94694	94743	94792	94841	94890	5	10	15	20	25	29	34	39	44
89	94939	94988	95036	95085	95134	95182	95231	95279	95328	95376	5	10	15	19	24	29	34	39	44
90	95424	95472	95521	95569	95617	95665	95713	95761	95809	95856	5	10	14	19	24	29	34	38	43
91	95904	95952	95999	96047	96095	96142	96190	96237	96284	96332	5	9	14	19	24	28	33	38	42
92	96379	96426	96473	96520	96567	96614	96661	96708	96755	96802	5	9	14	19	24	28	33	38	42
93	96848	96895	96942	96988	97035	97081	97128	97174	97220	97267	5	9	14	18	23	28	32	38	42
94	97313	97359	97405	97451	97497	97543	97589	97635	97681	97727	5	9	14	18	23	28	32	37	42
95	97772	97818	97864	97909	97955	98000	98046	98091	98137	98182	5	9	14	18	23	27	32	36	41
96	98227	98272	98318	98363	98408	98453	98498	98543	98588	98632	5	9	14	18	23	27	32	36	41
97	98677	98722	98767	98811	98856	98900	98945	98989	99034	99078	4	9	13	18	22	27	31	36	40
98	99123	99167	99211	99255	99300	99344	99388	99432	99476	99520	4	9	13	18	22	26	31	35	40
99	99564	99607	99651	99695	99739	99782	99826	99870	99913	99957	4	9	13	17	22	26	31	35	39

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	10000	10023	10046	10069	10093	10116	10139	10162	10186	10209	2	5	7	9	12	14	16	19	21
·01	10233	10257	10280	10304	10328	10351	10375	10399	10423	10447	2	5	7	10	12	14	17	19	21
·02	10471	10495	10520	10544	10568	10593	10617	10641	10666	10691	2	5	7	10	12	15	17	20	22
·03	10715	10740	10765	10789	10814	10839	10864	10889	10914	10940	3	5	8	10	13	15	18	20	23
·04	10965	10990	11015	11041	11066	11092	11117	11143	11169	11194	3	5	8	10	13	15	18	20	23
·05	11220	11246	11272	11298	11324	11350	11376	11402	11429	11455	3	5	8	11	13	16	18	21	24
·06	11482	11508	11535	11561	11588	11614	11641	11668	11695	11722	3	5	8	11	13	16	19	21	24
·07	11749	11776	11803	11830	11858	11885	11912	11940	11967	11995	3	5	8	11	14	16	19	22	25
·08	12023	12050	12078	12106	12134	12162	12190	12218	12246	12274	3	6	8	11	14	17	20	22	25
·09	12303	12331	12359	12388	12417	12445	12474	12503	12531	12560	3	6	9	11	14	17	20	23	26
·10	12589	12618	12647	12677	12706	12735	12764	12794	12823	12853	3	6	9	12	15	18	21	24	26
·11	12882	12912	12942	12972	13002	13032	13062	13092	13122	13152	3	6	9	12	15	18	21	24	27
·12	13183	13213	13243	13274	13305	13335	13366	13397	13428	13459	3	6	9	12	15	18	21	25	28
·13	13490	13521	13552	13583	13614	13646	13677	13709	13740	13772	3	6	9	13	16	19	22	25	28
·14	13804	13836	13868	13900	13932	13964	13996	14028	14060	14093	3	6	10	13	16	19	22	26	29
·15	14125	14158	14191	14223	14256	14289	14322	14355	14388	14421	3	7	10	13	16	20	23	26	30
·16	14454	14488	14521	14555	14588	14622	14655	14689	14723	14757	3	7	10	13	17	20	24	27	30
·17	14791	14825	14859	14894	14928	14962	14997	15031	15066	15101	3	7	10	14	17	21	24	28	31
·18	15136	15171	15205	15241	15276	15311	15346	15382	15417	15453	4	7	11	14	18	21	25	28	32
·19	15488	15524	15560	15596	15631	15668	15704	15740	15776	15812	4	7	11	14	18	22	25	29	32
·20	15849	15885	15922	15959	15996	16032	16069	16106	16144	16181	4	7	11	15	18	22	26	30	33
·21	16218	16255	16293	16331	16368	16406	16444	16482	16520	16558	4	8	11	15	19	23	26	30	34
·22	16596	16634	16672	16711	16749	16788	16827	16866	16904	16943	4	8	12	15	19	23	27	31	35
·23	16982	17022	17061	17100	17140	17179	17219	17258	17298	17338	4	8	12	16	20	24	28	32	36
·24	17378	17418	17458	17498	17539	17579	17620	17660	17701	17742	4	8	12	16	20	24	28	32	36

ANTILOGARITHMS.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·25	17783	17824	17865	17906	17947	17989	18030	18072	18113	18155	4	8	12	17	21	25	29	33	37
·26	18197	18239	18281	18323	18365	18408	18450	18493	18535	18578	4	8	13	17	21	25	30	34	38
·27	18621	18664	18707	18750	18793	18836	18880	18923	18967	19011	4	9	13	17	22	26	30	35	39
·28	19055	19099	19143	19187	19231	19275	19320	19364	19409	19454	4	9	13	18	22	26	31	35	40
·29	19498	19543	19588	19634	19679	19724	19770	19815	19861	19907	5	9	14	18	23	27	32	36	41
·30	19953	19999	20045	20091	20137	20184	20230	20277	20324	20370	5	9	14	19	23	28	32	37	42
·31	20417	20464	20512	20559	20606	20654	20701	20749	20797	20845	5	10	14	19	24	29	33	38	43
·32	20893	20941	20989	21038	21086	21135	21184	21232	21281	21330	5	10	15	19	24	29	34	39	44
·33	21380	21429	21478	21528	21577	21627	21677	21727	21777	21827	5	10	15	20	25	30	35	40	45
·34	21878	21928	21979	22029	22080	22131	22182	22233	22284	22336	5	10	15	20	25	31	36	41	46
·35	22387	22439	22491	22542	22594	22646	22699	22751	22803	22856	5	10	16	21	26	31	37	42	47
·36	22909	22961	23014	23067	23121	23174	23227	23281	23336	23388	5	11	16	21	27	32	37	43	48
·37	23442	23496	23550	23605	23659	23714	23768	23823	23878	23933	5	11	16	22	27	33	38	44	49
·38	23988	24044	24099	24155	24210	24266	24322	24378	24434	24491	6	11	17	22	28	34	39	45	50
·39	24547	24604	24660	24717	24774	24831	24889	24946	25003	25061	6	11	17	23	29	34	40	46	51
·40	25119	25177	25236	25293	25351	25410	25468	25527	25586	25645	6	12	18	23	29	35	41	47	53
·41	25704	25763	25823	25882	25942	26002	26062	26122	26182	26242	6	12	18	24	30	36	42	48	54
·42	26303	26363	26424	26485	26546	26607	26669	26730	26792	26853	6	12	18	24	31	37	43	49	55
·43	26915	26977	27040	27102	27164	27227	27290	27353	27416	27479	6	13	19	25	31	38	44	50	56
·44	27542	27606	27669	27733	27797	27861	27925	27990	28054	28119	6	13	19	26	32	39	45	51	58
·45	28184	28249	28314	28379	28445	28510	28576	28642	28708	28774	7	13	20	26	33	39	46	52	59
·46	28840	28907	28973	29040	29107	29174	29242	29309	29376	29444	7	13	20	27	34	40	47	54	60
·47	29512	29580	29648	29717	29785	29854	29923	29992	30061	30130	7	14	21	28	34	41	48	55	62
·48	30200	30269	30339	30409	30479	30549	30620	30690	30761	30832	7	14	21	28	35	42	49	56	63
·49	30903	30974	31046	31117	31189	31261	31333	31405	31477	31550	7	14	22	29	36	43	50	58	65

ANTILOGARITHMS.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	31623	31696	31769	31842	31916	31989	32063	32137	32211	32285	7	15	22	29	37	44	52	59	66
·51	32359	32434	32509	32584	32659	32735	32809	32885	32961	33037	8	15	23	30	38	45	53	60	68
·52	33113	33189	33266	33343	33420	33497	33574	33651	33729	33806	8	15	23	31	39	46	54	62	69
·53	33884	33963	34041	34119	34198	34277	34356	34435	34514	34594	8	16	24	32	40	47	55	63	71
·54	34674	34754	34834	34914	34995	35075	35156	35237	35318	35400	8	16	24	32	40	48	56	65	73
·55	35481	35563	35645	35727	35810	35892	35975	36058	36141	36224	8	16	25	33	41	50	58	66	74
·56	36308	36392	36475	36559	36644	36728	36813	36898	36983	37068	8	17	25	34	42	51	59	68	76
·57	37154	37239	37325	37411	37497	37584	37670	37757	37844	37931	9	17	26	35	43	52	61	69	78
·58	38019	38107	38194	38282	38371	38459	38548	38637	38726	38815	9	18	27	35	44	53	62	71	80
·59	38905	38994	39084	39174	39264	39355	39446	39537	39628	39719	9	18	27	36	45	54	63	72	82
·60	39811	39902	39994	40087	40179	40272	40365	40458	40551	40644	9	19	28	37	46	56	65	74	83
·61	40738	40832	40926	41020	41115	41210	41305	41400	41495	41591	9	19	28	38	47	57	66	76	85
·62	41687	41783	41879	41976	42073	42170	42267	42364	42462	42560	10	19	29	39	49	58	68	78	87
·63	42658	42756	42855	42954	43053	43152	43251	43351	43451	43551	10	20	30	40	50	60	70	80	89
·64	43652	43752	43853	43954	44055	44157	44259	44361	44463	44566	10	20	30	41	51	61	71	81	91
·65	44668	44771	44875	44978	45082	45186	45290	45394	45499	45604	10	21	31	42	52	62	73	83	94
·66	45709	45814	45920	46026	46132	46238	46345	46452	46559	46666	11	21	32	43	53	64	75	85	96
·67	46774	46881	46989	47098	47206	47315	47424	47534	47643	47753	11	22	33	44	54	65	76	87	98
·68	47863	47973	48084	48195	48306	48417	48529	48641	48753	48865	11	22	33	45	56	67	78	89	100
·69	48978	49091	49204	49317	49431	49545	49659	49774	49888	50003	11	23	34	46	57	68	80	91	103
·70	50119	50234	50350	50466	50582	50699	50816	50933	51050	51168	12	23	35	47	58	70	82	93	105
·71	51286	51404	51523	51642	51761	51880	52000	52119	52240	52360	12	24	36	48	60	72	84	96	108
·72	52481	52602	52723	52845	52966	53088	53211	53333	53456	53580	12	24	37	49	61	73	85	98	110
·73	53703	53827	53951	54075	54200	54325	54450	54576	54702	54828	13	25	38	50	63	75	88	100	113
·74	54954	55081	55208	55336	55463	55590	55719	55847	55976	56105	13	26	38	51	64	77	90	102	115

ANTILOGARITHMS.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·75	56234	56364	56494	56624	56754	56885	57016	57148	57280	57412	13	26	39	52	66	79	92	105	118
·76	57544	57677	57810	57943	58076	58210	58345	58479	58614	58749	13	27	40	54	67	80	94	107	121
·77	58884	59020	59156	59293	59429	59566	59704	59841	59979	60117	14	27	41	55	69	82	96	110	123
·78	60256	60395	60534	60674	60814	60954	61094	61235	61376	61518	14	28	42	56	70	84	98	112	126
·79	61659	61802	61944	62087	62230	62373	62517	62661	62806	62951	14	29	43	58	72	86	101	115	130
·80	63096	63241	63387	63533	63680	63826	63973	64121	64269	64417	15	29	44	59	74	88	103	118	132
·81	64565	64714	64863	65013	65163	65313	65464	65615	65766	65917	15	30	45	60	75	90	105	120	135
·82	66069	66222	66374	66527	66681	66834	66988	67143	67298	67453	15	31	46	62	77	92	108	123	139
·83	67608	67764	67920	68077	68234	68391	68549	68707	68865	69024	16	32	47	63	79	95	110	126	142
·84	69183	69343	69503	69663	69823	69984	70146	70307	70469	70632	16	32	48	64	81	97	113	129	145
·85	70795	70958	71121	71285	71450	71614	71779	71945	72111	72277	17	33	50	66	83	99	116	132	149
·86	72444	72611	72778	72946	73114	73282	73451	73621	73790	73961	17	34	51	68	85	101	118	135	152
·87	74131	74302	74473	74645	74817	74989	75162	75336	75509	75683	17	35	52	69	87	104	121	138	156
·88	75858	76033	76208	76384	76560	76736	76913	77090	77268	77446	18	35	53	71	89	107	125	142	159
·89	77625	77804	77983	78163	78343	78524	78705	78886	79068	79250	18	36	54	72	91	109	127	145	163
·90	79433	79616	79799	79983	80168	80353	80538	80724	80910	81096	19	37	56	74	93	111	130	148	167
·91	81283	81470	81658	81846	82035	82224	82414	82604	82794	82985	19	38	57	76	95	113	132	151	170
·92	83176	83368	83560	83753	83946	84140	84333	84528	84723	84918	19	39	58	78	97	116	136	155	175
·93	85114	85310	85507	85704	85901	86099	86298	86497	86696	86896	20	40	60	79	99	119	139	158	178
·94	87096	87297	87498	87700	87902	88105	88308	88512	88716	88920	20	41	61	81	102	122	142	162	183
·95	89125	89331	89536	89743	89950	90157	90365	90573	90782	90991	21	42	62	83	104	125	146	166	187
·96	91201	91411	91622	91833	92045	92257	92470	92683	92897	93111	21	42	64	85	106	127	149	170	191
·97	93325	93541	93756	93972	94189	94406	94624	94842	95060	95280	22	43	65	87	109	130	152	174	195
·98	95499	95719	95940	96161	96383	96605	96828	97051	97275	97499	22	44	67	89	111	133	155	178	200
·99	97724	97949	98175	98401	98628	98855	99083	99312	99541	99770	23	46	68	91	114	137	160	182	205

NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	0·00000	0·00291	0·00582	0·00873	0·01164	0·01454	0·01745	89°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
1°	·01745	·02036	·02327	·02618	·02908	·03199	·03490	88°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
2°	·03490	·03781	·04071	·04362	·04653	·04943	·05234	87°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
3°	·05234	·05524	·05814	·06105	·06395	·06685	·06976	86°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
4°	·06976	·07266	·07556	·07846	·08136	·08426	·08716	85°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
5°	0·08716	0·09005	0·09295	0·09585	0·09874	0·10164	0·10453	84°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
6°	·10453	·10742	·11031	·11320	·11609	·11898	·12187	83°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
7°	·12187	·12476	·12764	·13053	·13341	·13629	·13917	82°	29	58	87	116	145	173	202	231	260
8°	·13917	·14205	·14493	·14781	·15069	·15356	·15643	81°	29	58	86	115	144	173	202	230	259
9°	·15643	·15931	·16218	·16505	·16792	·17078	·17365	80°	29	57	86	115	144	172	201	230	258
10°	0·17365	0·17651	0·17937	0·18224	0·18509	0·18795	0·19081	79°	29	57	86	115	144	172	201	229	258
11°	·19081	·19366	·19652	·19937	·20222	·20507	·20791	78°	29	57	86	114	143	171	200	228	257
12°	·20791	·21076	·21360	·21644	·21928	·22212	·22495	77°	28	57	85	114	142	170	199	227	256
13°	·22495	·22778	·23062	·23345	·23627	·23910	·24192	76°	28	57	85	113	141	170	198	226	255
14°	·24192	·24474	·24756	·25038	·25320	·25601	·25882	75°	28	56	85	113	141	169	197	226	254
15°	0·25882	0·26163	0·26443	0·26724	0·27004	0·27284	0·27564	74°	28	56	84	112	140	168	196	224	252
16°	·27564	·27843	·28123	·28402	·28680	·28959	·29237	73°	28	56	84	112	140	167	195	223	251
17°	·29237	·29515	·29793	·30071	·30348	·30625	·30902	72°	28	56	83	111	139	166	194	222	250
18°	·30902	·31178	·31454	·31730	·32006	·32282	·32557	71°	28	55	83	110	138	166	193	221	248
19°	·32557	·32832	·33106	·33381	·33655	·33929	·34202	70°	27	55	82	110	137	164	192	219	247

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
20°	0·34202	0·34475	0·34748	0·35021	0·35293	0·35565	0·35837	69°	27	55	82	109	137	164	191	218	246
21°	·35837	·36108	·36379	·36650	·36921	·37191	·37461	68°	27	54	81	108	136	163	190	217	244
22°	·37461	·37730	·37999	·38268	·38537	·38805	·39073	67°	27	54	81	108	135	161	188	215	242
23°	·39073	·39341	·39608	·39875	·40142	·40408	·40674	66°	27	53	80	107	134	160	187	214	240
24°	·40674	·40939	·41204	·41469	·41734	·41998	·42262	65°	27	53	80	106	133	159	186	212	238
25°	0·42262	0·42525	0·42788	0·43051	0·43313	0·43575	0·43837	64°	26	52	79	105	131	157	184	210	236
26°	·43837	·44098	·44359	·44620	·44880	·45140	·45399	63°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
27°	·45399	·45658	·45917	·46175	·46433	·46690	·46947	62°	26	52	77	103	129	155	181	206	232
28°	·46947	·47204	·47460	·47716	·47971	·48226	·48481	61°	26	51	77	102	128	154	179	204	230
29°	·48481	·48735	·48989	·49242	·49495	·49748	·50000	60°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
30°	0·50000	0·50252	0·50503	0·50754	0·51004	0·51254	0·51504	59°	25	50	75	100	125	150	175	200	225
31°	·51504	·51753	·52002	·52250	·52498	·52745	·52992	58°	25	50	74	99	124	149	174	198	223
32°	·52992	·53238	·53484	·53730	·53975	·54220	·54464	57°	25	49	74	98	123	147	172	196	221
33°	·54464	·54708	·54951	·55194	·55436	·55678	·55919	56°	24	49	73	97	122	146	170	194	219
34°	·55919	·56160	·56401	·56641	·56880	·57119	·57358	55°	24	48	72	96	120	144	168	192	216
35°	0·57358	0·57596	0·57833	0·58070	0·58307	0·58543	0·58779	54°	24	47	71	95	119	142	166	190	213
36°	·58779	·59014	·59248	·59482	·59716	·59949	·60182	53°	23	47	70	94	117	140	164	187	211
37°	·60182	·60414	·60645	·60876	·61107	·61337	·61566	52°	23	46	70	92	116	139	162	185	208
38°	·61566	·61795	·62024	·62251	·62479	·62706	·62932	51°	23	46	68	91	114	137	159	182	205
39°	·62932	·63158	·63383	·63608	·63832	·64056	·64279	50°	22	45	67	90	112	135	157	179	202
40°	0·64279	0·64501	0·64723	0·64945	0·65166	0·65386	0·65606	49°	22	44	66	88	111	133	155	177	199
41°	·65606	·65825	·66044	·66262	·66480	·66697	·66913	48°	22	44	65	87	109	131	153	174	196
42°	·66913	·67129	·67344	·67559	·67773	·67987	·68200	47°	21	43	64	86	107	129	150	172	193
43°	·68200	·68412	·68624	·68835	·69046	·69256	·69466	46°	21	42	63	84	106	127	148	169	190
44°	·69466	·69675	·69883	·70091	·70298	·70505	·70711	45°	21	42	62	83	104	124	145	166	187

NATURAL COSINES

NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
45°	0·70711	0·70916	0·71121	0·71325	0·71529	0·71732	0·71934	44°	20	41	61	82	102	122	143	163	184
46°	·71934	·72136	·72337	·72537	·72737	·72937	·73135	43°	20	40	60	80	100	120	140	160	180
47°	·73135	·73333	·73531	·73728	·73924	·74120	·74314	42°	20	39	59	78	98	118	138	157	177
48°	·74314	·74509	·74703	·74896	·75088	·75280	·75471	41°	19	39	58	77	96	116	135	154	173
49°	·75471	·75661	·75851	·76041	·76229	·76417	·76604	40°	19	38	57	76	95	113	132	151	170
50°	0·76604	0·76791	0·76977	0·77162	0·77347	0·77531	0·77715	39°	19	37	56	74	93	111	130	148	167
51°	·77715	·77897	·78079	·78261	·78442	·78622	·78801	38°	18	36	54	72	91	109	127	145	163
52°	·78801	·78980	·79158	·79335	·79512	·79688	·79864	37°	18	35	53	71	89	106	124	142	159
53°	·79864	·80038	·80212	·80386	·80558	·80730	·80902	36°	17	35	52	69	87	104	121	138	156
54°	·80902	·81072	·81242	·81412	·81580	·81748	·81915	35°	17	34	51	68	85	101	118	135	152
55°	0·81915	0·82082	0·82248	0·82413	0·82577	0·82741	0·82904	34°	16	33	49	66	82	99	115	132	148
56°	·82904	·83066	·83228	·83389	·83549	·83708	·83867	33°	16	32	48	64	80	96	112	128	144
57°	·83867	·84025	·84182	·84339	·84495	·84650	·84805	32°	16	31	47	63	78	94	110	125	141
58°	·84805	·84959	·85112	·85264	·85416	·85567	·85717	31°	15	30	46	61	76	91	106	122	137
59°	·85717	·85866	·86015	·86163	·86310	·86457	·86603	30°	15	30	44	59	74	89	103	118	133
60°	0·86603	0·86748	0·86892	0·87036	0·87178	0·87321	0·87462	29°	14	29	43	57	72	86	100	114	129
61°	·87462	·87603	·87743	·87882	·88020	·88158	·88295	28°	14	28	42	55	69	83	97	111	125
62°	·88295	·88431	·88566	·88701	·88835	·88968	·89101	27°	13	27	40	54	67	81	94	108	121
63°	·89101	·89232	·89363	·89493	·89628	·89752	·89879	26°	13	26	39	52	65	78	91	104	117
64°	·89879	·90007	·90133	·90259	·90383	·90507	·90631	25°	13	25	38	50	63	75	88	100	113

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
65°	0·90631	0·90753	0·90875	0·90996	0·91116	0·91236	0·91355	24°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
66°	·91355	·91472	·91590	·91706	·91822	·91936	·92050	23°	12	23	35	46	58	70	81	93	104
67°	·92050	·92164	·92276	·92388	·92499	·92609	·92718	22°	11	22	33	45	56	67	78	89	100
68°	·92718	·92827	·92935	·93042	·93148	·93253	·93358	21°	11	21	32	43	53	64	75	85	96
69°	·93358	·93462	·93565	·93667	·93769	·93869	·93969	20°	10	20	31	41	51	61	71	81	92
70°	0·93969	0·94068	0·94167	0·94264	0·94361	0·94457	0·94552	19°	10	19	29	39	49	58	68	78	87
71°	·94552	·94646	·94740	·94832	·94924	·95015	·95106	18°	9	18	28	37	46	55	64	74	83
72°	·95106	·95195	·95284	·95372	·95459	·95545	·95630	17°	9	18	26	35	44	52	61	70	79
73°	·95630	·95715	·95799	·95882	·95964	·96046	·96126	16°	8	17	25	33	41	50	58	66	74
74°	·96126	·96206	·96285	·96363	·96440	·96517	·96593	15°	8	16	23	31	39	47	54	62	70
75°	0·96593	0·96667	0·96742	0·96815	0·96887	0·96959	0·97030	14°	7	15	22	29	36	44	51	58	65
76°	·97030	·97100	·97169	·97237	·97304	·97371	·97437	13°	7	14	20	27	34	41	47	54	61
77°	·97437	·97502	·97566	·97630	·97692	·97754	·97815	12°	6	13	19	25	32	38	44	50	57
78°	·97815	·97875	·97934	·97992	·98050	·98107	·98163	11°	6	12	17	23	29	35	41	46	52
79°	·98163	·98218	·98272	·98325	·98378	·98430	·98481	10°	5	11	16	21	27	32	37	42	48
80°	0·98481	0·98531	0·98580	0·98629	0·98676	0·98723	0·98769	9°	5	10	14	19	24	29	34	38	43
81°	·98769	·98814	·98858	·98902	·98944	·98986	·99027	8°	4	9	13	17	22	26	30	34	39
82°	·99027	·99067	·99106	·99144	·99182	·99219	·99255	7°	4	8	11	15	19	23	27	30	34
83°	·99255	·99290	·99324	·99357	·99390	·99421	·99452	6°	3	7	10	13	17	20	23	26	30
84°	·99452	·99482	·99511	·99540	·99567	·99594	·99619	5°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
85°	0·99619	0·99644	0·99668	0·99692	0·99714	0·99736	0·99756	4°	2	5	7	9	12	14	16	18	21
86°	·99756	·99776	·99795	·99813	·99831	·99847	·99863	3°	2	4	5	7	9	11	13	14	16
87°	·99863	·99878	·99892	·99905	·99917	·99929	·99939	2°	1	3	4	5	7	8	9	10	12
88°	·99939	·99949	·99958	·99966	·99973	·99979	·99985	1°									
89°	·99985	·99989	·99993	·99996	·99998	1·00000	1·00000	0°									
90°	1·00000																

NATURAL COSINES

NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	0·00000	0·00291	0·00582	0·00873	0·01164	0·01455	0·01746	89°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
1°	·01746	·02037	·02328	·02619	·02910	·03201	·03492	88°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
2°	·03492	·03783	·04075	·04366	·04658	·04949	·05241	87°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
3°	·05241	·05533	·05824	·06116	·06408	·06700	·06993	86°	29	58	88	117	146	175	204	234	263
4°	·06993	·07285	·07578	·07870	·08163	·08456	·08749	85°	29	58	88	117	146	175	204	234	263
5°	0·08749	0·09042	0·09335	0·09629	0·09923	0·10216	0·10510	84°	29	59	88	118	147	176	206	235	265
6°	·10510	·10805	·11099	·11394	·11688	·11983	·12278	83°	29	59	88	118	147	176	206	235	265
7°	·12278	·12574	·12869	·13165	·13461	·13758	·14054	82°	30	59	89	118	148	178	207	237	266
8°	·14054	·14351	·14648	·14945	·15243	·15540	·15838	81°	30	59	89	119	149	178	208	238	267
9°	·15838	·16137	·16435	·16734	·17033	·17333	·17633	80°	30	60	90	120	150	179	209	239	269
10°	0·17633	0·17933	0·18233	0·18534	0·18835	0·19136	0·19438	79°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
11°	·19438	·19740	·20042	·20345	·20648	·20952	·21256	78°	30	61	91	121	152	182	212	242	273
12°	·21256	·21560	·21864	·22169	·22475	·22781	·23087	77°	31	61	92	122	153	183	214	244	275
13°	·23087	·23393	·23700	·24008	·24316	·24624	·24933	76°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
14°	·24933	·25242	·25552	·25862	·26172	·26483	·26795	75°	31	62	93	124	155	186	217	248	279
15°	0·26795	0·27107	0·27419	0·27732	0·28046	0·28360	0·28675	74°	31	63	94	125	157	188	219	250	282
16°	·28675	·28990	·29305	·29621	·29938	·30255	·30573	73°	32	63	95	126	158	190	221	253	285
17°	·30573	·30891	·31210	·31530	·31850	·32171	·32492	72°	32	64	96	128	160	192	224	256	288
18°	·32492	·32814	·33136	·33460	·33783	·34108	·34433	71°	32	65	97	129	162	194	226	259	291
19°	·34433	·34758	·35085	·35412	·35740	·36068	·36397	70°	33	65	98	131	164	196	229	262	294

20°	0·36397	0·36727	0·37057	0·37388	0·37720	0·38053	0·38386	69°	33	66	100	133	166	199	232	265	298
21°	·38386	·38721	·39055	·39391	·39727	·40065	·40403	68°	34	67	101	134	168	202	236	269	302
22°	·40403	·40741	·41081	·41421	·41763	·42105	·42447	67°	34	68	102	136	170	205	239	273	306
23°	·42447	·42791	·43136	·43481	·43828	·44175	·44523	66°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
24°	·44523	·44872	·45222	·45573	·45924	·46277	·46631	65°	35	70	105	140	176	211	246	281	316
25°	0·46631	0·46985	0·47341	0·47698	0·48055	0·48414	0·48773	64°	36	71	107	143	179	214	250	286	321
26°	·48773	·49134	·49495	·49858	·50222	·50587	·50953	63°	36	73	109	145	182	218	254	291	327
27°	·50953	·51320	·51688	·52057	·52427	·52798	·53171	62°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
28°	·53171	·53545	·53920	·54296	·54673	·55051	·55431	61°	38	75	113	151	189	226	264	302	339
29°	·55431	·55812	·56194	·56577	·56962	·57348	·57735	60°	38	77	115	154	192	230	269	307	346
30°	0·57735	0·58124	0·58513	0·58905	0·59297	0·59691	0·60086	59°	39	78	118	157	196	235	274	313	353
31°	·60086	·60483	·60881	·61280	·61681	·62083	·62487	58°	40	80	120	160	200	240	280	320	360
32°	·62487	·62892	·63299	·63707	·64117	·64528	·64941	57°	41	82	123	164	205	245	286	327	368
33°	·64941	·65355	·65771	·66189	·66608	·67028	·67451	56°	42	84	126	167	209	251	293	334	376
34°	·67451	·67875	·68301	·68728	·69157	·69588	·70021	55°	43	86	128	171	214	257	300	342	385
35°	0·70021	0·70455	0·70891	0·71329	0·71769	0·72211	0·72654	54°	44	88	132	176	220	263	307	351	395
36°	·72654	·73100	·73547	·73996	·74447	·74900	·75355	53°	45	90	135	180	225	270	315	360	405
37°	·75355	·75812	·76272	·76733	·77196	·77661	·78129	52°	46	92	139	185	231	277	324	370	416
38°	·78129	·78598	·79070	·79544	·80020	·80498	·80978	51°	48	95	143	190	238	285	333	380	428
39°	·80978	·81461	·81946	·82434	·82923	·83415	·83910	50°	49	98	147	196	245	293	342	391	440
40°	0·83910	0·84407	0·84906	0·85408	0·85912	0·86419	0·86929	49°	50	101	151	201	252	302	352	402	453
41°	·86929	·87441	·87955	·88473	·88992	·89515	·90040	48°	52	104	156	208	260	311	363	415	467
42°	·90040	·90569	·91099	·91633	·92170	·92709	·93252	47°	54	107	161	214	268	321	375	429	482
43°	·93252	·93797	·94345	·94896	·95451	·96008	·96569	46°	55	111	166	221	277	332	387	442	498
44°	·96569	·97133	·97700	·98270	·98843	·99420	1·00000	45°	57	114	172	229	286	343	400	457	515
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

NATURAL COTANGENTS

NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	1·00000	1·00583	1·01170	1·01761	1·02355	1·02952	1·03553	44°	59	118	178	237	296	355	414	474	533
46°	·03553	·04158	·04766	·05378	·05994	·06613	·07237	43°	61	123	184	246	307	368	430	491	553
47°	·07237	·07864	·08496	·09131	·09770	·10414	·11061	42°	64	127	191	255	319	382	446	510	573
48°	·11061	·11713	·12369	·13029	·13694	·14363	·15037	41°	66	132	199	265	332	397	463	530	596
49°	·15037	·15715	·16398	·17085	·17777	·18474	·19175	40°	69	138	207	276	345	413	482	552	620
50°	1·19175	1·19882	1·20593	1·21310	1·22031	1·22758	1·23490	39°	72	144	216	288	360	431	503	575	647
51°	·23490	·24227	·24969	·25717	·26471	·27230	·27994	38°	75	150	225	300	376	451	526	601	676
52°	·27994	·28764	·29541	·30323	·31110	·31904	·32704	37°	78	157	235	314	392	471	549	628	707
53°	·32704	·33511	·34323	·35142	·35968	·36800	·37638	36°	82	164	247	329	411	493	576	658	740
54°	·37638	·38484	·39336	·40195	·41061	·41934	·42815	35°	86	172	259	345	431	517	603	690	776
55°	1·42815	1·43703	1·44598	1·45501	1·46411	1·47330	1·48256	34°	91	181	272	363	453	544	634	725	816
56°	·48256	·49190	·50133	·51084	·52043	·53010	·53987	33°	96	191	287	382	478	573	669	764	860
57°	·53987	·54972	·55966	·56969	·57981	·59002	·60033	32°	101	201	302	403	504	604	705	806	907
58°	·60033	·61074	·62125	·63185	·64256	·65337	·66428	31°	107	213	320	426	533	639	746	852	959
59°	·66428	·67530	·68643	·69766	·70901	·72047	·73205	30°	113	226	339	451	565	677	790	903	1016
60°	1·7321	1·7437	1·7556	1·7675	1·7796	1·7917	1·8040	29°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
61°	1·8040	1·8165	1·8291	1·8418	1·8546	1·8676	1·8807	28°	13	25	38	51	64	77	89	102	115
62°	1·8807	1·8940	1·9074	1·9210	1·9347	1·9486	1·9626	27°	14	27	41	54	68	82	95	109	122
63°	1·9626	1·9768	1·9912	2·0057	2·0204	2·0353	2·0503	26°	15	29	44	58	73	88	102	117	131
64°	2·0503	2·0655	2·0809	2·0965	2·1123	2·1283	2·1445	25°	16	31	47	63	79	94	110	126	141

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
65°	2·1445	2·1609	2·1775	2·1943	2·2113	2·2286	2·2460	24°	17	34	51	68	85	101	118	135	152
66°	2·2460	2·2637	2·2817	2·2998	2·3183	2·3369	2·3559	23°	18	37	55	73	92	110	128	146	165
67°	2·3559	2·3750	2·3945	2·4142	2·4342	2·4545	2·4751	22°	20	40	60	80	100	119	139	159	179
68°	2·4751	2·4960	2·5172	2·5386	2·5605	2·5826	2·6051	21°	22	43	65	87	109	130	152	174	195
69°	2·6051	2·6279	2·6511	2·6746	2·6985	2·7228	2·7475	20°	24	47	76	95	119	142	160	190	213
70°	2·7475	2·7725	2·7980	2·8239	2·8502	2·8770	2·9042	19°	26	52	78	104	131	157	183	209	235
71°	2·9042	2·9319	2·9600	2·9887	3·0178	3·0475	3·0777	18°	29	58	87	116	145	174	202	231	260
72°	3·0777	3·1084	3·1397	3·1716	3·2041	3·2371	3·2709	17°	32	64	97	129	161	193	225	258	290
73°	3·2709	3·3052	3·3402	3·3759	3·4124	3·4495	3·4874	16°	36	72	108	144	181	216	253	289	325
74°	3·4874	3·5261	3·5656	3·6059	3·6470	3·6891	3·7321	15°	41	81	122	163	204	244	285	326	366
75°	3·7321	3·7760	3·8208	3·8667	3·9136	3·9617	4·0108	14°	46	93	139	185	232	278	325	371	418
76°	4·0108	4·0611	4·1123	4·1653	4·2193	4·2747	4·3315	13°	53	107	160	214	267	320	374	427	481
77°	4·3315	4·3897	4·4494	4·5107	4·5736	4·6382	4·7046	12°	62	124	186	248	311	373	435	497	559
78°	4·7046	4·7729	4·8430	4·9152	4·9894	5·0658	5·1446	11°	73	146	220	293	366	439	512	586	659
79°	5·1446	5·2257	5·3093	5·3955	5·4845	5·5764	5·6713	10°	88	175	263	350	438	526	613	701	788
80°	5·6713	5·7694	5·8708	5·9758	6·0844	6·1970	6·3138	9°	The differences change very rapidly here so that they cannot be tabulated.								
81°	6·3138	6·4348	6·5606	6·6912	6·8269	6·9682	7·1154	8°									
82°	7·1154	7·2687	7·4287	7·5958	7·7704	7·9530	8·1443	7°									
83°	8·1443	8·3450	8·5555	8·7769	9·0098	9·2553	9·5144	6°									
84°	9·5144	9·7882	10·0780	10·3854	10·7119	11·0594	11·4301	5°									
85°	11·4301	11·8262	12·2505	12·7062	13·1969	13·7267	14·3007	4°	The cotangent of a small angle of a' or the tangent of $90° - a'$ is very nearly equal to 3437·7 divided by a.								
86°	14·3007	14·9244	15·6048	16·3499	17·1693	18·0750	19·0811	3°									
87°	19·0811	20·2056	21·4704	22·9038	24·5418	26·4316	28·6363	2°									
88°	28·6363	31·2416	34·3678	38·1885	42·9641	49·1039	57·2900	1°									
89°	57·2900	68·7501	85·9398	114·589	171·885	343·774	+∞	0°									
90°	+∞																

NATURAL COTANGENTS

LOGARITHMIC SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	−∞	7·46373	7·76475	7·94084	8·06578	8·16268	8·24186	89°	Differences vary so rapidly here that tabulation is impossible. For small angles or a minutes $\log \sin a'$ or $\log \cos (90° - a') = \log a + \bar{4}{\cdot}46373$								
1°	8·24186	8·30879	8·36678	8·41792	8·46366	8·50504	8·54282	88°									
2°	8·54282	8·57757	8·60973	8·63968	8·66769	8·69400	8·71880	87°									
3°	8·71880	8·74226	8·76451	8·78568	8·80585	8·82513	8·84358	86°									
4°	8·84358	8·86128	8·87829	8·89464	8·91040	8·92561	8·94030	85°									
5°	8·94030	8·95450	8·96825	8·98157	8·99450	9·00704	9·01923	84°									
6°	9·01923	9·03109	9·04262	9·05386	9·06481	9·07548	9·08589	83°									
7°	9·08589	9·09606	9·10599	9·11570	9·12519	9·13447	9·14356	82°	96	192	288	384	480	576	672	768	864
8°	9·14356	9·15245	9·16116	9·16970	9·17807	9·18628	9·19433	81°	85	169	254	338	423	507	592	676	761
9°	9·19433	9·20223	9·20999	9·21761	9·22509	9·23244	9·23967	80°	76	151	227	302	378	453	529	604	680
10°	9·23967	9·24677	9·25376	9·26063	9·26739	9·27405	9·28060	79°	68	136	204	272	341	409	477	545	613
11°	·28060	·28705	·29340	·29966	·30582	·31189	·31788	78°	62	124	186	248	310	373	435	497	559
12°	·31788	·32378	·32960	·33534	·34100	·34658	·35209	77°	57	114	171	228	285	342	399	456	513
13°	·35209	·35752	·36289	·36819	·37341	·37858	·38368	76°	53	105	158	210	263	316	368	421	473
14°	·38368	·38871	·39369	·39860	·40346	·40825	·41300	75°	49	98	147	195	244	293	342	391	440
15°	9·41300	9·41768	9·42232	9·42690	9·43143	9·43591	9·44034	74°	46	91	137	182	228	273	319	364	410
16°	·44034	·44472	·44905	·45334	·45758	·46178	·46594	73°	43	85	128	171	213	256	299	341	384
17°	·46594	·47005	·47411	·47814	·48213	·48607	·48998	72°	40	80	120	160	201	241	281	321	361
18°	·48998	·49385	·49768	·50148	·50523	·50896	·51264	71°	38	76	113	151	189	227	264	302	340
19°	·51264	·51629	·51991	·52350	·52705	·53056	·53405	70°	36	71	107	143	179	214	250	285	321

20°	9·53405	9·53751	9·54093	9·54433	9·54769	9·55102	9·55433	69°	34	68	101	135	169	203	237	270	304
21°	·55433	·55761	·56085	·56408	·56727	·57044	·57358	68°	32	64	96	128	161	193	225	257	289
22°	·57358	·57669	·57978	·58284	·58588	·58889	·59188	67°	31	61	92	122	153	183	214	244	275
23°	·59188	·59484	·59778	·60070	·60359	·60646	·60931	66°	29	58	87	116	146	174	204	233	262
24°	·60931	·61214	·61494	·61773	·62049	·62323	·62595	65°	28	56	83	111	139	166	195	222	250
25°	9·62595	9·62865	9·63133	9·63398	9·63662	9·63924	9·64184	64°	27	53	80	106	133	159	186	212	239
26°	·64184	·64442	·64698	·64953	·65205	·65456	·65705	63°	25	51	76	102	127	152	178	203	229
27°	·65705	·65952	·66197	·66441	·66682	·66922	·67161	62°	24	49	73	97	122	146	170	194	219
28°	·67161	·67398	·67633	·67866	·68098	·68328	·68557	61°	23	47	70	93	117	140	163	186	210
29°	·68557	·68784	·69010	·69234	·69456	·69677	·69897	60°	22	45	67	89	112	134	156	179	201
30°	9·69897	9·70115	9·70332	9·70547	9·70761	9·70973	9·71184	59°	22	43	65	86	107	129	150	172	193
31°	·71184	·71393	·71602	·71809	·72014	·72218	·72421	58°	21	41	62	82	103	124	144	165	185
32°	·72421	·72622	·72823	·73022	·73219	·73416	·73611	57°	20	40	59	79	99	119	139	159	178
33°	·73611	·73805	·73997	·74189	·74379	·74568	·74756	56°	19	38	57	76	96	115	134	153	172
34°	·74756	·74943	·75128	·75313	·75496	·75678	·75859	55°	18	37	55	74	92	110	129	147	165
35°	9·75859	9·76039	9·76218	9·76395	9·76572	9·76747	9·76922	54°	18	35	53	71	89	106	124	142	159
36°	·76922	·77095	·77268	·77439	·77609	·77778	·77946	53°	17	34	51	68	86	103	120	137	154
37°	·77946	·78113	·78280	·78445	·78609	·78772	·78934	52°	17	33	50	66	83	99	116	132	149
38°	·78934	·79095	·79256	·79415	·79573	·79731	·79887	51°	16	32	48	64	80	95	112	127	143
39°	·79887	·80043	·80197	·80351	·80504	·80656	·80807	50°	15	31	46	62	77	93	108	123	138
40°	9·80807	9·80957	9·81106	9·81254	9·81402	9·81549	9·81694	49°	15	30	44	59	74	89	104	118	133
41°	·81694	·81839	·81983	·82126	·82269	·82410	·82551	48°	14	29	43	57	72	86	100	114	129
42°	·82551	·82691	·82830	·82968	·83106	·83242	·83378	47°	14	28	41	55	69	83	97	110	124
43°	·83378	·83513	·83648	·83781	·83914	·84046	·84177	46°	13	27	40	53	67	80	93	106	120
44°	·84177	·84308	·84437	·84566	·84694	·84822	·84949	45°	13	26	38	51	64	77	90	102	115
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COSINES

LOGARITHMIC SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	9·84949	9·85074	9·85200	9·85324	9·85448	9·85571	9·85693	44°	12	25	37	50	62	74	87	99	112
46°	·85693	·85815	·85936	·86056	·86176	·86294	·86413	43°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
47°	·86413	·86530	·86647	·86763	·86879	·86993	·87107	42°	12	23	35	46	58	70	81	93	104
48°	·87107	·87221	·87334	·87446	·87557	·87668	·87778	41°	11	22	34	45	56	67	78	89	100
49°	·87778	·87887	·87996	·88105	·88212	·88319	·88425	40°	11	22	32	43	54	65	76	86	97
50°	9·88425	9·88531	9·88636	9·88741	9·88844	9·88948	9·89050	39°	10	21	31	42	52	62	73	83	94
51°	·89050	·89152	·89254	·89354	·89455	·89554	·89653	38°	10	20	30	40	50	60	70	80	90
52°	·89653	·89752	·89849	·89947	·90043	·90139	·90235	37°	10	19	29	39	49	58	68	78	87
53°	·90235	·90330	·90424	·90518	·90611	·90704	·90796	36°	9	19	28	37	47	56	65	84	84
54°	·90796	·90887	·90978	·91069	·91158	·91241	·91336	35°.	9	18	27	36	45	54	63	72	81
55°	9·91336	9·91425	9·91512	9·91599	9·91686	9·91772	9·91857	34°	9	17	26	35	44	52	61	70	78
56°	·91857	·91942	·92027	·92111	·92194	·92277	·92359	33°	8	17	25	34	42	50	59	67	76
57°	·92359	·92441	·92522	·92603	·92683	·92763	·92842	32°	8	16	24	32	41	49	57	65	73
58°	·92842	·92921	·92999	·93077	·93154	·93230	·93307	31°	8	16	23	31	39	47	55	62	70
59°	·93307	·93382	·93457	·93532	·93606	·93680	·93753	30°	8	15	23	30	37	45	52	60	67
60°	9·93753	9·93826	9·93898	9·93970	9·94041	9·94112	9·94182	29°	7	14	22	29	36	43	50	57	64
61°	·94182	·94252	·94321	·94390	·94458	·94526	·94593	28°	7	14	21	27	34	41	48	55	62
62°	·94593	·94660	·94727	·94793	·94858	·94923	·94988	27°	7	13	20	26	33	40	46	53	59
63°	·94988	·95052	·95116	·95179	·95242	·95304	·95366	26°	6	13	19	25	32	38	44	50	57
64°	·95366	·95427	·95488	·95549	·95609	·95668	·95728	25°	6	12	18	24	30	36	42	48	54

65°	9·95728	9·95786	9·95844	9·95902	9·95960	9·96017	9·96073	24°	6	12	17	23	29	35	40	46	52
66°	·96073	·96129	·96185	·96240	·96294	·96349	·96403	23°	6	11	17	22	28	33	38	44	50
67°	·96403	·96456	·96509	·96562	·96614	·96665	·96717	22°	5	10	16	21	26	31	36	42	47
68°	·96717	·96767	·96818	·96868	·96917	·96966	·97015	21°	5	10	15	20	25	29	34	40	44
69°	·97015	·97063	·97111	·97159	·97206	·97252	·97299	20°	5	9	14	19	24	28	33	38	42
70°	9·97299	9·97344	9·97390	9·97435	9·97479	9·97523	9·97567	19°	4	9	13	18	22	27	31	36	40
71°	·97567	·97610	·97653	·97696	·97738	·97779	·97821	18°	4	9	13	17	21	26	30	34	38
72°	·97821	·97861	·97902	·97942	·97982	·98021	·98060	17°	4	8	12	16	20	24	28	32	36
73°	·98060	·98098	·98136	·98174	·98211	·98248	·98284	16°	4	8	11	15	19	22	26	30	34
74°	·98284	·98320	·98356	·98391	·98426	·98460	·98494	15°	4	7	11	14	18	21	25	28	32
75°	9·98494	9·98528	9·98561	9·98594	9·98627	9·98659	9·98690	14°	3	7	10	13	17	20	23	26	30
76°	·98690	·98722	·98753	·98783	·98813	·98843	·98872	13°	3	6	9	12	15	18	21	24	27
77°	·98872	·98901	·98930	·98958	·98986	·99013	·99040	12°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
78°	·99040	·99067	·99093	·99119	·99145	·99170	·99195	11°	3	5	8	10	13	16	18	21	23
79°	·99195	·99219	·99243	·99267	·99290	·99313	·99335	10°	2	5	7	9	12	14	16	19	21
80°	9·99335	9·99357	9·99379	9·99400	9·99421	9·99442	9·99462	9°	2	4	6	8	11	13	15	17	19
81°	·99462	·99482	·99501	·99520	·99539	·99557	·99575	8°	2	4	5	8	10	11	13	15	17
82°	·99575	·99593	·99610	·99627	·99643	·99659	·99675	7°	2	3	4	7	8	10	12	13	15
83°	·99675	·99690	·99705	·99720	·99734	·99748	·99761	6°	1	3	4	6	7	9	10	12	13
84°	·99761	·99775	·99787	·99800	·99812	·99823	·99834	5°	1	3	4	5	6	8	9	10	11
85°	9·99834	9·99845	9·99856	9·99866	9·99876	9·99885	9·99894	4°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
86°	·99894	·99903	·99911	·99919	·99926	·99934	·99940	3°	1	2	2	3	4	5	5	6	7
87°	·99940	·99947	·99953	·99959	·99964	·99969	·99974	2°	1	1	2	2	3	3	4	4	5
88°	·99974	·99978	·99982	·99985	·99988	·99991	·99993	1°	0	1	1	1	2	2	2	2	3
89°	·99993	·99995	·99997	·99998	·99999	10·00000	10·00000	0°									
90°	10·00000																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COSINES

LOGARITHMIC TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
0°	−∞	7·46373	7·76476	7·94086	8·06581	8·16273	8·24192	89°	Differences vary so rapidly here that tabulation is impossible. For small angles of a minutes log tan a' or log cot $(90° - a')$ $= \log a + \bar{4}\cdot46373$.								
1°	8·24192	8·30888	8·36689	8·41807	8·46385	8·50527	8·54308	88°									
2°	8·54308	8·57788	8·61009	8·64009	8·66816	8·69453	8·71940	87°									
3°	8·71940	8·74292	8·76525	8·78649	8·80674	8·82610	8·84464	86°									
4°	8·84464	8·86243	8·87953	8·89598	8·91185	8·92716	8·94195	85°									
5°	8·94195	8·95627	8·97013	8·98358	8·99662	9·00930	9·02162	84°									
6°	9·02162	9·03361	9·04528	9·05666	9·06775	9·07858	9·08914	83°									
7°	9·08914	9·09947	9·10956	9·11943	9·12909	9·13854	9·14780	82°	98	195	293	391	488	586	684	782	879
8°	9·14780	9·15688	9·16577	9·17450	9·18306	9·19146	9·19971	81°	87	173	260	346	433	519	606	692	779
9°	9·19971	9·20782	9·21578	9·22361	9·23130	9·23887	9·24632	80°	78	155	233	310	388	466	543	621	698
10°	9·24632	9·25365	9·26086	9·26797	9·27496	9·28186	9·28865	79°	71	141	212	282	354	420	494	564	635
11°	·28865	·29535	·30195	·30846	·31489	·32122	·32747	78°	65	129	194	259	323	388	453	518	582
12°	·32747	·33365	·33974	·34576	·35170	·35757	·36336	77°	60	120	179	239	299	359	419	478	538
13°	·36336	·36909	·37476	·38035	·38589	·39136	·39677	76°	56	111	167	222	278	334	389	445	500
14°	·39677	·40212	·40742	·41266	·41784	·42297	·42805	75°	52	104	156	208	261	313	365	417	469
15°	9·42805	9·43308	9·43806	9·44299	9·44787	9·45271	9·45750	74°	49	98	147	196	245	294	343	392	442
16°	·45750	·46224	·46694	·47160	·47622	·48080	·48534	73°	46	93	139	186	232	278	325	371	418
17°	·48534	·48984	·49430	·49872	·50311	·50746	·51178	72°	44	88	132	176	220	264	308	352	396
18°	·51178	·51606	·52031	·52452	·52870	·53285	·53697	71°	42	84	126	168	210	252	294	336	378
19°	·53697	·54106	·54512	·54915	·55315	·55712	·56107	70°	40	80	121	160	201	241	281	321	362

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
20°	9·56107	9·56498	9·56887	9·57274	9·57658	9·58039	9·58418	69°	39	77	116	154	193	231	270	308	347
21°	·58418	·58794	·59168	·59540	·59909	·60276	·60641	68°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
22°	·60641	·61004	·61364	·61722	·62079	·62433	·62785	67°	36	72	107	143	179	214	250	286	322
23°	·62785	·63135	·63484	·63830	·64175	·64517	·64858	66°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
24°	·64858	·65197	·65535	·65870	·66204	·66537	·66867	65°	34	67	101	134	168	201	235	268	302
25°	9·66867	9·67196	9·67524	9·67850	9·68174	9·68497	9·68818	64°	33	65	98	130	163	195	228	260	293
26°	·68818	·69138	·69457	·69774	·70089	·70404	·70717	63°	32	63	95	126	158	190	221	253	284
27°	·70717	·71028	·71339	·71648	·71955	·72262	·72567	62°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
28°	·72567	·72872	·73175	·73476	·73777	·74077	·74375	61°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
29°	·74375	·74673	·74969	·75264	·75558	·75852	·76144	60°	29	59	88	118	147	177	206	236	265
30°	9·76144	9·76435	9·76725	9·77015	9·77303	9·77591	9·77877	59°	29	58	87	116	144	173	202	231	260
31°	·77877	·78163	·78448	·78732	·79015	·79297	·79579	58°	28	57	85	113	142	170	198	227	255
32°	·79579	·79860	·80140	·80419	·80697	·80975	·81252	57°	28	56	84	112	139	167	195	223	251
33°	·81252	·81528	·81803	·82078	·82352	·82626	·82899	56°	28	55	83	110	137	165	192	220	247
34°	·82899	·83171	·83442	·83713	·83984	·84254	·84523	55°	27	54	81	108	136	162	190	217	244
35°	9·84523	9·84791	9·85059	9·85327	9·85594	9·85860	9·86126	54°	27	54	80	107	134	160	188	214	241
36°	·86126	·86392	·86656	·86921	·87185	·87448	·87711	53°	26	53	79	106	132	158	185	212	238
37°	·87711	·87974	·88236	·88498	·88759	·89020	·89281	52°	26	52	78	105	131	157	183	209	236
38°	·89281	·89541	·89801	·90061	·90320	·90578	·90837	51°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
39°	·90837	·91095	·91353	·91610	·91868	·92125	·92381	50°	26	52	77	103	129	155	180	206	232
40°	9·92381	9·92638	9·92894	9·93150	9·93406	9·93661	9·93916	49°	26	51	77	102	128	154	179	205	230
41°	·93916	·94171	·94426	·94681	·94935	·95190	·95444	48°	25	51	76	102	127	153	178	204	229
42°	·95444	·95698	·95952	·96205	·96459	·96712	·96966	47°	25	51	76	101	127	152	177	203	228
43°	·96966	·97219	·97472	·97725	·97978	·98231	·98484	46°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
44°	·98484	·98737	·98989	·99242	·99495	·99747	10·00000	45°	25	51	76	101	127	152	177	202	228

LOGARITHMIC COTANGENTS

LOGARITHMIC TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
45°	10·00000	10·00253	10·00505	10·00758	10·01011	10·01263	10·01516	44°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
46°	·01516	·01769	·02022	·02275	·02528	·02781	·03034	43°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
47°	·03034	·03288	·03541	·03795	·04048	·04302	·04556	42°	25	51	76	101	127	152	177	203	228
48°	·04556	·04810	·05065	·05319	·05574	·05829	·06084	41°	25	51	76	102	127	153	178	204	229
49°	·06084	·06339	·06594	·06850	·07106	·07362	·07619	40°	26	51	77	102	128	154	179	205	230
50°	10·07619	10·07875	10·08132	10·08390	10·08647	10·08905	10·09163	39°	26	52	77	103	129	155	180	206	232
51°	·09163	·09422	·09680	·09939	·10199	·10459	·10719	38°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
52°	·10719	·10980	·11241	·11502	·11764	·12026	·12289	37°	26	52	78	105	131	157	183	209	236
53°	·12289	·12552	·12815	·13079	·13344	·13608	·13874	36°	26	53	79	106	132	158	185	212	238
54°	·13874	·14140	·14406	·14673	·14941	·15209	·15477	35°	27	54	80	107	134	160	188	214	241
55°	10·15477	10·15746	10·16016	10·16287	10·16558	10·16829	10·17101	34°	27	54	81	108	136	162	190	217	244
56°	·17101	·17374	·17648	·17922	·18197	·18472	·18748	33°	28	55	83	110	137	165	192	220	247
57°	·18748	·19025	·19303	·19581	·19860	·20140	·20421	32°	28	56	84	112	139	167	195	223	251
58°	·20421	·20703	·20985	·21268	·21552	·21837	·22123	31°	28	57	85	113	142	170	198	227	255
59°	·22123	·22409	·22697	·22985	·23275	·23565	·23856	30°	29	58	87	116	144	173	202	231	260
60°	10·23856	10·24148	10·24442	10·24736	10·25031	10·25327	10·25625	29°	29	59	88	118	147	177	206	236	265
61°	·25625	·25923	·26223	·26524	·26825	·27128	·27433	28°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
62°	·27433	·27738	·28045	·28352	·28661	·28972	·29283	27°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
63°	·29283	·29596	·29911	·30226	·30543	·30862	·31182	26°	32	63	95	126	158	190	221	253	284
64°	·31182	·31503	·31826	·32150	·32476	·32804	·33133	25°	33	65	98	130	163	195	228	260	293

									1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
65°	10·33133	10·33463	10·33796	10·34130	10·34465	10·34803	10·35142	24°	34	67	101	134	168	201	235	268	302
66°	·35142	·35483	·35825	·36170	·36516	·36865	·37215	23°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
67°	·37215	·37567	·37921	·38278	·38636	·38996	·39359	22°	36	72	107	143	179	214	251	286	322
68°	·39359	·39724	·40091	·40460	·40832	·41206	·41582	21°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
69°	·41582	·41961	·42342	·42726	·43113	·43502	·43893	20°	39	77	116	154	193	231	270	308	347
70°	10·43893	10·44288	10·44685	10·45085	10·45488	10·45894	10·46303	19°	40	80	121	160	201	241	281	321	362
71°	·46303	·46715	·47130	·47548	·47969	·48394	·48822	18°	42	84	126	168	210	252	294	336	378
72°	·48822	·49254	·49689	·50128	·50570	·51016	·51466	17°	44	88	132	176	220	264	308	352	396
73°	·51466	·51920	·52378	·52840	·53306	·53776	·54250	16°	46	93	139	186	232	278	325	371	418
74°	·54250	·54729	·55213	·55701	·56194	·56692	·57195	15°	49	98	147	196	245	294	343	392	442
75°	10·57195	10·57703	10·58216	10·58734	10·59258	10·59788	10·60323	14°	52	104	156	208	261	313	365	417	469
76°	·60323	·60864	·61411	·61965	·62524	·63091	·63664	13°	56	111	167	222	278	334	389	445	500
77°	·63664	·64243	·64830	·65424	·66026	·66635	·67253	12°	60	120	179	239	299	359	419	478	538
78°	·67253	·67878	·68511	·69154	·69805	·70465	·71135	11°	65	129	194	259	323	388	453	518	582
79°	·71135	·71814	·72504	·73203	·73914	·74635	·75368	10°	71	141	212	282	354	420	494	564	635
80°	10·75368	10·76113	10·76870	10·77639	10·78422	10·79218	10·80029	9°	78	155	233	310	388	466	543	621	698
81°	·80029	·80854	·81694	·82550	·83423	·84312	·85220	8°	87	173	260	346	433	519	606	692	779
82°	·85220	·86146	·87091	·88057	·89044	·90053	·91086	7°	98	195	293	391	488	586	684	782	879
83°	·91086	·92142	·93225	·94334	·95472	·96639	·97838	6°									
84°	·97838	·99070	11·00338	11·01642	11·02987	11·04373	11·05805	5°									
85°	11·05805	11·07284	11·08815	11·10402	11·12047	11·13757	11·15536	4°									
86°	11·15536	11·17390	11·19326	11·21351	11·23475	11·25708	11·28060	3°									
87°	11·28060	11·30547	11·33184	11·35991	11·38991	11·42212	11·45692	2°									
88°	11·45692	11·49473	11·53615	11·58193	11·63311	11·69112	11·75808	1°									
89°	11·75808	11·88727	11·93419	12·05914	12·23524	12·53627	+∞	0°									
90°	+∞																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

Differences vary so rapidly here that tabulation is impossible.

LOGARITHMIC COTANGENTS

দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

Syllabi of Analytical Geometry of Two Dimensions

(West Bengal Council of Higher Secondary Education)

Rectangular cartesian co-ordinates ; Polar co-ordinates ; Transformation from one system to another. Analytical representation of reflexion, translation and rotation. Distance between two points. Division of a segment in a given ratio. Area of triangles. Concept of a locus. Equations of straight lines ; Angle between two lines—Conditions of perpendicularity and parallelism of two lines. Distance of a point from a given line. Position of a point with respect to a line. Equations of bisectors of angles between two lines. Equations of circles. Idea of conic sections—Focus—Directrix definition of a conic section. Eccentricity and axes of conic sections. Equations of Parabola, Ellipse, and Hyperbola referred to their principal axes.

Equations of tangents and normals to circles and the different conics (use of Calculus may be indicated).

সূচীপত্র

1. Distance between two points (x_1, y_1) and (x_2, y_2)

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

2. Point (x, y) dividing the join of (x_1, y_1) and (x_2, y_2) in the ratio $m : n$ is given by

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m}, \; y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m},$$

where m and n have the same sign for internal division and opposite signs for external division.

3. The slope of a line (not parallel to the y-axis) $m = \tan\theta$, or $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, where θ is the inclination of the line with positive x-axis and (x_1, y_1) and (x_2, y_2) are any two points of the line.

4. The angle α measured counterclockwise **from** a line L_1 of slope m_1 **to** a line L_2 of slope m_2 is given by

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

Two lines are parallel if $m_1 = m_2$ and perpendicular if $m_1 . m_2 = -1$.

5. Area of a triangle joining three vertices (x_1, y_1), (x_2, y_2) and (x_3, y_3) in order is

$$\tfrac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right].$$

6. Equations of a straight line are :

Point-slope form : $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Slope-intercept form : $y = mx + c$.

Intercept form : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Normal form : $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$.

Parametric form : $\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r$.

General Equation : $ax + by + c = 0 \; (b \neq 0)$

Slope $= -a/b$; y-intercept $= -c/b$;

$c > 0$; normal form $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{-ax}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{by}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

$c < 0$; normal form $\frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{by}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

7. The distance of (x_1, y_1) from the line $ax + by + c = 0$ is given by

(i) $c > 0$: $\pm \dfrac{c + ax_1 + by_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ acc. as (x_1, y_1) is on the origin side or non-origin side of the line.

(ii) $c < 0$: $\mp \dfrac{c + ax_1 + by_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ acc. as (x_1, y_1) is on the origin side or non-origin side of the line.

8. The Equations of bisectors of the angles between two lines $ax + by + c = 0$ and $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ are

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}.$$

Acc. as c, c_1 have like or unlike signs, the positive or negative sign gives the bisector of that angle between the two lines which contains the origin.

9. (i) $ax + by + c + k\,(a_1x + b_1y + c_1) = 0$ (k = any arbitrary constant) is the equation of any line passing through the two lines $ax + by + c = 0$, and $a_1x + b_1y + c_1 = 0$.

(ii) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ are concurrent if three constants k, l, m (not zero) exist such that

$$k\,(a_1x + b_1y + c_1) + l\,(a_2x + b_2y + c_2) + m\,(a_3x + b_3y + c_3)$$
$= 0$ holds identically.

10. The equation of a circle whose centre is (α, β) and radius r is $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$.

General equation : $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

Centre $(-g, -f)$; radius $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$.

If $c = 0$, the circle passes through the origin ;

If $f = 0$, the circle has its centre on the x-axis ;

If $g = 0$, the circle has its centre on the y-axis.

The equation of a circle on the join of (x_1, y_1) and (x_2, y_2) as diameter is

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0.$$

11. Conic sections

Focus (x_1, y_1) ; Directrix $ax + by + c = 0$; Eccentricity $= e$.

Equation is : $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = e^2 \dfrac{(ax + by + c)^2}{a^2 + b^2}$.

Standard forms (Explanations of symbols in the book)

Parabola : $y^2 = \pm 4ax$; $(y - k)^2 = \pm 4a(x - h)$.

$(a>0)$ $x^2 = \pm 4ay$; $(x - h)^2 = \pm 4a(y - k)$.

Ellipse : $a^2 > b^2$; $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

$a^2 < b^2$; $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$; $\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$.

where, $b^2 = a^2(1 - e^2)$.

Hyperbola : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (Centre origin ; focii on x-axis).

$\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ (Centre origin ; focii on y-axis).

where, $b^2 = a^2(e^2 - 1)$.

12. Tangents

$yy_1 = 2a(x + x_1)$ for $y^2 = 4ax$ at (x_1, y_1)

$\dfrac{xx_1}{a^2} \pm \dfrac{yy_1}{b^2} = 1$ for $\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2}$ at (x_1, y_1)

Normals : $y - y_1 = -\dfrac{y_1}{2a}(x - x_1)$ for $y^2 = 4ax$ at (x_1, y_1)

$y = mx - 2am - am^3$ at $(am^2, -2am)$

$\dfrac{a^2x}{x_1} \mp \dfrac{b^2y}{y_1} = a^2 \mp b^2$ for $\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ at (x_1, y_1).

13. Parametric forms

Parabola $y^2 = 4ax$; $x = at^2$ and $y = 2at$

Ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$; $x = a \cos\theta$ and $y = b \sin\theta$.

Hyperbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$; $x = a \sec\theta$ and $y = b \tan\theta$.

0

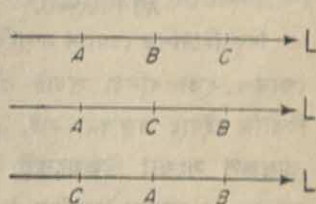
দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ ঃ অভিক্ষেপ
(DIRECTED LINE SEGMENTS : PROJECTIONS)

0·1. সূচনা

গ্রীক্‌দিগের জ্যামিতি এবং হিন্দু ও আরবদিগের বীজগণিত বিষয়ক জ্ঞানে সমৃদ্ধ হইয়া প্রসিদ্ধ ফরাসী দার্শনিক ও গণিতবিদ্ Rene' Descartes (1596-1650) জ্যামিতি অধ্যয়নে বীজগাণিতীয় পদ্ধতির প্রয়োগকৌশলের প্রবর্তন করেন। এইজন্য তিনিই হইলেন Analytic Geometry বা **বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতির** প্রবর্তক—তাঁহার নামের ল্যাটিন রূপ, যথা : **Cartesius,** হইতে প্রাপ্ত **Cartesian** Geometry বা **কার্তেজিয় (কার্টেজীয়) জ্যামিতি** নামেও ইহা অভিহিত হয়। জ্যামিতিতে যেমন **ধনাত্মক,** সেইরূপ **ঋণাত্মক** সংখ্যার প্রয়োগ কিভাবে করা যায়, তাহাই এই অধ্যায়ে প্রথমে প্রদর্শন করা হইবে।

0·2. দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ (Directed Line-segments)

ধরা যাক্ L একটি অনির্দিষ্ট সরলরেখা। ইহার উপর A ও B দুইটি বিন্দু চিহ্নিত করা হইল। তাহা হইলে L রেখার A ও B দ্বারা সীমাবদ্ধ অংশকে **রেখাংশ** AB বলা হয়। রেখাংশ AB কে A **হইতে** B **অভিমুখে** নির্দেশিত বলিয়া বিবেচনা করা হইবে। ইহাকে A হইতে B তে গমনের কার্যের সহিত তুলনা করা যাইতে পারে। লক্ষ্য করিতে হইবে যে রেখাংশ BA হইল B **হইতে** A **অভিমুখে** নির্দেশিত। A হইতে B অভিমুখে নির্দেশিত রেখাংশ AB কে নির্দেশ করা হয় প্রতীক $\overline{AB}$ দ্বারা ; আর $\overline{BA}$ হইল B হইতে A অভিমুখে নির্দেশিত রেখাংশ। চিত্র 0.1 হইতে দেখা যায় যে নির্দেশিত রেখাংশ তিনটি, যথা : $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ এবং $\overline{CA}$ এর মধ্যে সম্পর্কটি (চিত্রে প্রদর্শিত তিনটি ক্ষেত্রেই) হইল



চিত্র 0.1. দিক-নির্দেশিত রেখাংশ

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC} \qquad \cdots \quad (1)$$

প্রকৃতপক্ষে, যে বিন্দুতে পৌছাইতে হইবে সেই বিন্দু সম্পর্কে বিবেচনা করিলে বলা যায় যে A হইতে B তে গমন ও পরে B হইতে C গমন, আর A হইতে C তে গমন হইল

তুল্য কার্য। কোন রেখার উপর অবস্থিত তিনের অধিক বিন্দু সম্পর্কেও অনুরূপ ফল পাওয়া যায়, যথা : L রেখার উপর A, B, C, D যদি চারিটি বিন্দু হয়, তবে

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{AD}. \quad \cdots \quad (2)$$

সংজ্ঞা। **একই রেখা বা দুইটি সমান্তরাল রেখার** উপর অবস্থিত দুইটি দিক্-নির্দেশিত রেখাংশকে **সমান** বলা হয়, যদি তাহাদের দৈর্ঘ্য সমান হয় এবং দিক্ বা অভিমুখ (direction or sense) একই হয়।

দিক্-নির্দেশিত রেখাংশের বীজগাণিতীয় চিত্র বা রূপ (Algebraic Representation of Directed Line-segments)

প্রদত্ত কোন রেখা L এর উপর দুইটি বিপরীত দিকের একটিকে L এর **ধনাত্মক অভিমুখ** এবং অপরটিকে উহার **ঋণাত্মক অভিমুখ** রূপে মনোনীত করা হইল।

L এর উপর যে কোন দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ AB কে তাহা হইলে **ধনাত্মক** বলা হইবে, যদি ইহার অভিমুখ ও L এর ধনাত্মক অভিমুখ একই হয় এবং উহাকে **ঋণাত্মক** বলা হইবে, যদি উহার অভিমুখ ও L এর ঋণাত্মক অভিমুখ একই হয়।

এইরূপ একটি দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ $\overline{AB}$ এর উপর একটি **সংখ্যা** (number) আরোপ করা যায়। যদি সাধারণ রেখাংশ AB এর দৈর্ঘ্য l হয়, তবে লেখা যায় যে

$\overline{AB}=l$, যদি $\overline{AB}$ ধনাত্মক রেখাংশ হয় ;

$=-l$, যদি $\overline{AB}$ ঋণাত্মক রেখাংশ হয়।

যদি $\overline{AB}=l$ হয়, তবে $\overline{BA}=-l$ এবং বিপরীতক্রমেও ইহা সত্য। আবার

$$\overline{AB}+\overline{BA}=0. \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ সম্পর্কিত সমীকরণ (1), (2), (3) কে অনুরূপ সংখ্যাগুলির ক্ষেত্রেও সত্য বলিয়া যাচাই করিয়া দেখা যাইতে পারে। ফলত কোনরূপ ভুল বা বিভ্রান্তি হইবার সম্ভাবনা নাই, যদি **দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ এবং উহার অনুরূপ সংখ্যা উভয়কেই** একই অঙ্কপাতন $\overline{AB}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। কিন্তু যদি $\overline{AB}$ এর **কেবল দৈর্ঘ্যের** উল্লেখের প্রয়োজন হয়, তবে $|\overline{AB}|$ বা কেবল AB লিখিলেই হইবে। এখন হইতে যখনই কোন রেখাংশের অভিমুখ এবং উহার অনুরূপ সংখ্যা উভয়কেই উল্লেখ করিবার প্রয়োজন হইবে তখনই $\overline{AB}$ এই অঙ্কপাতন ব্যবহৃত হইবে।

0·3. দিক্-নির্দেশিত রেখাংশের অভিক্ষেপ (Projection of a Directed Line-segment)

1. L রেখার উপর P **বিন্দুর অভিক্ষেপ** বলিতে বুঝায়, L রেখার উপর P হইতে অঙ্কিত লম্বের **পাদবিন্দু** M ; যদি P, L এর উপরেই অবস্থিত হয়, তবে L এর উপর P এর অভিক্ষেপ P নিজেই।

2. ধরা যাক্, $\overline{PQ}$ একটি দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ এবং L যে কোন একটি রেখা (চিত্র 0.2)। যদি

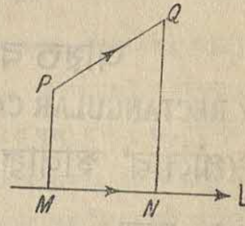
L এর উপর P এর অভিক্ষেপ = M হয়,

L এর উপর Q এর অভিক্ষেপ = N হয়,

তবে, L এর উপর $\overline{PQ}$ এর অভিক্ষেপ = $\overline{MN}$

যদি $\overline{MN}$ এর অনুরূপ সংখ্যাটি l হয়, তবে

L এর উপর $\overline{PQ}$ এর অভিক্ষেপ = l.



চিত্র 0.2. $\overline{PQ}$ এর অভিক্ষেপ

যেহেতু $\overline{MN} = -\overline{NM}$, সুতরাং

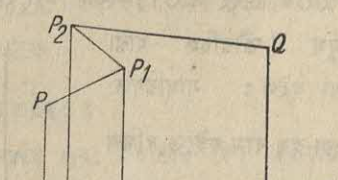
L এর উপর $\overline{PQ}$ এর অভিক্ষেপ = −(L এর উপর $\overline{QP}$ এর অভিক্ষেপ)

যদি L এর লম্বরেখার উপর P, Q অবস্থিত হয়, তবে M, N বিন্দুদ্বয় মিলিত হয় এবং L এর উপর $\overline{PQ}$ এর অভিক্ষেপ $\overline{MN}$ তখন শূন্য।

সিদ্ধান্ত : দিক্-নির্দেশিত রেখাংশের অভিক্ষেপও দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ, সুতরাং উহাকে একটি সংখ্যার দ্বারা প্রকাশ করা যায় এবং ঐ সংখ্যাটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে যদি অভিক্ষেপ রেখাংশ যথাক্রমে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হয়।

3. ভগ্ন রেখা (broken line)-র অভিক্ষেপ

ধরা যাক্ PP_1P_2Q একটি ভগ্ন রেখা (চিত্র 0.3); L এর উপর ইহার অভিক্ষেপ বলিতে বুঝায়, $\overline{PP_1}$, $\overline{P_1P_2}$ এবং $\overline{P_2Q}$ এর L এর উপর অভিক্ষেপগুলির যোগফল ; অর্থাৎ



চিত্র 0.3. ভগ্ন-রেখার অভিক্ষেপ

L এর উপর PP_1P_2Q এর অভিক্ষেপ

$$= \overline{MM_1} + \overline{M_1M_2} + \overline{M_2N} = \overline{MN}$$

= L এর উপর PQ এর অভিক্ষেপ।

1

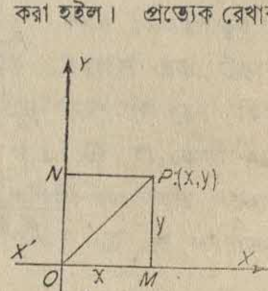
আয়ত কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক
(RECTANGULAR CARTESIAN CO-ORDINATES):
'পোলার' স্থানাঙ্ক (POLAR CO-ORDINATES)

1·1. সূচনা

এই অধ্যায়ে আসল প্রশ্নটি হইল, প্রদত্ত কোন সমতলে কোন বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করা। বিন্দুটি কোন সমতলে অবস্থিত হইলে **উপযুক্ত চিহ্নযুক্ত** দুইটি সংখ্যা উহার অবস্থান নির্ণয়ের পক্ষে যথেষ্ট। ধরা যাক্, কোন নগর X, অপর একটি নগর Y এর 10 কি. মি. পূর্বে এবং 8 কি. মি. দক্ষিণে অবস্থিত। এক্ষেত্রে বলা হয়, দুইটি সংখ্যা (10, 8) Y এর সম্পর্কে X এর অবস্থান নির্দেশ করিতেছে—সংখ্যা 10 এবং 8 কে দুইটি নির্দিষ্ট অভিমুখ বরাবর, যথা: Y এর যথাক্রমে পূর্ব ও দক্ষিণ দিক্ বরাবর, পরিমাপ করিতে হইবে। যখন এইভাবে একটি **নিয়ন্ত্রিত (directed)** বা দিক্-নির্দেশিত **সংখ্যা-যুগল** কোন বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করে, তখন তাহাদিগকে বিন্দুটির **স্থানাঙ্ক (co-ordinates)** বলা হয়।

1·2. আয়ত কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক (Rectangular Cartesian Co-ordinates)

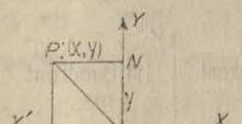
প্রদত্ত কোন সমতলে যে কোন বিন্দু O লওয়া হইল (চিত্র 1.1)। O বিন্দু দিয়া পরস্পর লম্ব দুইটি সরলরেখা $\overleftrightarrow{X'OX}$ এবং $\overleftrightarrow{Y'OY}$ অঙ্কন করা হইল। প্রত্যেক রেখার উপর **ধনাত্মক অভিমুখ** (তীরচিহ্ন দ্বারা নির্দেশিত) মনোনীত করা হইল : সাধারণত $\overleftrightarrow{X'OX}$ এর ধনাত্মক দিক ধরা হয় বাম হইতে দক্ষিণ অভিমুখে এবং $\overleftrightarrow{Y'OY}$ এর ধনাত্মক দিক নিচ হইতে উপরের অভিমুখে। অঙ্কপাতন '↔' নির্দেশ করে যে রেখাটিকে উভয় দিকে সীমাহীনভাবে বর্ধিত করা যায়।



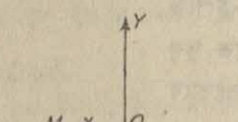
চিত্র 1.1

মনে করা হইল, সমতলটিতে P যে কোন বিন্দু। দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ $\overline{OP}$র সম্পর্কে বিবেচনা করা যাক্। ধরা যাক্, দিক্-নির্দেশিত রেখাদ্বয় $\overleftrightarrow{X'OX}$ এবং $\overleftrightarrow{Y'OY}$ এর উপর $\overline{OP}$ এর অভিক্ষেপ যথাক্রমে $\overline{OM}$ এবং $\overline{ON}$। মনে করা যাক্, ইহাদের

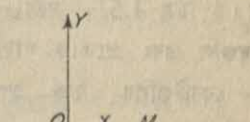
অনুরূপ সংখ্যা দুইটি যথাক্রমে x এবং y. তাহা হইলে সংখ্যা-যুগল (x, y) হইবে P এর **স্থানাঙ্ক** (স্থানাঙ্কদ্বয় আয়ত (rectangular), কারণ প্রাসঙ্গিক রেখাদ্বয় (reference lines) $\overleftrightarrow{X'OX}$ ও $\overleftrightarrow{Y'OY}$ কে পরস্পর লম্বভাবে লওয়া হইয়াছে)। স্থানাঙ্কদ্বয়কে প্রথম বন্ধনীর মধ্যে লেখা হয়—প্রথম অঙ্ক x কে বলা হয় P বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক [বা ভুজ (abscissa)] এবং দ্বিতীয় অঙ্ক y কে বলা হয় y-স্থানাঙ্ক [বা কোটি (ordinate)]। স্থানাঙ্কদ্বয়ের প্রবর্তক Rene' Descartes এর নামানুসারে ইহাদের কার্টেজীয় (Cartesian) বলা হয়। ছাত্রছাত্রীদের এই বিষয়ে দৃষ্টি আকর্ষণ করা যাইতেছে যে অঙ্ক-যুগল (x, y) এর হয় x অথবা y অথবা উভয়েই ঋণাত্মক হইতে পারে : চিত্র 1.2, 1.3, 1.4 দ্রষ্টব্য।



চিত্র 1.2. x −ve ; y +ve



চিত্র 1.3. x −ve, y −ve



চিত্র 1.4. x +ve, y −ve

O কে **মূলবিন্দু (origin)**, $\overleftrightarrow{X'OX}$ রেখাকে x-অক্ষ (x-axis) এবং $\overleftrightarrow{Y'OY}$ রেখাকে y-অক্ষ (y-axis) বলা হয়। অক্ষ দুইটিকে **স্থানাঙ্ক অক্ষ (Co-ordinate axes)** বলা হইয়া থাকে।

স্মরণ রাখিতে হইবে :

1. স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয় এবং উহাদের দিক্ একবার মনোনয়নের সঙ্গে সঙ্গে ঐ সমতলস্থ **প্রত্যেক বিন্দুর** (x, y) আকারের স্থানাঙ্ক নির্দিষ্ট হইয়া যায়।

2. **বিপরীতক্রমে**, যে কোন সংখ্যা-যুগল (x, y) এর জন্য একটি অনুরূপ বিন্দু P পাওয়া যাইবে, যাহার স্থানাঙ্ক হইবে (x, y)। x-অক্ষের উপর $\overline{OM} = x$ লইয়া এবং x-অক্ষের উপর M বিন্দুতে লম্ব অঙ্কন করিয়া উহার উপর $\overline{MP} = y$ লইলেই P বিন্দুটির অবস্থান নির্ণীত হইবে।

3. O এর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$; x-অক্ষের উপর যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv (x, 0)$; y-অক্ষের উপর যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv (0, y)$।

স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়

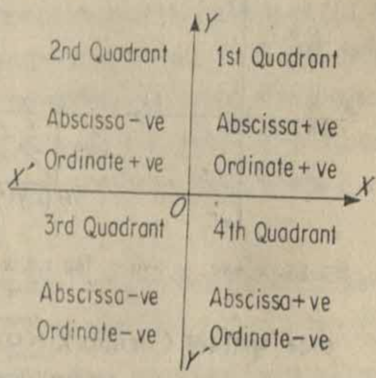
দেখা গেল যে x-অক্ষের উপর অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর কোটি 0 (শূন্য) এবং সমতলে এইগুলিই একমাত্র বিন্দু যাহাদের কোটি শূন্য। এই তথ্যটিকে নিম্ন প্রকার উক্তির দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যথা :

x-অক্ষকে $y=0$ এই সমীকরণ দ্বারা পাওয়া যায়
এবং অনুরূপ যুক্তিতে, y-অক্ষকে $x=0$ এই সমীকরণ দ্বারা পাওয়া যায়

ইহাও বলা যায় যে সমীকরণ $xy=0$ অক্ষদ্বয়কে নির্দেশ করে।

পাদসমূহ (Quadrants)

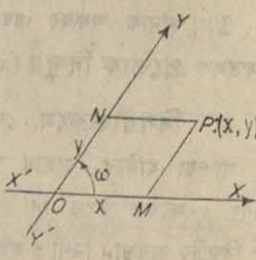
স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয় সমতলটিকে চারিটি অঞ্চলে বিভক্ত করে—ইহাদের **পাদ** বলা হয়। চিত্র 1.5 দ্রষ্টব্য—উহাতে পাদগুলি এবং প্রত্যেক পাদতে ভুজ ও কোটিগুলির চিহ্ন সুস্পষ্টভাবে প্রদর্শিত হইয়াছে।



চিত্র 1.5. পাদসমূহ

মন্তব্য : উপরে বর্ণিত স্থানাঙ্ক-পদ্ধতি **আয়ত কার্টেজীয়** স্থানাঙ্ক পদ্ধতি বলিয়া পরিচিত। কখনও কখনও অক্ষদ্বয়কে আয়তাকারে লওয়া হয় না। সেক্ষেত্রে স্থানাঙ্ক পদ্ধতি হইল **তির্যক (oblique)**। দুইটি রেখা (পরস্পর লম্ব না হইতে পারে) $\overleftrightarrow{X'OX}$ এবং $\overleftrightarrow{Y'OY}$ মনোনীত করা হয় এবং প্রত্যেক রেখার উপর ধনাত্মক দিক স্বীকার করিয়া লওয়া হয়।

ধরা যাক $\angle XOY=\omega$; সমতলে যে কোন বিন্দু P লওয়া হইল। অক্ষদ্বয়ের সহিত সমান্তরাল করিয়া PM এবং PN অঙ্কিত হইল [চিত্র 1.6 দ্রষ্টব্য]। দিক-নির্দেশিত রেখাংশ $\overline{OM}=x$ এবং $\overline{ON}=y$ হইল P এর তির্যক স্থানাঙ্ক। অক্ষদ্বয় এখন **তির্যক অক্ষ** বলিয়া অভিহিত হইবে।



চিত্র 1.6. তির্যক অক্ষদ্বয়

"তির্যক অক্ষ" বর্তমান পাঠ্যক্রমের অন্তর্ভুক্ত নহে। কৌতূহলী ছাত্রছাত্রীদের জন্য কেবল মৌলিক সংজ্ঞাটি প্রদত্ত হইল। পুস্তকের

অবশিষ্ট অংশে অক্ষদ্বয়কে আয়ত বলিয়াই ধরিয়া লওয়া হইবে (যদি না কোন ক্ষেত্রে তির্যক অক্ষের পক্ষে বিশেষ কৌতূহলজনক কোন ফলের কথা স্পষ্টত উল্লিখিত হয়)।

অনুশীলনী

বর্গাঙ্কিত ছককাগজ লইয়া উহাতে আয়ত অক্ষদ্বয় স্থাপন করিয়া।

1. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি সংস্থাপিত কর (1 সে. মি. কে একক লইয়া) :

$(0, 1)$; $(1, 0)$; $(2, 2)$; $(2, -2)$; $(-2, -2)$;
$(-2, 2)$; $(0, -2\cdot5)$; $(-1, 1)$; $(-4, 3\cdot2)$; $(3\cdot24, -\cdot87)$

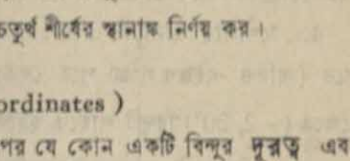
2. $(3, 2)$, $(-2, 2)$; $(-2, -1)$, $(3, -1)$—এই বিন্দুগুলি সংস্থাপিত কর এবং যাচাই করিয়া দেখাও যে উহারা একটি আয়তক্ষেত্র গঠন করে। উহার বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

3. দেখাও যে $(1, 2)$, $(-3, 2)$, $(-3, -2)$ বিন্দুত্রয়কে শীর্ষ করিয়া একটি বর্গ গঠন সম্ভব এবং ছককাগজের সাহায্যে উহার চতুর্থ শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

*1·3 'পোলার' স্থানাঙ্ক (Polar Co-ordinates)

কোন সমতলে একটি প্রদত্ত বিন্দু হইতে অপর যে কোন একটি বিন্দুর **দূরত্ব** এবং উহার **অভিমুখ** উল্লেখ দ্বারা দ্বিতীয় বিন্দুটির অবস্থান সম্পূর্ণরূপে নির্দেশ করা সম্ভব। এই ধারণাই হইল **'পোলার' স্থানাঙ্ক পদ্ধতির** ভিত্তি।

ধরা যাক্ O হইল সমতলস্থ প্রদত্ত বিন্দু। একটি অর্ধ-রশ্মি $\overrightarrow{OA}$ (ইহার অর্থ, রেখাটিকে কেবল তীর চিহ্নের দিকে বর্ধিত করা যায়) বিবেচনা করা যাক্—স্থির করা হইল যে এই রেখা হইতে কোণগুলির পরিমাপ লওয়া হইবে। ধরা হইল, P সমতলটিতে যে কোন একটি বিন্দু। O হইতে **ইহার দূরত্ব** $|\overline{OP}|$ কে r দ্বারা, এবং কোণ $\widehat{AOP}$ কে θ দ্বারা নির্দেশ করা হইল; $\overrightarrow{OA}$ হইতে $\overrightarrow{OP}$ পর্যন্ত ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত অভিমুখে θ কোণের পরিমাপ লওয়া হইয়াছে। তাহা হইলে (r, θ) হইল



চিত্র 1.7. P এর 'পোলার' স্থানাঙ্ক

* ত্রিকোণমিতিতে মোটামুটি জ্ঞানলাভের পরই ছাত্রছাত্রীদের অনুচ্ছেদ 1·3 এবং 1·4 অধ্যয়ন করিবার পরামর্শ দেওয়া যাইতেছে। অনুচ্ছেদ 1·2এর পর দ্বিতীয় অধ্যায় পাঠ তরুণ শিক্ষার্থীদের নিকট কঠিন হইবে না।

P এর পোলার স্থানাঙ্ক। O কে বলা হয় পোল (Pole) বা মূলবিন্দু ; $\overrightarrow{OA}$ কে বলা হয় **প্রারম্ভিক অর্ধ-রশ্মি** (**Initial half-ray**) ; এবং r কে রেডিয়াস-ভেক্টর (Radius vector) ও θ কে ভেক্টরিয়াল কোণ (Vectorial angle) বলা হয়।

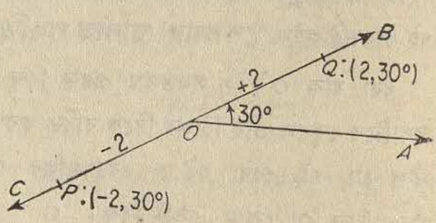
স্মরণ রাখিতে হইবে :

1. r এবং θ প্রদত্ত হইলে **একটি এবং কেবলমাত্র একটি বিন্দুই** নির্ণীত হইবে।

2. অপর পক্ষে, কোন বিন্দু P প্রদত্ত হইলে r ($= |\overline{OP}|$) সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা যায়, কিন্তু θর মান, পরস্পর 360° (বা 2π) এর গুণিতকের পার্থক্যসম্পন্ন অসীম সংখ্যক মানের সেটের যে কোন একটি হইতে পারে, যথা : $\{\theta, \theta+2\pi, \theta+4\pi, \theta+6\pi, \cdots \cdots\}$.

3. মূল বিন্দু O এর ক্ষেত্রে $r=0$, কিন্তু θ কে অনন্যভাবে (uniquely) নির্ণয় করা যায় না। তবে O এর পোলার স্থানাঙ্ক $=(0, 0^\circ)$ ধরা যায়।

4. 'পোলার' স্থানাঙ্কের এইরূপ সংজ্ঞা দেওয়া সম্ভব, যাহাতে r **ঋণাত্মক** হইতে পারে (যদিও এইরূপ সংজ্ঞা পূর্বে দেওয়া হইয়াছে যাহাতে r সর্বদা **ধনাত্মক** হয়)। এক্ষেত্রে $(-2, 30^\circ)$ বিন্দুটি পাইতে হইলে $\overrightarrow{OA}$ এর সহিত 30° কোণ করিয়া অর্ধ-রশ্মি $\overrightarrow{OB}$ অঙ্কন করিতে হইবে ; পরে ইহার বিপরীত অর্ধ-রশ্মি $\overrightarrow{OC}$ এর উপর রেখাংশ $\overline{OP}$ স্থাপন করিতে হইবে, যেখানে $|\overline{OP}| = 2$ একক। তাহা হইলে P এর স্থানাঙ্ক হইবে $(-2, 30^\circ)$।



চিত্র 1.8. $P(r, -ve)$ এর 'পোলার' স্থানাঙ্ক

'পোলার' স্থানাঙ্কের এই পদ্ধতি (r কে ঋণাত্মক লইয়া) সাধারণভাবে স্বীকৃত হয় না। সুতরাং মূল সংজ্ঞাতেই অবিচল থাকা হইবে এবং r এর ঋণাত্মক মান পরিহার করিয়া চলা হইবে, যদি না কোথাও ইহার বিপরীত সুস্পষ্ট কোন বিবৃতি প্রদত্ত হয়।

অনুশীলনী

1. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি সংস্থাপিত কর :

$(1, 0^\circ)$, $(5, -30^\circ)$, $(3, 180^\circ)$, $(0, 45^\circ)$,
$(2, 200^\circ)$, $(4, \frac{1}{2}\pi)$, $(5, 30^\circ)$, $(2, -90^\circ)$
$(6, \frac{8}{3}\pi)$.

2. যে বর্গের কেন্দ্র O তে অবস্থিত, একটি বাহু প্রারম্ভিক অর্ধ-রশ্মির উপর লম্ব এবং উহার দৈর্ঘ্য $2a$, তাহার শীর্ষগুলির স্থানাঙ্ক কি হইবে ?

[উঃ $(\pm\sqrt{2}a, \pi/4), (\pm\sqrt{2}a, 3\pi/4)$]

3. সেই সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষগুলির স্থানাঙ্ক কি হইবে, যাহার কেন্দ্রে 'পোল' এবং একটি শীর্ষ OA এর উপর অবস্থিত ? [উঃ $(a/\sqrt{3}, 0), (a/\sqrt{3}, 2\pi/3), (a/\sqrt{3}, 4\pi/3)$]

4. যাচাই করিয়া দেখ যে বিভিন্ন 'পোলার' স্থানাঙ্ক-যুগল, যেমন (r, θ), $(-r, \theta+\pi)$, $(r, \theta+2\pi)$ হইতে একই বিন্দু পাওয়া যাইতে পারে।

*1·4. কার্টেজীয় এবং পোলার স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্বন্ধ

["কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক" শব্দটি সর্বদা "আয়ত কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক" কে বুঝাইবে, যদি না অন্যরূপ বলা থাকে।]

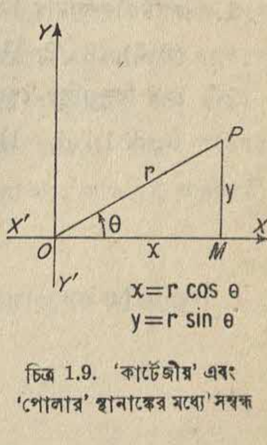
ধরা যাক, আয়ত অক্ষদ্বয় $\overleftrightarrow{X'OX}$ এবং $\overleftrightarrow{Y'OY}$ সম্পর্কে P হইল (x, y) বিন্দু। মনে করা হইল 'পোল' O এবং প্রারম্ভিক অর্ধ-রশ্মি $\overrightarrow{OX}$ সম্পর্কে P এর 'পোলার' স্থানাঙ্ক হইল (r, θ)। ধরা যাক, x-অক্ষের উপর $\overline{OP}$ এর অভিক্ষেপ $\overline{OM}$; সংজ্ঞা অনুসারে,

$\overline{OM}=x$, $\overline{MP}=y$, $|\overline{OP}|=r$, $\angle MOP=\theta$.

সমকোণী ত্রিভুজ OMP হইতে,

$$\cos\theta=\frac{x}{r}, \quad \sin\theta=\frac{y}{r}$$

অর্থাৎ $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ... **(1)**



চিত্র 1.9. 'কার্টেজীয়' এবং 'পোলার' স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্বন্ধ

এই সূত্র দুইটির সাহায্যে **'কার্টেজীয় স্থানাঙ্ককে 'পোলার' স্থানাঙ্কে** রূপান্তরিত করা যায়।

আরও পাওয়া যায় যে : (i) $r^2=x^2+y^2$ এবং $r=+\sqrt{x^2+y^2}$
(ii) θকে এইরূপে নির্ণয় করা হয় যেন $x=r\cos\theta$ ও $y=r\sin\theta$ এই উভয় সম্পর্ক সিদ্ধ হয়। ... **(2)**

টীকা। $\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ সম্পর্কটি দ্ব্যর্থক, সুতরাং পরিহার করা উচিত। **(2)** এ বিবৃত তথ্যের সাহায্যে **'পোলার' স্থানাঙ্ককে 'কার্টেজীয়' স্থানাঙ্কে** রূপান্তরিত করা যায়।

উদা. 1. যে বিন্দুর কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক $(-\sqrt{3}, 1)$ তাহার পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে $-\sqrt{3}=r\cos\theta$, $1=r\sin\theta$; সুতরাং $r=+\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(1)^2}=2$

θ এমন কোণ যেন $\cos\theta=-\sqrt{3}/2$ এবং $\sin\theta=1/2$.

$\therefore$ θ অবশ্যই **দ্বিতীয় পাদতে** আছে, সুতরাং $\theta=150^\circ$ বা $5\pi/6$.

$\therefore$ নির্ণেয় পোলার স্থানাঙ্ক $(2, 5\pi/6)$.

উদা. 2. যে বিন্দুর 'পোলার' স্থানাঙ্ক $(\sqrt{2}, 5\pi/4)$, তাহার কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে $x=\sqrt{2}\cos 5\pi/4=-1$, $y=\sqrt{2}\sin 5\pi/4=-1$

$\therefore$ নির্ণেয় কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক $(-1, -1)$.

অনুশীলনী

1. কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যখন বিন্দুগুলির 'পোলার' স্থানাঙ্ক হইল : $(2, \frac{\pi}{3})$, $(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$, $(3, \frac{3\pi}{2})$, $(1, \frac{11\pi}{6})$.
2. সেই বিন্দুগুলির 'পোলার' স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যাহাদের কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক হইল : $(\sqrt{3}, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -\sqrt{3})$, $(0, 1)$.

[উত্তর : 1. $(1, \sqrt{3})$, $(-2, 2)$, $(0, -3)$, $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$.
2. $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$, $\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$, $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$].

2

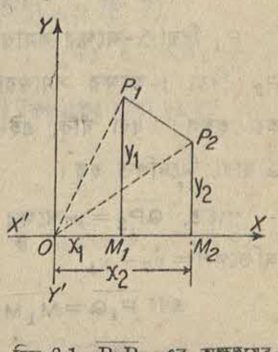
দুইটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব (DISTANCE BETWEEN TWO POINTS) : বিভক্তিকরণের অনুপাত ঃ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (SECTION RATIO : AREA OF TRIANGLES)

2·1. সূচনা

পূর্ববর্তী অধ্যায় দুইটিতে আলোচিত স্থানাঙ্কের ধারণাগুলির সহজ প্রয়োগই বর্তমান অধ্যায়ের বিষয়বস্তু। কোন বিন্দুর কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয়ের জন্য দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ $\overline{OP}$ (চিত্র 1.1) এর স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের উপর অভিক্ষেপ বিবেচনা করা হইয়াছিল। পরবর্তী প্রশ্নটি হইল, যে কোন দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ $\overline{P_1P_2}$ (চিত্র 2.1) এর অক্ষদ্বয়ের উপর অভিক্ষেপ বিবেচনা করা। ইহা হইতে দুইটি বিন্দুর অন্তর্বর্তী দূরত্ব নির্ণয় এবং যে বিন্দু একটি রেখাংশকে কোনও নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত করে তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় সম্পর্কে প্রশ্ন আসিবে। ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক জানা থাকিলে উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের পদ্ধতি প্রদর্শনের পর অধ্যায়টির পরিসমাপ্তি করা হইবে। প্রত্যেক অনুচ্ছেদে উহা হইতে লব্ধ ফল বা সূত্রের সরল প্রয়োগ বিষয়ক কতিপয় অনুশীলনী প্রদত্ত হইয়াছে। অধ্যায়ের শেষে বিবিধ প্রশ্নের আকারে অতিরিক্ত অনুশীলনী প্রদত্ত হইল—ইহারা অধিকতর জটিল প্রকৃতির।

2·2. স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের উপর দিক্-নির্দেশিত রেখাংশের অভিক্ষেপ

এক সেট্ আয়ত অক্ষ $\overleftrightarrow{X'OX}$ এবং $\overleftrightarrow{Y'OY}$ সম্পর্কে ধরা যাক্ P_1 ও P_2 বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2)। অক্ষদ্বয়ের উপর দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ $\overline{P_1P_2}$ এর অভিক্ষেপ নির্ণয় করিতে হইবে (চিত্র 2.1)।



চিত্র 2.1. $\overline{P_1P_2}$ এর অক্ষদ্বয়ের উপর অভিক্ষেপ

ভগ্ন-রেখা P_1OP_2 বিবেচনা করা যাক। অনুচ্ছেদ 0·3 হইতে জানা যায় যে

x-অক্ষের উপর P_1OP_2 এর অভিক্ষেপ

$=\overline{P_1O}$ এর অভিক্ষেপ $+\overline{OP_2}$ এর অভিক্ষেপ

(উভয় অভিক্ষেপই x-অক্ষের উপর)

$= -(\overline{OP_1}$ এর অভিক্ষেপ $) + \overline{OP_2}$ এর অভিক্ষেপ (উভয় অভিক্ষেপই x-অক্ষের উপর)

$= -\overline{OM_1} + \overline{OM_2}$

$= -x_1 + x_2.$

অনুরূপভাবে, Y-অক্ষের উপর P_1OP_2 এর অভিক্ষেপ $= -y_1 + y_2$.

অনুশীলনী

1. স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের উপর রেখাংশ $\overline{PQ}$ এর অভিক্ষেপ-দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর, যেখানে P এবং Q বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হইল যথাক্রমে :

(*i*) (3, 2), (6, 5) ; (*ii*) (−2, 3), (−8, −2) ;

(*iii*) (2, 1), (7, 1) ; (*iv*) (−2, −1), (5, −4).

2. A, B, C, D হইল যথাক্রমে (−2, 4), (3, 2), (−3, −1), (2, 3) বিন্দু। দেখাও যে x-অক্ষের উপর $\overline{AB}$ এবং $\overline{CD}$ এর অভিক্ষেপ দুইটি সমান।

[উঃ 1. (*i*) 3, 3 ; (*ii*) 5, 0 ; (*iii*) −6, −5 ; (*iv*) 7, −3.]

2·3. দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব

আয়ত অক্ষদ্বয়

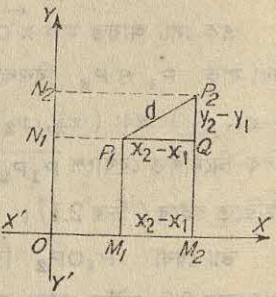
প্রদত্ত স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয় $\overleftrightarrow{X'OX}$ এবং $\overleftrightarrow{Y'OY}$

এই অক্ষদ্বয় সম্পর্কে ধরা যাক P_1 এবং P_2 বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2)।

ধরা যাক X-অক্ষের উপর $\overline{P_1P_2}$ এর অভিক্ষেপ $\overline{M_1M_2}$.

$\therefore \ \overline{M_1M^2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1} = x_2 - x_1.$

P_1 দিয়া x-অক্ষের সমান্তরাল একটি রেখা এবং P_2 দিয়া y-অক্ষের সমান্তরাল একটি রেখা অঙ্কন করা হইল। ধরা যাক, এই রেখা দুইটির ছেদবিন্দু Q দ্বারা নির্দেশিত হয়।



চিত্র 2.2

স্পষ্টত, $\overline{QP_2} = y$-অক্ষের উপর $\overline{P_1P_2}$ এর অভিক্ষেপ $= y_2 - y_1$

এবং $\overline{P_1Q} = \overline{M_1M_2} = x_2 - x_1.$

এখন সমকোণী ত্রিভুজ P_1QP_2 হইতে পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = |\overline{P_1Q}|^2 + |\overline{QP_2}|^2$$

অর্থাৎ $d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

$\therefore\ d=+\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$

বিশেষ ক্ষেত্রে, মূলবিন্দু O হইতে $P_1:(x_1, y_1)$ এর দূরত্ব $=+\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}.$

উদা. 1. যে ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি $(-2, 3)$, $(-2, -1)$, $(4, -1)$ বিন্দু, তাহার বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

বিন্দু তিনটিকে যথাক্রমে A, B এবং C ধরিয়া,

$AB^2=|\overline{AB}|^2=(-2+2)^2+(-1-3)^2=16$; $\therefore\ |\overline{AB}|=4$

$BC^2=|\overline{BC}|^2=(4+2)^2+(-1+1)^2=36$; $\therefore\ |\overline{BC}|=6$

$CA^2=|\overline{CA}|^2=(-2-4)^2+(3+1)^2=52$; $\therefore\ |\overline{CA}|=2\sqrt{13}.$

আরও লক্ষ্য কর যে $AB^2+BC^2=CA^2$; সুতরাং A, B, C একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে, যাহার B কোণ $=90°$.

উদা. 2. দেখাও যে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি সমরেখ :

$$A:(-3, -2),\ B:(5, 2),\ C:(9, 4).$$

$AB=\sqrt{(5+3)^2+(2+2)^2}=4\sqrt{5}$, $BC=\sqrt{(9-5)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}$,

$$AC=\sqrt{(9+3)^2+(4+2)^2}=6\sqrt{5}.$$

যেহেতু $AB+BC=AC$ ($\because\ 4\sqrt{5}+2\sqrt{5}=6\sqrt{5}$), সুতরাং A, B, C বিন্দু তিনটি এক সরলরেখায় অবস্থিত, অর্থাৎ সমরেখ।

অনুশীলনী

1. নিম্নলিখিত বিন্দু-যুগলগুলির মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর :

   $(2, 1)$ এবং $(-2, -2)$; $(-3, -6)$ এবং $(-14, -8)$;

   $(4, 8)$ এবং $(4, -8)$; $(3, -5)$ এবং $(8, 7)$.

   [উঃ 5; $5\sqrt{5}$; 16; 13]

2. প্রমাণ কর যে $(at^2, 2at)$ এবং $\left(\frac{a}{t^2}, -\frac{2a}{t}\right)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব

$$a\left(t+\frac{1}{t}\right)^2.$$

3. প্রমাণ কর যে বিন্দুদ্বয় $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ ও $(a\cos\phi, a\sin\phi)$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব হইল $2a\sin\frac{\theta-\phi}{2}$.

4. প্রমাণ কর যে $(4, -2)$, $(8, 2)$, $(7, -1)$ বিন্দু তিনটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ এবং ইহার ভূমির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

5. প্রমাণ কর যে $(-7, 1), (5, -4), (10, 8), (-2, 13)$ বিন্দুগুলি একটি বর্গের শীর্ষবিন্দু এবং বর্গটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

6. দেখাও যে $(-1, -2)$ বিন্দুটি একটি বৃত্তের কেন্দ্র যাহা $(11, 3)$, $(-1, -15), (-13, -7), (4, -14)$ বিন্দুগামী।

7. একটি ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি $(-2, 3), (-2, -1)$ এবং $(4, -1)$ বিন্দু; উহার বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। শীর্ষগুলি মূলবিন্দু হইতে কত দূরে অবস্থিত ?

[উঃ 4 ; 6 ; $2\sqrt{13}$; $\sqrt{13}, \sqrt{5}, \sqrt{17}$]

8. প্রমাণ কর যে $(2a, 4a)$, $(2a, 6a)$ এবং $(2a+\sqrt{3}a, 5a)$ বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ এবং উহার প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য $2a$.

9. একটি রেখার দৈর্ঘ্য 10 একক এবং ইহার এক প্রান্ত $(2, -3)$ বিন্দুতে অবস্থিত ; যদি উহার অপর প্রান্তের ভুজ 10 হয় তবে প্রমাণ কর যে ঐ প্রান্তবিন্দুর কোটি হয় 3 অথবা -9.

10. দেখাও যে নিম্নের প্রতিক্ষেত্রে বিন্দুগুলি সমরেখ :

(i) $(0, 4), (3, -2), (-2, 8)$; (ii) $(-2, 3), (-6, 1), (-10, -1)$; (iii) $(1, 2), (-3, 10), (4, -4)$; (iv) $(1, 3), (-2, -3), (3, 7)$.

তির্যক অক্ষ*

পরস্পর ω কোণে নত অক্ষদ্বয়ের ক্ষেত্রে বিন্দুদ্বয় $P_1(x_1, y_1)$ এবং $P_2(x_2, y_2)$ এর মধ্যে দূরত্ব

$$= +\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\omega}.$$

ইহা চিত্র 2.3 হইতে পাওয়া যাইবে, কারণ

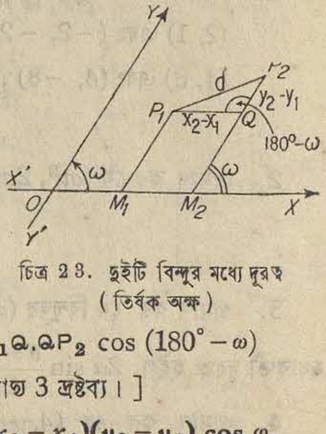
$\overline{OM_1} = x_1$, $\overline{OM_2} = x_2$, ফলে

$\overline{M_1M_2} = \overline{P_1Q} = x_2 - x_1$;

$\overline{M_1P_1} = y_1$, $\overline{M_2P_2} = y_2$ এবং

$\overline{QP_2} = y_2 - y_1$;

আবার $\angle P_1QP_2 = \angle M_1M_2P_2 = 180^\circ - \omega$.



চিত্র 2.3. দুইটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব
(তির্যক অক্ষ)

সুতরাং, $P_1P_2^2 = P_1Q^2 + QP_2^2 - 2P_1Q.QP_2 \cos(180^\circ - \omega)$

[সমতল ত্রিকোণমিতি—10ম অধ্যায়, উপপাদ্য 3 দ্রষ্টব্য।]

$\therefore\ d^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\omega.$

* পাঠ্যসূচীর অন্তর্ভুক্ত নহে। তবে সূত্রটি আগ্রহী ছাত্র-ছাত্রীদের মনোযোগ আকর্ষণ করিতে পারে

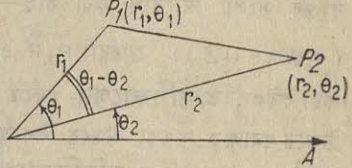
যদি $\omega = 90^\circ$ হয়, তবে অক্ষদ্বয় আয়ত হইয়া যায় এবং তখন d^2 এর পূর্বে নির্ণীত মান পাওয়া যায়, যথা :

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

বিন্দুদ্বয়ের মেরু বা পোলার স্থানাঙ্ক (r_1, θ_1) এবং (r_2, θ_2) হইলে উহাদের মধ্যে দূরত্ব

ধরা যাক্ $\overrightarrow{OA}$ প্রারম্ভিক অর্ধ-রশ্মি ; পোল O.

ধরা যাক্ P_1 এবং P_2 এর মেরু (polar) স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (r_1, θ_1) এবং (r_2, θ_2)। $\overline{P_1P_2}$ দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে।



চিত্র 2.4. মেরু বা পোলার স্থানাঙ্কের মাধ্যমে দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব

2.4 চিত্র হইতে,

$$\overline{OP_1} = r_1,\ \overline{OP_2} = r_2\ ;\ \angle AOP_1 = \theta_1,\ \angle AOP_2 = \theta_2,$$

সুতরাং $\angle P_2OP_1 = \theta_1 - \theta_2$.

$\triangle OP_2P_1$ হইতে ত্রিকোণমিতির সাহায্যে পাওয়া যায় :

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{OP_1}^2 + \overline{OP_2}^2 - 2\overline{OP_1}.\overline{OP_2} \cos P_2OP_1$$

$$= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\therefore \text{ দূরত্ব } \overline{P_1P_2} = +\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$

অনুশীলনী

1. P_1 এবং P_2 এর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর যদি উহাদের মেরু বা পোলার স্থানাঙ্ক হয় যথাক্রমে :

(i) $(2, 30^\circ)$ এবং $(4, 120^\circ)$; (ii) $(a, \frac{\pi}{2})$ এবং $(3a, \pi, 6)$.

2. প্রমাণ কর যে $(0, 0)$, $(3, \pi/2)$ এবং $(3, \pi/6)$ বিন্দুত্রয় একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।

2·4. নির্দিষ্ট অনুপাতে একটি রেখাংশের বিভক্তিকরণ

এক প্রস্ত আয়ত অক্ষ $\overleftrightarrow{X'OX}$ এবং $\overleftrightarrow{Y'OY}$ সম্পর্কে, ধরা যাক, $P_1 : (x_1, y_1)$ এবং $P_2 : (x_2, y_2)$ বিন্দুগামী রেখাংশের উপর $P : (x, y)$ একটি বিন্দু।

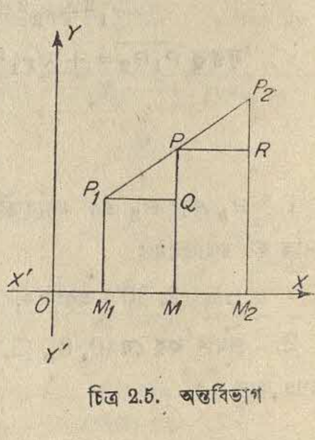
চিত্র 2.5 এ P, **রেখাংশ $\overline{P_1P_2}$ এর মধ্যে** অবস্থিত। চিত্র 2.6 এ P, **রেখাংশ $\overline{P_1P_2}$ এর বাহিরে** অবস্থিত [**বরং বলা ভাল**, P, (উভয়দিকে) বর্ধিত রেখাংশ $\overline{P_1P_2}$ এর মধ্যে যে কোন বিন্দু]। প্রথম ক্ষেত্রে বলা হয় যে P, $\overline{P_1P_2}$ কে **অন্তর্বিভক্ত** করিয়াছে এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে P, $\overline{P_1P_2}$ কে **বহির্বিভক্ত** করিয়াছে।

প্রসঙ্গত স্মরণ করা যায় যে প্রত্যেক দিক্-নির্দেশিত রেখাংশের উপর একটি অনুরূপ বাস্তব সংখ্যা আরোপ করা যায়—সংখ্যাটি ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হইতে পারে (অনুচ্ছেদ 0·2)। সুতরাং $\overline{P_1P}$ এবং $\overline{PP_2}$ এর উপর দুইটি অনুরূপ সংখ্যা আরোপ করা হইল ; **অন্তর্বিভাগের** ক্ষেত্রে সংখ্যা দুইটি অবশ্যই একই চিহ্নযুক্ত হইবে (হয় উভয়ে ধনাত্মক অথবা উভয়ে ঋণাত্মক, কারণ $\overline{P_1P}$ এবং $\overline{PP_2}$ রেখাংশ দুইটির অভিমুখ সদৃশ), কিন্তু **বহির্বিভাগের** ক্ষেত্রে সংখ্যা দুইটির চিহ্ন অবশ্যই পরস্পর বিপরীত হইবে (একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক, কারণ $\overline{P_1P}$ এবং $\overline{PP_2}$ রেখাংশ দুইটি এখন পরস্পর বিপরীত অভিমুখী)। মনে করা যাক্, $\overline{P_1P}$ এবং $\overline{PP_2}$ এর জন্য সংখ্যা দুইটি যথাক্রমে m এবং n ধার্য করা হইল। এই সংখ্যা দুইটি **হুবহু $\overline{P_1P}$ এবং $\overline{PP_2}$ দৈর্ঘ্য হইতে পারে** অথবা উহারা **এই দৈর্ঘ্য দুইটির সমানুপাতী হইতে পারে**। উভয় ক্ষেত্রেই $\overline{P_1P} : \overline{PP_2} = m : n.$

নিম্নলিখিত ভাষায় উপরের বক্তব্যটিকে সংক্ষিপ্তাকারে দেওয়া হইল :

P, রেখাংশ $\overline{P_1P_2}$ কে $\overline{P_1P} : \overline{PP_2} = m : n$ অনুপাতে বিভক্ত করিয়াছে।

অনুপাত $m : n$ ধনাত্মক, যখন $\overline{P_1P_2}$ কে P অন্তর্বিভক্ত করে এবং ঋণাত্মক, যখন বহির্বিভক্ত করে।



চিত্র 2.5. অন্তর্বিভাগ

এখন P এর স্থানাঙ্ক x এবং y কে P_1 এবং P_2 এর স্থানাঙ্কের সাহায্যে প্রকাশ করিতে হইবে।

যেহেতু, $\overline{P_1P} : \overline{PP_2} = m : n$, সুতরাং x-অক্ষের উপর $\overline{P_1P}$ এবং $\overline{PP_2}$ এর অভিক্ষেপ দুইটিও অবশ্যই একই অনুপাত $m : n$ এ থাকিবে, ফলে (চিত্র 2.5 দ্রষ্টব্য)

$$\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} = \frac{m}{n}$$

বা, $$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

বা, $nx - nx_1 = mx_2 - mx$, এবং **ইহা হইতে** $x = \dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}$

y-অক্ষের উপর অভিক্ষেপ সম্পর্কে অনুরূপ বিবেচনার ফলে y এর মান নির্ণায়ক সূত্রটি পাওয়া যাইবে। সুতরাং P এর স্থানাঙ্ক দুইটি হইল

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \ y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}.$$

চিত্র 2.6 এর ক্ষেত্রেও অনুরূপ যুক্তি প্রযোজ্য—কেবল মনে রাখিতে হইবে যে $m:n$ অনুপাত এখন ঋণাত্মক (m, n এর একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক)।

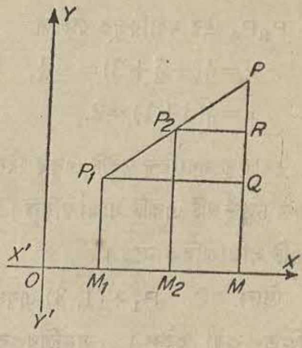
[লক্ষ্য কর ($m:-n$ এই অনুপাত লইলে) যে

$$\frac{m}{-n}=\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}=\frac{x-x_1}{-(x-x_2)}=\frac{x-x_1}{x_2-x};\ \text{সুতরাং } x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}.\Big]$$

টীকা : $\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}=\frac{m}{n}=\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}$ এই সত্যটি, দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ P_1QP এবং PRP_2 লইয়া বিবেচনা করিলেও সঠিক বলিয়া যাচাই করা যায় ; কারণ চিত্র 2.6 অনুসারে

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}=\frac{\overline{P_1Q}}{\overline{RP_2}}=\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}$$

(চিত্র 2.5 এর সাহায্যেও ইহা প্রমাণ সাপেক্ষ)।



চিত্র 2.6—বহির্বিভাগ

একটি গুরুত্বপূর্ণ বিশেষ ক্ষেত্র

যখন $m=n$, তখন রেখাংশ $\overline{P_1P_2}$ এর মধ্যবিন্দু P এর স্থানাঙ্ক পাওয়া যায়,

$$\text{যথা : } x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

মন্তব্য : P_1 এবং P_2গামী রেখাটিকে উভয় দিকে বর্ধিত অবস্থায় বিবেচনা করা যাক্। বিভাজন বিন্দু P যখন P_1 এর সহিত মিলিত হয়, তখন অনুপাত $m:n=0$; P কে P_1 এর বাম পার্শ্বে আনিয়া P_1 হইতে অসীম দূরত্বে লইয়া যাইতে থাকিলে অনুপাতটির মান 0 হইতে পরিবর্তিত হইতে হইতে -1 এর দিকে অগ্রসর হয় ; P যখন P_1 হইতে P_2 তে যায়, তখন অনুপাতটির মান 0 হইতে পরিবর্তিত হইতে হইতে ∞ অভিমুখে যায়। যখন P, P_2 এর সহিত মিলিত হইয়া পরে P_2 এর দক্ষিণ পার্শ্বে অসীম দূরত্বে যায়, তখন অনুপাতটির মান $-\infty$ হইতে পরিবর্তিত হইতে হইতে -1 অভিমুখে অগ্রসর হয়। সুতরাং সমগ্র রেখাটির বাম হইতে দক্ষিণে P চলিতে থাকিলে

$-1<\frac{m}{n}\leqslant 0\{P_1\}$; $0<\frac{m}{n}<\infty\{P_2\}$; $-\infty<\frac{m}{n}<-1$.

উদা. 1. দেখাও যে, কোন চতুর্ভুজের শীর্ষ চারিটি P_1 : $(-\frac{3}{2}, 4)$, P_2 : $(-\frac{7}{2}, 3)$, P_3 : $(1, 0)$, P_4 : $(3, 1)$ হইলে উহা একটি সামান্তরিক।

চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে উহা একটি সামান্তরিক—এখানে এই সুপরিচিত তথ্যটির সাহায্য লওয়া হইবে।

P_1P_3 এর মধ্যবিন্দুর ক্ষেত্রে

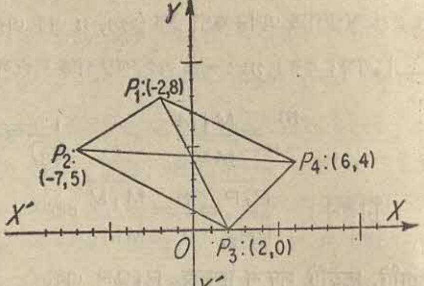
$x=\frac{1}{2}(-\frac{3}{2}+1)=-\frac{1}{4}$,

$y=\frac{1}{2}(4+0)=2$;

P_2P_4 এর মধ্যবিন্দুর ক্ষেত্রে

$x=\frac{1}{2}(-\frac{7}{2}+3)=-\frac{1}{4}$,

$y=\frac{1}{2}(3+1)=2$.



চিত্র 2.7

যেহেতু মধ্যবিন্দু দুইটি একই বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে, সুতরাং প্রমাণিত হইল যে প্রদত্ত চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক। অনুরূপভাবে যাচাই কর চিত্র 2.7এ $P_1P_2P_3P_4$ একটি সামান্তরিক নহে।

উদা. 2. P_1 : $(1, 3)$ এবং P_2 : $(5, -2)$ এর সংযোজক রেখাংশকে সমত্রিখণ্ডিত করা হইল। সমত্রিখণ্ডক বিন্দুগুলির মধ্যে P_1 এর নিকটতর বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

চিত্র 2.8 এ

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}.$$

($\overline{P_1P}$ এবং $\overline{PP_2}$ উভয়েরই অভিমুখ নিম্ন দিকে বলিয়া ঋণাত্মক চিহ্ন লওয়া হইয়াছে।)

সুতরাং সমত্রিখণ্ডক বিন্দু দুইটির মধ্যে P_1 এর নিকটতর বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক :

$$x=\frac{2.1+1.5}{2+1},\quad y=\frac{2.3+1.(-2)}{2+1}$$

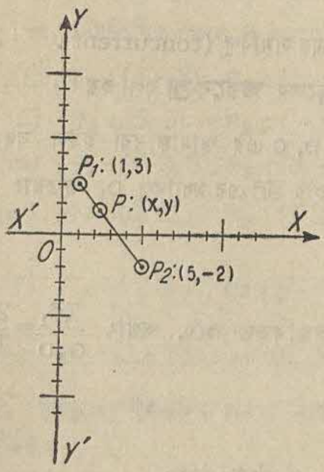
বা, $x=\frac{7}{3}$, $y=\frac{4}{3}$

অর্থাৎ P এর স্থানাঙ্ক $(\frac{7}{3}, \frac{4}{3})$.

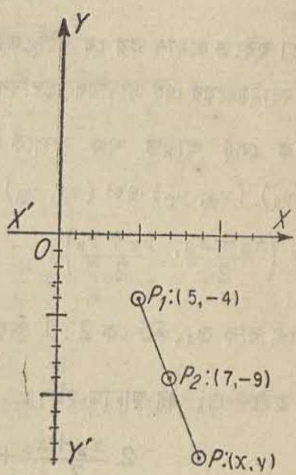
উদা. 3. P_1 : $(5, -4)$ হইতে P_2 : $(7, -9)$ পর্যন্ত রেখাংশকে P_2 এর অভিমুখে এইরূপ বর্ধিত করা হইল, যেন উহার দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ হয়। অন্তিম বিন্দু P চিত্র 2.9) এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

এখানে $|\overline{P_1P}| = 2|\overline{PP_2}|$, কিন্তু $\overline{P_1P}$ এবং $\overline{PP_2}$ রেখাংশ দুইটির অভিমুখ পরস্পর বিপরীত ; $\overline{P_1P}$ নিম্নমুখী এবং $\overline{PP_2}$ উর্ধ্বমুখী। সুতরাং লওয়া হইল :

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{-2}{1}$$; ধরা যাক P এর স্থানাঙ্ক (x, y)।



চিত্র 2.8



চিত্র 2.9

তাহা হইলে, $x = \frac{-2\times7+1\times5}{-2+1} = 9$,

$$y = \frac{-2\times(-9)+1\times(-4)}{-2+1} = -14$$

$\therefore$ P এর স্থানাঙ্ক $= (9, -14)$.

উদা. 4. কেন্দ্র $P_1(-4, +1)$ বিন্দুতে অবস্থিত এইরূপ একটি বৃত্তের কোন ব্যাসের একটি প্রান্ত বিন্দু P_2 (2, 6) ; উহার অপর প্রান্ত বিন্দু P (x, y) এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

এখানে $\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{-1}{+2}$ (চিত্র অঙ্কন করিয়া লও)

সুতরাং $x = \frac{(-1)2+2(-4)}{-1+2} = -10$

এবং $y = \frac{(-1)\,6+2\,(1)}{-1+2} = -4$

$\therefore$ P এর স্থানাঙ্ক $(-10, -4)$.

উদা. 5. ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র (Centroid)

ABC ত্রিভুজের $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ এবং $\overline{AB}$ বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E এবং F. বিশ্লেষণ জ্যামিতির সাহায্যে প্রমাণ কর যে, যে বিন্দু $\overline{AD}$কে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে তাহা $\overline{BE}$ এবং $\overline{CF}$ রেখাংশদ্বয়কেও একই অনুপাতে বিভক্ত করে।

ইহা হইতে প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু (concurrent).

(মধ্যমাত্রয়ের এই সাধারণ ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের **ভরকেন্দ্র** বলা হয়।)

এক সেট্ আয়ত অক্ষ সম্পর্কে শীর্ষ A, B, C এর স্থানাঙ্ক ধরা হইল যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3)। যেহেতু $\overline{BC}$ এর মধ্যবিন্দু D, সুতরাং Dএর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$।

ধরা যাক্ G_1, $\overline{AD}$ কে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে, অর্থাৎ $\frac{\overline{AG_1}}{G_1D}=\frac{2}{1}$;

তাহা হইলে G_1 এর স্থানাঙ্ক হইল :

$$\bar{x}=\frac{2.\frac{x_2+x_3}{2}+1.x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_3+x_3}{3}$$

তদ্রূপ $\bar{y}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$.

যদি G_2 এমন বিন্দু লওয়া হয় যাহা $\overline{BE}$কে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তবে অনুরূপভাবে দেখা যাইবে যে G_2 এর স্থানাঙ্কও হইবে :

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

আবার G_3 যদি $\overline{CF}$কে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে, তবে G_3র স্থানাঙ্ক হইবে

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

সুতরাং G_1, G_2, G_3 বিন্দু তিনটি একটি বিন্দুতে মিলিত হয়, **অর্থাৎ** মধ্যমা তিনটি একই বিন্দুতে মিলিত হয়, যাহার স্থানাঙ্ক হইল :

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

এই বিন্দুটি ত্রিভুজটির **ভরকেন্দ্র**।

অনুশীলনী

[সংখ্যা-সংশ্লিষ্ট প্রশ্নে একটি চিত্র অঙ্কন করিয়া বিন্দুগুলি মোটামুটিভাবে বসাইয়া লওয়া বাঞ্ছনীয়।]

1. রেখাংশ $\overline{P_1P_2}$কে বিন্দু P (x, y) এইরূপভাবে বিভক্ত করে যে $\overline{P_1P} : \overline{PP_2} = m : n$; নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :

(i) $P_1 : (4, -3),\ P_2 : (1, 4)$; $m : n = 2 : 1$.

(ii) $P_1 : (5, 3),\ P_2 : (-3, -3)$; $m : n = 1 : 3$.

(iii) $P_1 : (-2, 3),\ P_2 : (3, -2)$; $m : n = 2 : 5$.

(iv) $P_1 : (0, 3),\ P_2 : (7, 4)$; $\frac{m}{n} = -\frac{2}{7}$.

(v) $P_1 : (-5, 2),\ P_2 : (1, 4)$; $\frac{m}{n} = -\frac{5}{3}$.

(vi) $P_1 : (2, -5),\ P_2 : (6, 3)$; $\frac{m}{n} = \frac{3}{4}$.

2. ত্রিভুজের শীর্ষগুলির স্থানাঙ্ক নিম্নে প্রদত্ত হইল ; প্রতি ক্ষেত্রে ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র নির্ণয় কর :

(i) $(5, 7), (1, -3), (-5, 1)$.

(ii) $(3, 6), (-5, 2), (7, -6)$.

(iii) $(7, 4), (3, -6), (-5, 2)$.

3. P_1 $(6, 8)$ হইতে P_2 (x_2, y_2) পর্যন্ত রেখাংশকে যদি কোন বিন্দু $(9, 2)$ $3 : 7$ অনুপাতে বিভক্ত করে, তবে P_2 এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

4. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু $(3, 2), (-1, -2)$ এবং $(5, -4)$ হইলে ত্রিভুজটির শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

5. বিশ্লেষণ জ্যামিতির সাহায্যে দেখাও যে A $(-3, 2)$, B $(5, 4)$, C $(7, -6)$, D$(-5, -4)$ শীর্ষবিশিষ্ট চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলির মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাগুলি একটি দ্বিতীয় চতুর্ভুজ উৎপন্ন করে, যাহার পরিসীমা প্রথম চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

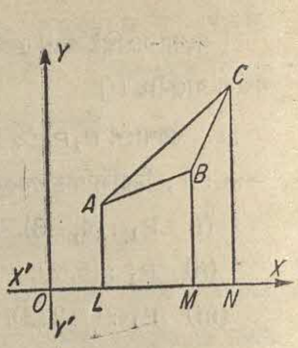
[**উত্তর 1.** (i) (2, 5/3) ; (ii) (3, 3/2) ; (iii) (−4/7, 11/7) ; (iv) (−14/5, 13/5) ; (v) (10, 7) ; (vi) (26/7, −11/7). **2.** (i) (1/3, 5/3) ; (ii) (5/3, 2/3) ; (iii) (5/3, 0). **3.** (16, −12). **4.** (−3, 4), (9, 0), (1, −8).]

2·5. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (Area of a triangle)

এক সেট আয়ত অক্ষ $\overleftrightarrow{X'OX}$ এবং $\overleftrightarrow{Y'OY}$ সম্পর্কে A, B এবং C এর স্থানাঙ্ক, ধরা যাক্, যথাক্রমে $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, এবং (x_3, y_3)।

$\triangle$ABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

শীর্ষত্রয় A, B, Cকে সেই ক্রম অনুসারে লওয়া হইল, যে ক্রমে উহাদের সহিত কোন ব্যক্তির সাক্ষাৎ হইবে, যদি ঐ ব্যক্তি A হইতে যাত্রা করিয়া ABC **দ্বারা অধিকৃত অঞ্চলটিকে সর্বদা তাঁহার বাম দিকে রাখিয়া** ত্রিভুজটিকে প্রদক্ষিণ করেন। এই ক্ষেত্রে বলা হয় যে শীর্ষগুলি, **ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে** সজ্জিত হইয়াছে।



চিত্র 2.10 ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

ধরা যাক্, A, B, C বিন্দু হইতে x-অক্ষের উপর অঙ্কিত লম্বগুলির পাদবিন্দু যথাক্রমে L, M, N (চিত্র 2.10)।

$\triangle$ABC এর ক্ষেত্রফল = ট্র্যাপিজিয়াম ALNC এর ক্ষেত্রফল − ট্র্যাপিজিয়াম ALMB এর ক্ষেত্রফল − ট্র্যাপিজিয়াম BMNC এর ক্ষেত্রফল। *

সুতরাং $\triangle$ABC এর ক্ষেত্রফলকে যদি A দ্বারা নির্দেশ করা হয়, তবে

$$A=\tfrac{1}{2}(\overline{LA}+\overline{NC}).\ \overline{LN}-\tfrac{1}{2}(\overline{LA}+\overline{MB}).\ \overline{LM}-\tfrac{1}{2}(\overline{MB}+\overline{NC}).\ \overline{MN}$$

$$=\tfrac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1)-\tfrac{1}{2}(y_1+y_2)(x_2-x_1)$$

$$-\tfrac{1}{2}(y_2+y_3)(x_3-x_2).$$

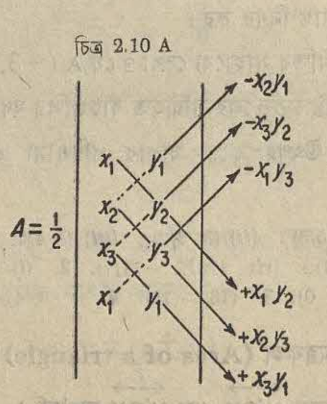
$$=\tfrac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)] \text{ বর্গএকক } \cdots \textbf{(1)}$$

$\triangle$ABC এর ক্ষেত্রফলের এই সূত্রের অপর একটি আকার :

$$A=\tfrac{1}{2}[\,x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_2y_1-x_3y_2\,] \quad \text{বর্গ একক} \cdots \textbf{(2)}$$

সূত্রটি মনে রাখার সুবিধার জন্য নিম্নপ্রকারে উহাকে সজ্জিত করিয়া লেখা যাইতে পারে :

চিত্র 2.10 A



… … **(3)**

* **বিঃ দ্রঃ.** যে চতুর্ভুজের দুইটিমাত্র বাহু সমান্তরাল তাহাকে ট্র্যাপিজিয়াম বলে এবং ইহার ক্ষেত্রফল হইল, সমান্তরাল বাহু দুইটির সমষ্টি ও উহাদের লম্ব দূরত্বের গুণফলের অর্ধেক।

লক্ষ্য করা যায় যে সজ্জাটির প্রথম সারিটি নিচে আরও একবার পুনরাবৃত্ত হইয়াছে।

উপরে প্রদত্ত **(1)** এর আকারটি নিম্নের ছক (determinant)টিরই বিস্তৃতি মাত্র, যথা :

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ বর্গ একক } \cdots \quad \cdots \qquad \mathbf{(4)}$$

ছাত্রছাত্রীরা (1), (2), (3), (4) আকারগুলির যে কোন একটি স্মরণ রাখিতে পারে।

টীকা। ভিন্ন একটি প্রমাণের জন্য অনুশীলনীর 9নং প্রশ্ন (পাতা 25) দ্রষ্টব্য।

একটি গুরুত্বপূর্ণ মন্তব্য :

শীর্ষগুলি ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে সজ্জিত হইলে △ABC এর ক্ষেত্রফল নির্দেশক রাশিটি সর্বদা **ধনাত্মক** হইতে দেখা যায় ; যদি শীর্ষগুলি ঘড়ির কাঁটার গতির ক্রমে লওয়া হয় তবে ক্ষেত্রফল নির্দেশক রাশিটি **ঋণাত্মক** হয়।

সংখ্যা-সংশ্লিষ্ট প্রশ্নের ক্ষেত্রে :

শীর্ষগুলিকে ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে লওয়া বাঞ্ছনীয়—ইহাতে (1) অথবা (2) আকারের সূত্র হইতে ধনাত্মক মান পাওয়া যাইবে। বিন্দুগুলিকে মোটামুটিভাবে সংস্থাপিত করিয়া ইহা করা যাইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 1. যে ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় মূলবিন্দু (0, 0) এবং (x_2, y_2) ও (x_3, y_3) বিন্দুদ্বয় তাহার ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}(x_2y_3-x_3y_2)$।

[মূল সূত্রে $x_1=y_1=0$ ধরিয়া]

অনুসিদ্ধান্ত 2. তিনটি বিন্দু, যথা : A : (x_1, y_1), B : (x_2, y_2) এবং C : (x_3, y_3) সমরেখ (collinear) হইবার শর্ত হইল এই যে ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয়ক রাশিটি **শূন্য** হইবে, অর্থাৎ শর্তটি হইল :

$$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0$$

$$\text{বা, } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

উদা. 1. একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় (−3, −2), (1, 4), (2, 3) ; উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$$\text{নির্ণেয় ক্ষেত্রফল}=\frac{1}{2}[-3(4-3)+1(3+2)+2(-2-4)]$$

$$=\frac{1}{2}[-3+5-12]=-5 \textbf{ বর্গ একক।}$$

ঋণাত্মক চিহ্ন হইতে বুঝা যায় যে শীর্ষত্রয় $(-3, -2)$, $(1, 4)$ এবং $(2, 4)$ ঘড়ির কাঁটার গতির ক্রমে আছে।

ক্ষেত্রফলটির সাংখ্যমান $=5$ **বর্গএকক।**

উদা. 2. A : $(3,1)$, B : $(2k, 3k)$, C : $(k, 2k)$ শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে পৃথক বিন্দুত্রয় A, B, C সমরেখ হইবে, যদি $k=-2$ হয়।

$$\text{ক্ষেত্রফল} = \tfrac{1}{2}[3(3k-2k)+2k(2k-1)+k(1-3k)]$$
$$= \tfrac{1}{2}[3k+4k^2-2k+k-3k^2]$$
$$= \tfrac{1}{2}[k^2+2k] \text{ বর্গ একক}$$

যদি A, B, C সমরেখ হয়, তবে $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয়ক রাশিটি $=0$

$$\therefore \quad k(k+2)=0$$

$\therefore$ হয় $k=0$, অথবা $k=-2$

কিন্তু যদি $k=0$ হয়, তবে B এবং C মিলিত হয় এবং তিনটি পৃথক বিন্দু থাকে না।

$\therefore$ k এর নির্ণেয় মান $=-2$.

অনুশীলনী

1. $(2, 3)$, $(5, 7)$ এবং $(-3, 4)$ বিন্দুত্রয় সংস্থাপিত কর। বিন্দুগুলিকে ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে লইয়া ইহাদের দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[উঃ 11·5 বর্গ একক]

2. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, যখন উহাদের শীর্ষগুলি হইবে :

(*i*) $(2,-3)$, $(4, 2)$ এবং $(-5,-2)$;

(*ii*) $(-3, 4)$, $(6, 2)$ এবং $(4,-3)$;

(*iii*) $(-7, 5)$, $(1, 1)$ এবং $(-3, 3)$;

(*iv*) $(a, b+c)$, $(b, c+a)$ এবং $(c, a+b)$.

[উঃ (*i*) 18·5 ; (*ii*) 24.5 ; (*iii*) 0 ; (*iv*) 0]

3. দেখাও যে উপরের প্রশ্ন $2(i)$ এর ত্রিভুজটির বাহুগুলির মধ্যবিন্দু সরলরেখার দ্বারা যুক্ত করিয়া যে চারিটি ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তাহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

4. দেখাও যে $(t, t-2)$, $(t+3, t)$, $(t+2, t+2)$ বিন্দু তিনটি যে ত্রিভুজের শীর্ষ, তাহার ক্ষেত্রফল নির্দেশক রাশিটি t বর্জিত।

5. $\triangle OAB$ এর শীর্ষত্রয় $(0, 0)$, $(b\cos\theta, -b\sin\theta)$, $(\sin\phi, \cos\phi)$; দেখাও যে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফলের মান চরম (maximum) হইবে যখন $\theta=\phi$ এবং এই চরম মান নির্ণয় কর। [উঃ $\frac{1}{2}b$ বর্গ একক]

6. A, B, C, D হইল যথাক্রমে $(3, 1)$, $(2, 4)$, $(2, 2)$, $(3-2t, t^2+5)$ বিন্দু এবং O মূলবিন্দু $(0, 0)$; যদি $\triangle$OAB এর ক্ষেত্রফল $=\triangle$OCB এর ক্ষেত্রফল (মান এবং চিহ্ন উভয় বিষয়ে) হয়, তবে t এর মান নির্ণয় কর। [উঃ $t=1$, বা, -3]

7. দেখাও (ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সূত্র প্রয়োগ দ্বারা) যে নিম্নের প্রতি ক্ষেত্রে বিন্দুগুলি সমরেখ :

(i) $(3, 0), (2, \frac{1}{2}), (4, -\frac{1}{2})$.

(ii) $\left(-2, -\dfrac{1}{b}\right), \left(-3, -\dfrac{2}{b}\right), \left(1, \dfrac{2}{b}\right)$.

(iii) $(a, 0), (am^2, 2am), \left(\dfrac{a}{m^2}, -\dfrac{2a}{m}\right)$.

8. A, B, C হইল যথাক্রমে $(3, 4)$, $(5, 2)$, (x, y) বিন্দু; যদি $\triangle$ABC এর ক্ষেত্রফলের মান $+3$ বর্গএকক হয়, তবে দেখাও যে $x+y-10=0$.

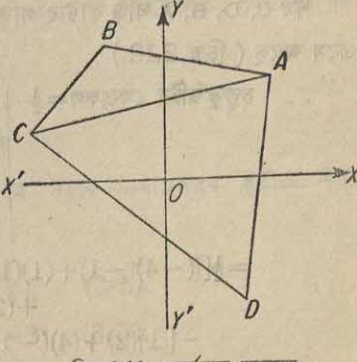
*9. O মূলবিন্দু এবং A, B এর মেরু (polar) স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (r_1, θ_1), (r_2, θ_2) হইলে প্রমাণ কর যে $\triangle$OAB এর ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}r_1r_2 \sin(\theta_2-\theta_1)$; কিন্তু যদি A ও B এর অনুরূপ আয়ত কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক হয় যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2), তবে ঐ ক্ষেত্রফল হইবে $\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$।

এই রাশিটি হইতে ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যখন A, B, C এর স্থানাঙ্ক হইবে যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) এবং দেখাও যে ঐ ক্ষেত্রফল হইল :

$$\tfrac{1}{2}[x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3].$$

2·6 চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল (Area of a quadrilateral)

চতুর্ভুজের শীর্ষগুলি যদি ক্রমান্বয়ে গৃহীত বিন্দু A : (x_1, y_1), B : (x_2, y_2), C : (x_3, y_3), D : (x_4, y_4) হয়, তবে উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



চিত্র 2.11 চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

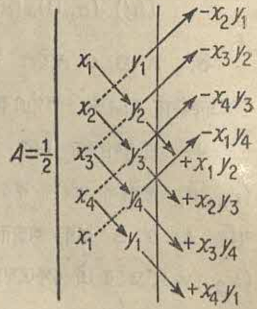
ধরা যাক্ ABCD প্রদত্ত চতুর্ভুজ (চিত্র 2.11) ABCD এর ক্ষেত্রফল $=$ $\triangle$CDA এর ক্ষেত্রফল $+$ $\triangle$ABC এর ক্ষেত্রফল

$$=\tfrac{1}{2}[x_3(y_4-y_1)+x_4(y_1-y_3)+x_1(y_3-y_4)]+\tfrac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

$$=\tfrac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)+x_4(y_1-y_3)$$
$$+x_1(y_3-y_4)+x_3(y_4-y_1)]$$
$$=\tfrac{1}{2}[x_1(y_2-y_4)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_4-y_2)+x_4(y_1-y_3)]$$
$$=\tfrac{1}{2}[(x_1\,y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_4-x_4y_3)$$
$$+(x_4y_1-x_1y_4)]$$
$$=\tfrac{1}{2}[x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1-x_1y_4-x_2y_1-x_3y_2$$
$-x_4y_3]$ বর্গ একক।

সূত্রটি মনে রাখিতে হইলে :

(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) এবং (x_4, y_4) স্থানাঙ্কগুলিকে দক্ষিণ পার্শ্বে প্রদত্ত পদ্ধতিতে সজ্জিত কর—লক্ষ্য কর, প্রথম সারিটি কেবল নিচে আর একবার পুনরাবৃত্ত হইয়াছে : চিত্র 2.11B দ্রষ্টব্য।



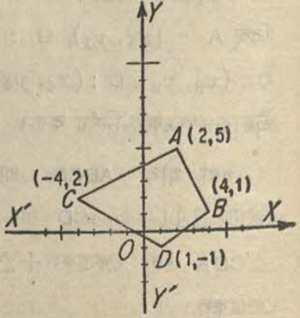
চিত্র 2.11B

টীকা : n-বাহুবিশিষ্ট বহুভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots \cdots (x_n, y_n)$ হইলে ইহা দেখান যায় যে বহুভুজটির ক্ষেত্রফল $=\tfrac{1}{2}[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+ \cdots \cdots +(x_ny_1-x_1y_n)]$ বর্গএকক।

উদা. 1. চতুর্ভুজ CDBAর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, যেখানে

A : (2, 5), B : (4, 1), C : (−4, 2), D : (1, −1)

শীর্ষ C, D, B, A ঘড়ি কাঁটার গতির বিপরীত ক্রমে আছে (চিত্র 2.12)



চিত্র 2.12

$\therefore$ চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল $=\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$

$$=\tfrac{1}{2}[\{(-4)(-1)+(1)(1)+(4)(5)+(2)(2)\}$$
$$-\{(1)(2)+(4)(-1)+(2)(1)+(-4)(5)\}]$$
$$=\tfrac{1}{2}[4+1+20+4-2+4-2+20]=\tfrac{49}{2}=24{\cdot}5$$ **বর্গ একক।**

উদা. 2. দেখাও যে কোন চতুর্ভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত শীর্ষগুলি $(a, 0)$, $(-b, 0)$, $(0, a)$ এবং $(0, -b)$ হইলে উহার ক্ষেত্রফল শূন্য। (প্রদত্ত: $a>0$ $b>0$)। উত্তরটির ব্যাখ্যা দাও।

ধরা যাক্‌, শীর্ষগুলি A : $(a, 0)$, B : $(-b, 0)$, C : $(0, a)$ এবং এবং D : $(0, -b)$.

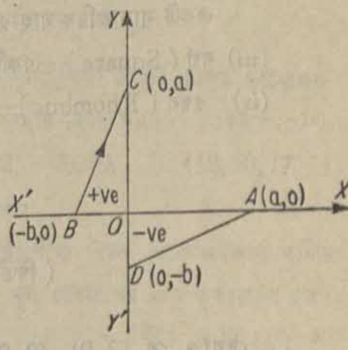
শীর্ষগুলিকে A, B, C, D এই ক্রমে (চিত্র 2.13) লইয়া চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

$$\therefore \text{ চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & 0 \\ -b & 0 \\ 0 & a \\ 0 & -b \\ a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}[\{(a)(0)+(-b)(a)+(0)(-b)+(0)(0)\}-\{(-b)(0)+(0)(0)+(0)(a)+(a)(-b)\}]$$

$$= \tfrac{1}{2}[-ab+ab] = 0.$$

প্রকৃত পক্ষে, চিত্রানুসারে ক্ষেত্রটিতে রহিয়াছে △BCO (যাহার ক্ষেত্রফলের সাংখ্য মান হইল $\frac{1}{2}ab$), যাহাকে ঘড়ির কাঁটার গতির অভিমুখে লওয়া হইয়াছে এবং অবশিষ্ট অংশ △ODA (যাহার ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমানও হইল $\frac{1}{2}ab$), যাহাকে ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে লওয়া হইয়াছে। সুতরাং উপযুক্ত চিহ্ন গৃহীত এই দুই ক্ষেত্রফলের সমষ্টি পাওয়া গেল শূন্য।



চিত্র 2.13

অনুশীলনী

1. চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, যখন উহার ক্রমানুসারে গৃহীত শীর্ষবিন্দুগুলি হইল।

(i) (0, 0), (5, 1), (4, 6), (2, 5).

(ii) (1, 4), (−2, 1), (2, −3), (3, 3).

(iii) (1, 1), (3, 4), (5, −2), (4, −7).

(iv) (−1, 6), (−3, −9), (5, −8), (3, 9).

2. নিম্নের প্রত্যেক ক্ষেত্রে বিন্দুগুলি সংস্থাপিত কর ও পরে চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ; শীর্ষগুলি ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতক্রমে লইতে হইবে :

(*i*) $(-1, -1)$, $(-4, -2)$, $(-5, -4)$, $(-2, -3)$.

(*ii*) $(4, \frac{1}{2})$, $(\frac{5}{2}, 3)$, $(-4, -\frac{3}{2})$, $(1, -6)$.

(*iii*) $(8, 7)$, $(0, -5)$, $(5, 0)$ $(-6, 2)$.

[**উত্তর : 1.** (i) 17 ; (ii) 18·5 ; (iii) 20·5 ; (iv) 96. **2.** (i) 5 ; (ii) 34·5; (iii) 74.] [সবগুলি বর্গ এককে]

প্রাথমিক জ্যামিতিতে প্রদত্ত নিম্নলিখিত সংজ্ঞাগুলি প্রশ্ন সমাধানে সাহায্য করিবে :

(*i*) সামান্তরিক (Parallelogram)—

বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল, সমান ; কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(*ii*) আয়তক্ষেত্র (Rectangle)—

একটি সামান্তরিক যাহার কর্ণ দুইটি সমান ; প্রত্যেক কোণ $=90^\circ$.

(*iii*) বর্গ (Square)—একটি আয়তক্ষেত্র, যাহার সকল বাহু পরস্পর সমান।

(*iv*) রম্বস (Rhombus)—একটি চতুর্ভুজ যাহার সকল বাহু পরস্পর সমান, কিন্তু কর্ণ দুইটি সমান নহে।

প্রশ্নমালা

(দ্বিতীয় অধ্যায়ের উপর)

[A]

1. দেখাও যে $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}+1)$ বিন্দুগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

2. প্রমাণ কর যে $(1, 8)$, $(3, 2)$, $(9, 4)$ যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু, তাহা একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

3. দেখাও যে $(-2, 1)$, $(1, 0)$, $(4, 3)$ এবং $(1, 2)$ বিন্দুগুলি একটি সামান্তরিকের শীর্ষ। সামান্তরিকটি কি আয়তক্ষেত্র ?

4. দেখাও যে $(-7, 1)$, $(5, -4)$, $(10, 8)$, $(-2, 13)$ বিন্দুগুলি একটি বর্গের শীর্ষ এবং উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

5. প্রমাণ কর যে $(2, -2)$, $(8, 4)$, $(5, 7)$ এবং $(-1, 1)$ বিন্দুগুলি একটি আয়তক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দু।

6. প্রমাণ কর যে $(2, 5)$, $(5, 9)$, $(9, 12)$ এবং $(6, 8)$ বিন্দুগুলি ক্রমানুসারে যুক্ত হইলে একটি রম্বস উৎপন্ন করিবে।

7. প্রমাণ কর যে $(-\frac{1}{14}, \frac{39}{14})$ বিন্দুটি, (1, 1), (2, 3) এবং (−2, 2) বিন্দুগুলি যে ত্রিভুজের শীর্ষ তাহার পরিকেন্দ্র। পরিব্যাসার্ধটির দৈর্ঘ্য কত? [উঃ $\frac{5}{14}\sqrt{34}$]

8. একটি বৃত্তের কেন্দ্র (3, 2) এবং উহা (13, −10) বিন্দুগামী। বৃত্তটি কি (−11, 9) বিন্দু দিয়া যায়? যুক্তি দাও। [উঃ না]

9. একটি বৃত্তের কেন্দ্র (0, −13) এবং x-অক্ষ উহার একটি স্পর্শক। বৃত্তটি কি (11, −6) বিন্দু দিয়া যায়? উহা (−5, −1) বিন্দু দিয়া কি যায়? যুক্তি দাও। [উঃ না; হাঁ]

10. কোন বৃত্তের কেন্দ্র (5, 3) বিন্দুতে অবস্থিত এবং উহার ব্যাসার্ধ 5; উহার যে জ্যা এর মধ্যবিন্দু (3, 2) তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [উঃ $4\sqrt{5}$]

11. একটি বৃত্তের কেন্দ্র (1, 1) বিন্দুতে এবং উহার 10 একক দৈর্ঘ্যের একটি জ্যা (2, 0) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়; উহার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [উঃ $3\sqrt{3}$]

[B]

1. (−3, 2) হইতে (1, −4) অভিমুখে নির্দেশিত ঐ দুই বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে তিনগুণ করা হইল। অন্তিম বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ (9, −16)]

2. **দুইটি প্রণালীতে** দেখাও যে (−2, −2), (9, −1), (18, 2), (7, 1) বিন্দুগুলি যে চতুর্ভুজের শীর্ষ তাহা একটি সামান্তরিক।

3. (6, −2), (0, 7) এর সংযোজক রেখাংশকে উভয় দিকে এইরূপে বর্ধিত করা হইল যেন প্রত্যেক দিকের বর্ধিত অংশ মূল রেখাংশের এক-তৃতীয়াংশ হয়। অন্তিম বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ (−2, 10); (8, −5)]

4. $(a+b,\ a-b)$ বিন্দু হইতে $(a-b,\ a+b)$ বিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত সংযোজক রেখাংশকে যে বিন্দুদ্বয় $a:b$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করে তাহাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। $(0<b<a)$

$$\left[\text{উঃ } \left(\frac{a^2+b^2}{a+b},\ \frac{a^2+2ab-b^2}{a+b}\right);\ \left(\frac{a^2-2ab-b^2}{a-b},\ \frac{a^2+b^2}{a-b}\right)\right]$$

5. যদি (3, −1), (−4, −3), (1, 5) বিন্দু তিনটি একটি সামান্তরিকের তিনটি শীর্ষ হয় এবং যদি চতুর্থ শীর্ষটি প্রথম পাদতে অবস্থিত হয়, তবে চতুর্থ শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ (8, 7)]

6. $\overline{P_1P_2}$ এর মধ্যবিন্দু P হইলে এবং P ও P_1 এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (8, 17) ও (−5, −3) হইলে P_2 এর স্থানাঙ্ক কত? [উঃ (21, 37)]

7. (2, 5) এবং (8, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দুর ভুজ 6; উহার কোটি কত? [উঃ 3]

8. O মূল বিন্দু এবং P_1 ও P_2 যে কোন বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) হইলে প্রমাণ কর যে

$$\overline{OP_1}.\overline{OP_2}\cos P_1\widehat{O}P_2 = x_1x_2 + y_1y_2.$$

[ইঙ্গিত : $2\triangle OP_1P_2 = r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1) = x_1y_2 - x_2y_1$.]

9. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যখন শীর্ষ বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক হইবে :

(i) $(am_1^2, 2am_1)$, $(am_2^2, 2am_2)$ এবং $(am_3^2, 2am_3)$.

(ii) $(a\cos\phi_1, b\sin\phi_1)$, $(a\cos\phi_2, b\sin\phi_2)$ এবং $(a\cos\phi_3, b\sin\phi_3)$.

[উঃ (i) $a^2(m_1-m_2)(m_2-m_3)(m_3-m_1)$

(ii) $2ab\sin\frac{\phi_2-\phi_3}{2}\sin\frac{\phi_3-\phi_1}{2}\sin\frac{\phi_1-\phi_2}{2}$]

10. একটি সামান্তরিকের তিনটি শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(2, 1)$, $(4, -5)$, $(4, 2)$; সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল ও চতুর্থ শীর্ষটিও নির্ণয় কর। [উঃ 14; (6, −4)]

[C]

[প্রাথমিক জ্যামিতিতে প্রয়োগসমূহ]

সাধারণ মন্তব্য : 1. নৈপুণ্য সহকারে স্থানাঙ্ক অক্ষ নির্বাচন কর, যাহাতে দীর্ঘ হিসাবকার্য পরিহার করা যায়।

2. প্রাথমিক জ্যামিতিতে চিত্রগুলির ধর্মসমূহের সহায়তায় প্রমাণ কার্য সমাধা করা হয়, কিন্তু বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতিতে সংশ্লিষ্ট স্থানাঙ্কগুলি লইয়া বীজগাণিতীয় কার্যাবলীর মধ্য দিয়া প্রমাণ কার্যটি সম্পন্ন করা হয় : **এক্ষেত্রে প্রশ্নটির প্রকৃতি স্মরণে রাখিতে সাহায্য করা ভিন্ন চিত্রের আর কোনও রূপ আবশ্যকতা নাই।**

বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতির পদ্ধতি প্রয়োগ দ্বারা প্রমাণ কর যে :

1. চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির মধ্যবিন্দুসমূহের সংযোজক রেখাদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

2. সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

3. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দুটি শীর্ষত্রয় হইতে সমদূরবর্তী।

4. ত্রিভুজের দুইটি মধ্যমা সমান হইলে দেখাও যে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

5. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের দুইটি মধ্যমা সমান।

6. কোন আয়তক্ষেত্রের দুইটি বিপরীত শীর্ষ হইতে আয়তক্ষেত্রটির সমতলে অবস্থিত কোন বিন্দুর দূরত্বের বর্গের সমষ্টি, অপর দুই শীর্ষ হইতে বিন্দুটির দূরত্বের বর্গের সমষ্টির সমান।

7. যে কোন ত্রিভুজ ABCর ক্ষেত্রে

$AB^2+AC^2=2(AD^2+DC^2)$, যেখানে D হইল BCর মধ্যবিন্দু।

[ইংগিত : B কে মূলবিন্দু, BC কে x-অক্ষ এবং BCর উপর লম্বরেখা (অবশ্যই B গামী) কে y-অক্ষ ধর। যদি $BC=a$ হয়, তবে A : (x, y), B : $(0, 0)$ এবং C : $(a, 0)$; আবার D : $(a/2, 0)$.]

8. যদি ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G এবং P, ত্রিভুজটির তলে অপর যে কোন একটি বিন্দু হয়, তবে

$$3(GA^2+GB^2+GC^2)=BC^2+CA^2+AB^2$$

এবং $PA^2+PB^2+PC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3GP^2$.

9. চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশদ্বয় এবং উহার কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ সমবিন্দু এবং রেখাংশ তিনটি পরস্পর পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

10. ত্রিভুজের দুইটি বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর অর্ধেক।

11. যদি P বিন্দু $\overline{P_1P_2}$ রেখাংশকে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে এবং যদি Q বিন্দু P_1 ও P_2 এর সংযোজক রেখার উপর অবস্থিত না হয়, তবে

$$\frac{\triangle QPP_1 \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\triangle QPP_2 \text{ এর ক্ষেত্রফল}}=\frac{m}{n}.$$

[D]

1. A : (3, 0), B : (0, 6) এবং C : (6, 9) ত্রিভুজ ABC উৎপন্ন করে। একটি রেখা $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$ কে যথাক্রমে D এবং E তে এইরূপভাবে ছেদ করে যে D বিন্দু $\overline{AB}$ কে 1 : 2 অনুপাতে এবং E বিন্দুও $\overline{AC}$ কে একই অনুপাতে বিভক্ত করে। প্রমাণ কর যে

$$\frac{\triangle ABC \text{ এর ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান}}{\triangle ADE \text{ এর ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান}}=\frac{9}{1}$$

2. দুইটি পদ্ধতিতে দেখাও যে (1, 5), (3, 14) এবং (−1, −4) বিন্দুত্রয় সমরেখ।

3. A : $(6, 3)$, B : $(-3, 5)$, C : $(4, -2)$ এবং P : (a, b) বিন্দু চারিটি একটি সমতলে অবস্থিত। প্রমাণ কর যে ত্রিভুজ PBC এবং ABC এর ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান দুইটি $(a+b-2) : 7$ অনুপাতে আছে।

4. A : $(b \cos \alpha, b \sin \alpha)$ এবং B : $(a \cos \beta, a \sin \beta)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে AB বরাবর কোন বিন্দু C(x, y) পর্যন্ত এইরূপে বর্ধিত করা হইল যেন $\overline{AC} : \overline{CB} = b : -a$ হয় $(a, b > 0)$; প্রমাণ কর যে

$$y + x \cot \frac{\alpha+\beta}{2} = 0.$$

5. প্রমাণ কর যে যদি ত্রিভুজের শীর্ষের স্থানাঙ্কগুলি যুগ্ম সংখ্যা হয়, তবে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফলের মানও একটি যুগ্ম সংখ্যা হইবে। প্রতিপাদ্যটি কি যে কোনও বহুভুজের ক্ষেত্রে সত্য? প্রতিপাদ্যটি কি বিপরীতক্রমেও সত্য?

6. প্রমাণ কর যে এইরূপ সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করা অসম্ভব, যাহার শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্কগুলি সকলেই মূলদ সংখ্যা হইবে।

3

রেখার নতি বা প্রবণতা
(SLOPE OF A LINE)

3·1. সূচনা

কলন (Calculus) এবং বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতি (Analytic Geometry) উভয় বিষয়েই **নতি** (slope) বা **প্রবণতা** (gradient) সম্পর্কে ধারণা অত্যন্ত প্রয়োজনীয়। বর্তমান অধ্যায়ে সরলরেখার নতির ধারণার সহিত ছাত্রছাত্রীদের পরিচিত করা হইবে। এই পুস্তকের শেষ অধ্যায়গুলিতে এবং কলন গ্রন্থেও এই ধারণার বিস্তৃতি ঘটাইয়া বক্ররেখার কোন এক বিশেষ বিন্দুতে বক্ররেখার নতির সংজ্ঞা দেওয়া হইবে। বাস্তবিক পক্ষে ইহা অন্তর কলনের (Differential calculusএর) একটি মুখ্য প্রশ্ন (লেখকদ্বয়ের কলন গ্রন্থ (Calculus) দ্রষ্টব্য)।

3.2. কোন রেখার নতি কোণ এবং ইহার নতি বা প্রবণতা (The angle of inclination of a line and its slope)

ধরিয়া লওয়া হইল যে **একটি রেখা হইতে** অপর একটি **রেখা পর্য্যন্ত** ঘূর্ণনের সাহায্যে কোণ পরিমাপের প্রয়োগকৌশলের সহিত ছাত্রছাত্রীদের পরিচয় হইয়াছে (সমতল ত্রিকোণমিতি—অনুচ্ছেদ 1·2 দ্রষ্টব্য)। বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতিতে x এর ধনাত্মক অক্ষ **হইতে** y এর ধনাত্মক অক্ষের **অভিমুখে** ঘূর্ণনের অভিমুখকে **ধনাত্মক** অভিমুখ ধরা হইবে। নিম্নে সংজ্ঞা দেওয়া হইল :

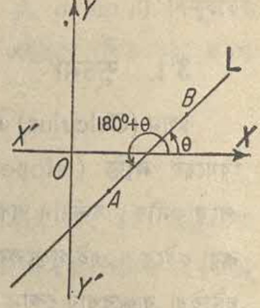
1. কোন সরলরেখার **নতি কোণ** (বা **নতি**) হইল, ধনাত্মক x-অক্ষ হইতে রেখাটির অভিমুখে ঐ রেখা পর্যন্ত ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ। বিশেষ সংজ্ঞা অনুসারে x-অক্ষের সমান্তরাল রেখার নতি ধরা হইবে 0°.

2. **y-অক্ষের সহিত সমান্তরাল নহে** এইরূপ কোন সরলরেখার **নতি** বা **প্রবণতা** (slope or gradient) হইল, রেখাটি ধনাত্মক x-অক্ষের সহিত যে কোণ θ উৎপন্ন করে তাহার ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেন্ট। প্রবণতাকে সাধারণত m দ্বারা নির্দেশ করা হয়, যথা :

$$m = \tan\theta$$

চিত্র 3.1-হইতে ইহা স্পষ্ট যে L রেখার **নতি কোণ** হিসাবে দুইটি কোণ, যথা এবং $180^\circ + \theta$এর মধ্যে যে কোন একটিকে লওয়া যায়। কিন্তু যখন L এর প্রবণতা

বিবেচ্য, দেখা যায় উহা অপরিবর্তিত থাকে, তা নতি কোণ হিসাবে θকেই লওয়া হউক আর $180^\circ+\theta$ কেই লওয়া হউক, কারণ $\tan\theta=\tan(180^\circ+\theta)$; অর্থাৎ, রেখার প্রবণতা **দিক-নির্দেশিত নহে এমন (undirected)** রেখার সহিত সম্পর্কযুক্ত। $\overrightarrow{AB}$র প্রবণতা এবং $\overrightarrow{BA}$ র প্রবণতা অভিন্ন।

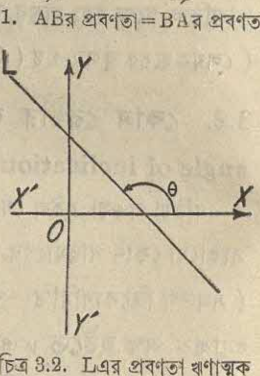


চিত্র 3.1. $\overrightarrow{AB}$র প্রবণতা = $\overrightarrow{BA}$র প্রবণতা

আরও বলা যাইতেছে যে

(i) x-অক্ষের সমান্তরাল রেখার প্রবণতা শূন্য ($\because \tan 0^\circ=0$).

(ii) y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার প্রবণতা সংজ্ঞাত (defined) নহে ; ইহার নতি কোণ অবশ্য 90° ; $\tan 90^\circ$ **অসংজ্ঞাত (undefined)** **(**ভবিষ্যতে y-অক্ষের সমান্তরাল রেখাগুলিকে প্রবণতা বিষয়ে সকল প্রকার আলোচনার বাহিরে রাখা হইবে)।



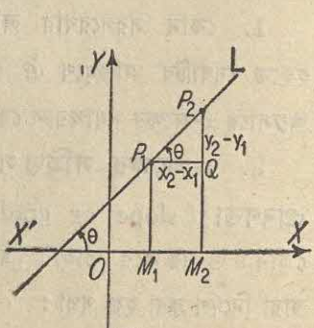
চিত্র 3.2. Lএর প্রবণতা ঋণাত্মক

(iii) নতিকোণ সূক্ষ্ম হইলে রেখাটির প্রবণতা ধনাত্মক হয় (চিত্র 3.1) ; যদি নতিকোণ স্থূলকোণ হয় তবে প্রবণতা ঋণাত্মক হইবে (চিত্র 3.2)।

3·3. কোন রেখার দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক জানা থাকিলে রেখাটির প্রবণতা

প্রদত্ত : একটি রেখা L, যাহার নতিকোণ θ (চিত্র 3.3) ; সংজ্ঞা অনুসারে,

Lএর প্রবণতা $=\tan\theta=m$. মনে করা যাক, Lএর উপর অবস্থিত **যে কোন দিক্-নির্দেশিত রেখাংশ** $\overline{P_1P_2}$.



চিত্র 3.3. রেখার প্রবণতা = ইহার উপর অবস্থিত অংশের প্রবণতা

ধরা যাক্ P_1 এবং P_2 এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2)। ত্রিভুজ P_1QP_2 (চিত্র 3.3) হইতে,

$$m = \tan\theta = \frac{\overline{QP_2}}{\overline{P_1Q}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

যদি $\overline{P_1P_2}$ এর পরিবর্তে $\overline{P_2P_1}$ লওয়া হইত, তাহা হইলে m এর মান হইত :

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2};$$

কিন্তু এই মান এবং (1) নির্দেশিত মান সমান। সুতরাং রেখাটি কোন এক অভিমুখে অথবা উহার বিপরীত অভিমুখে যেদিকেই নির্দেশিত হউক না কেন, m এর মান অপরিবর্তিত থাকে। এইজন্য দিক-নিরপেক্ষভাবে রেখার প্রবণতা হিসাবে mকে ধরা হয়।

সিদ্ধান্ত। L এর দুইটি বিন্দু জানা থাকিলেই L এর প্রবণতা জানা যায় এবং L এর প্রবণতা

$$= \frac{\text{বিন্দু দুইটির } y\text{-স্থানাঙ্কদ্বয়ের অন্তর}}{\text{বিন্দু দুইটির } x\text{-স্থানাঙ্কদ্বয়ের অন্তর}}.$$

ইহা হইতে নিম্নলিখিত তথ্যটি সহজেই পাওয়া যায়, যথা :

তিনটি বিন্দু A, B, C সমরেখ হইবে, যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\overline{AB}$র প্রবণতা $=\overline{AC}$র প্রবণতা।

3·4. সমান্তরাল এবং লম্ব রেখাসমূহ

1. **যদি দুইটি রেখা সমান্তরাল হয়, তবে তাহাদের একই প্রবণতা হইবে এবং বিপরীতক্রমে, যদি দুই রেখার একই প্রবণতা হয়, তবে তাহারা সমান্তরাল।**

ধরা যাক্, রেখা দুইটি ধনাত্মক x-অক্ষের সহিত θ_1 এবং θ_2 নতি কোণ উৎপন্ন করে। যদি রেখা দুইটি সমান্তরাল হয়, তবে $\theta_1 = \theta_2$, সুতরাং

$$\tan\theta_1 = \tan\theta_2, \text{ অর্থাৎ, } m_1 = m_2.$$

বিপরীতক্রমে, যদি $m_1 = m_2$ হয়, তবে $\tan\theta_1 = \tan\theta_2$ বা, $\theta_1 = \theta_2$ এবং রেখা দুইটি সমান্তরাল।

2. **প্রদত্ত :** দুইটি পরস্পর লম্ব রেখা L_1, L_2, যাহাদের প্রবণতাদ্বয় যথাক্রমে $m_1 = \tan\alpha_1$ এবং $m_2 = \tan\alpha_2$; ধরা যাক্ L_1 ধনাত্মক প্রবণতার রেখা নির্দেশ করে (চিত্র 3.4)। তাহা হইলে চিত্র হইতে ইহা সুস্পষ্ট যে

$$\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1$$

$$\therefore \tan\alpha_2 = \tan(90^\circ + \alpha_1) = -\cot\alpha_1,$$

সুতরাং $\tan \alpha_2 \tan \alpha_1 = -1$

বা, $m_1 m_2 = -1$.

বিপরীতক্রমে, যদি $m_1 m_2 = -1$ হয়, তবে

$\tan \alpha_1 \tan \alpha_2 + 1 = 0$

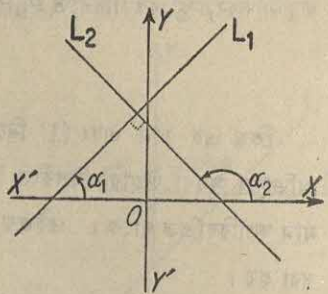
বা, $\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 = 0$

বা, $\cos(\alpha_2 \sim \alpha_1) = 0$

অর্থাৎ, $\alpha_2 \sim \alpha_1 = 90°$

অর্থাৎ, রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব।

সুতরাং নিম্নলিখিত প্রতিপাদ্যটি পাওয়া যায়:



চিত্র 3.4. লম্ব রেখাদ্বয়: $m_1 m_2 = -1$.

প্রতিপাদ্য। যদি দুইটি রেখা পরস্পর লম্ব হয়, তবে উহাদের একটির প্রবণতা অপরটির প্রবণতার ঋণাত্মক অন্যোন্যকের সমান, অর্থাৎ, উহাদের প্রবণতা দুইটির গুণফল -1; ইহা বিপরীতক্রমেও সত্য।

উদা. 1. যাচাই কর যে বিন্দুত্রয় $P_1 : (-1, 3)$, $P_2 : (0, 5)$ এবং $P_3 : (3, 1)$ একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

$$\overline{P_1P_2} \text{ এর প্রবণতা} = m_1 = \frac{5-3}{0+1} = 2.$$

$$\overline{P_1P_3} \text{ এর প্রবণতা} = m_2 = \frac{1-3}{3+1} = -\tfrac{1}{2}.$$

$$\therefore \quad m_1 m_2 = -1$$

সুতরাং $\overline{P_1P_2} \perp \overline{P_1P_3}$ এবং $\Delta P_1P_3P_2$ সমকোণী ত্রিভুজ, যাহার সমকোণ P_1 বিন্দুতে অবস্থিত। চিত্রটি অঙ্কন কর।

টীকা। দূরত্ব-বিষয়ক-সূত্রের সাহায্যেও ইহা সমাধান করা যায় (অনুচ্ছেদ 2·3)। বিশ্লেষণ জ্যামিতিতে প্রায়ই ছাত্রছাত্রীদের কোন বিশেষ প্রশ্নের সমাধান বিভিন্ন পদ্ধতিতে করিতে বলা হইবে। প্রদত্ত ক্ষেত্রে পদ্ধতিগুলির পারস্পরিক গুণাগুণ তুলনা করিয়া তাহারা শীঘ্রই শ্রেষ্ঠ পদ্ধতিটি নির্বাচন করিতে শিখিবে।

উদা. 2. একটি গতিশীল বিন্দু $P : (x, y)$ সর্বদা $P_1 : (-1, 0)$ এবং $P_2 : (0, -2)$ বিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী অবস্থায় থাকে। এই তথ্যটি x এবং y এর মধ্যে একটি বীজগাণিতীয় সম্পর্কের সাহায্যে প্রকাশ কর।

$\overline{P_1P_2}$ এর মধ্যবিন্দু M (চিত্র 3.5) P এর সকল অবস্থানে $\overline{MP}$, $\overline{P_1P_2}$ এর উপর লম্ব। M এর স্থানাঙ্কদ্বয় হইল $(-\frac{1}{2}, -1)$।

$\overline{MP}$ এর প্রবণতা $= \dfrac{y+1}{x+\frac{1}{2}}$

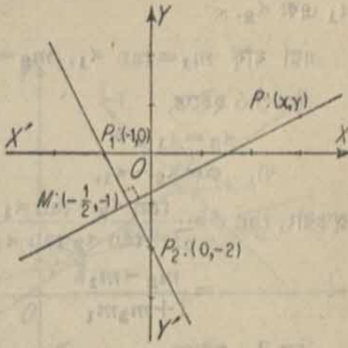
$\overline{P_1P_2}$ এর প্রবণতা $= \dfrac{-2-0}{0+1} = -2$.

যেহেতু $\overline{MP} \perp$, P_1P_2, সুতরাং

$$\frac{+1}{x+\frac{1}{2}} \times (-2) = -1$$

বা, $2x - 4y - 3 = 0$

ইহাই নির্ণেয় বীজগাণিতীয় সম্পর্ক।



চিত্র 3.5

টীকা। এই প্রশ্নটিও দূরত্ব-বিষয়ক সূত্রের (অনুচ্ছেদ 2·3) সাহায্যে সমাধান করা যায়।

উদা. 3. প্রবণতার ধারণার সাহায্যে যাচাই কর যে বিন্দুত্রয়
A : (5, 7), B : (−3, 1) এবং C : (−7, −2) সমরেখ।

$\overline{AB}$র প্রবণতা $= \dfrac{1-7}{-3-5} = \dfrac{3}{4}$

$\overline{AC}$র প্রবণতা $= \dfrac{-2-7}{-7-5} = \dfrac{3}{4}$.

$\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$ রেখাংশ দুইটি একই বিন্দু A গামী এবং উহাদের একই প্রবণতা। সুতরাং রেখাংশদ্বয় একই সরলরেখার উপর অবস্থিত,

অর্থাৎ, A, B, C একই সরলরেখায় অবস্থিত।

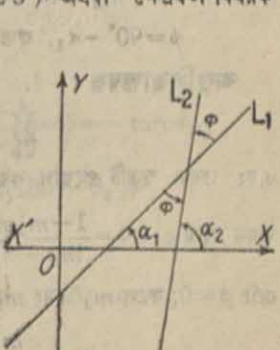
টীকা। প্রশ্নটি দূরত্ব-বিষয়ক-সূত্র (অনুচ্ছেদ 2·3) অথবা ক্ষেত্রফল-বিষয়ক সূত্রের (অনুচ্ছেদ 2·5) সাহায্যেও সমাধান করা যায়।

3·5. প্রবণতা জানা আছে এইরূপ দুইটি রেখার অন্তর্গত কোণ

L_1 রেখা **হইতে** L_2 রেখা পর্যন্ত কোণটি হইল সেই ক্ষুদ্রতম **ধনাত্মক** কোণ যে পরিমাণ কোণ দ্বারা L_1 রেখাকে ধনাত্মক দিকে ঘুরাইতে হয়, যেন উহা L_2র সহিত সম্পূর্ণ মিলিত হইতে পারে। [3.6 এবং 3.7 চিত্রে ϕ কোণ]

ϕ কে এইরূপ লওয়া হয় যেন

$$0^\circ \leq \phi \leq 180^\circ.$$



চিত্র 3.6. L_1 হইতে L_2 পর্যন্ত কোণ

ধরা যাক্ L_1, L_2 রেখাদ্বয়ের ধনাত্মক X-অক্ষের সহিত নতিকোণ যথাক্রমে α_1 এবং α_2.

ধরা যাক্ $m_1 = \tan \alpha_1$, $m_2 = \tan \alpha_2$.

চিত্র 3.6 হইতে,

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \phi$$

বা, $\phi = \alpha_2 - \alpha_1$,

সুতরাং, $\tan \phi = \dfrac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_2 \tan \alpha_1}$

$$= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

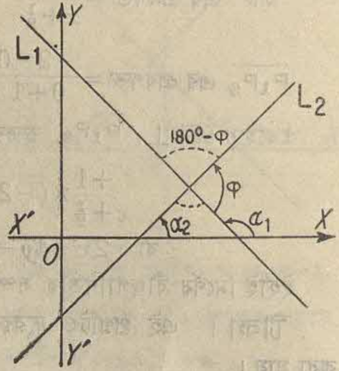
চিত্র 3.7 হইতে,

$$\alpha_1 = 180^\circ - \phi + \alpha_2$$

বা, $\phi = 180^\circ + (\alpha_2 - \alpha_1)$

বা, $\tan \phi = \tan (\alpha_2 - \alpha_1)$

$$= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}, \text{ (পূর্বের মত)}$$



চিত্র 3.7. L_1 হইতে L_2 পর্যন্ত কোণ

সুতরাং এই সূত্র পাওয়া যায় :

m_1 প্রবণতার রেখা **হইতে** m_2 প্রবণতার রেখা **পর্যন্ত** কোণ ϕ হইলে

$$\tan \phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

সূত্রটি প্রয়োগ করা যাইবে না যদি একটি রেখা, ধরা যাক্ L_2, y-অক্ষের সহিত সমান্তরাল হয় (m_2 তখন অসংজ্ঞাত), কিন্তু এইরূপ ক্ষেত্রে

$$\phi = 90^\circ - \alpha_1, \text{ সুতরাং } \tan \phi = \cot \alpha_1 = 1/m_1.$$

অনুসিদ্ধান্তদ্বয় : 1. রেখা দুইটি সমান্তরাল, যদি $m_2 = m_1$ হয়।

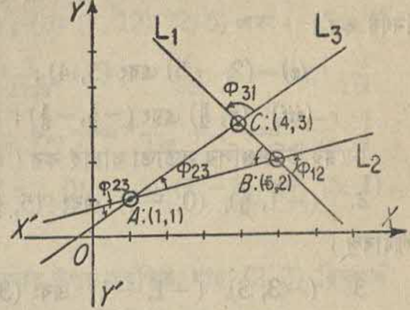
2. রেখা দুইটি যদি সমকোণে অবস্থিত হয়, তবে $\phi = 90^\circ$ এবং তখন সূত্রটি প্রয়োগ করা উচিত নহে ($\because \tan 90^\circ$ সংজ্ঞাত নহে)। সুতরাং তখন সূত্র $\cot \phi = \dfrac{1 + m_1 m_2}{m_2 - m_1}$ বিবেচনা করা হয় এবং যদি $\phi = 90^\circ$ হয়, তবে $\cot \phi = 0$, ফলে m_1 এবং m_2 প্রবণতার রেখা দুইটির পরস্পর লম্ব হওয়ার সর্ত হইবে

$$m_1 m_2 = -1.$$

উদা. 4. A : (1, 1), B : (5, 2) এবং C : (4, 3) শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোণগুলি নির্ণয় কর।

টীকা। এইরূপ সংখ্যাগত প্রশ্নসমূহের ক্ষেত্রে ছাত্রছাত্রীদের চিত্রটি অঙ্কন করিতে বিশেষ পরামর্শ দেওয়া হইল।

ধরা যাক্, L_1, L_2, L_3 (চিত্র 3.8এ প্রদর্শিত) ত্রিভুজ উৎপন্নকারী রেখাগুলি নির্দেশ করে।



চিত্র 3.8. ত্রিভুজের অন্তস্থঃ কোণসমূহ

L_1 এর প্রবণতা = (ধরা যাক্)

$$m_1=\frac{3-2}{4-5}=-1.$$

L_2 এর প্রবণতা =

(ধরা যাক্) $m_2=\dfrac{2-1}{5-1}=\dfrac{1}{4}.$

L_3 এর প্রবণতা =

(ধরা যাক্) $m_3=\dfrac{3-1}{4-1}=\dfrac{2}{3}.$

ধরা যাক্ L_1 **হইতে** L_2 **পর্যন্ত** কোণটি ϕ_{12} (ϕ এক দুই এইরূপ **পড়িতে হইবে**) দ্বারা নির্দেশিত হয়। তাহা হইলে

$$\tan\phi_{12}=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\frac{\frac{1}{4}+1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{5}{3}.$$

অনুরূপভাবে, $\tan\phi_{23}=\dfrac{5}{14}$ এবং $\tan\phi_{31}=-5.$

ত্রিকোণমিতির তালিকার (Natural Tangents দ্রষ্টব্য) সাহায্যে ϕ_{12}, ϕ_{23}, ϕ_{31} এর প্রকৃত মানগুলি নির্ণয় করা যায়।

পরীক্ষা করিয়া দেখ: $\tan(\phi_{12}+\phi_{23})$

$$=\frac{\tan\phi_{12}+\tan\phi_{23}}{1-\tan\phi_{12}\tan\phi_{23}}=\frac{\frac{5}{3}+\frac{5}{14}}{1-\frac{25}{42}}=5=-\tan\phi_{31}$$

$$=\tan(180^\circ-\phi_{31})$$

$$\therefore\ \phi_{12}+\phi_{23}+\phi_{31}=180^\circ.$$

উদা. 5. অনুরূপ পদ্ধতিতে A : $(-3, -2)$, B : $(2, 5)$ এবং C : $(4, 2)$ শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোণগুলি নিরূপণ কর।

[উঃ $A=24^\circ43'\cdot1$, $B=69^\circ13'\cdot6$, $C=86^\circ3'\cdot3$; ফলে $A+B+C=180^\circ$. (ত্রিকোণমিতির তালিকার সাহায্য লও)]

প্রশ্নমালা

(তৃতীয় অধ্যায়ের উপর)

1. যে রেখাগুলি নিম্নোক্ত বিন্দু-যুগলগুলি যুক্ত করে তাহাদের প্রবণতা নির্ণয় কর :

(*i*) $(2, -5)$ এবং $(5, 4)$; (*ii*) $(-2, -7)$ এবং $(-3, -1)$;
(*iii*) $(\frac{2}{3}, \frac{5}{2})$ এবং $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$; (*iv*) $(-\frac{5}{4}, \frac{4}{3})$ এবং $(\frac{3}{4}, \frac{3}{5})$.

নিম্নের উক্তিগুলির সত্যতা যাচাই কর (প্রশ্ন 2—7) :

2. $(-1, \frac{1}{2})$, $(0, -\frac{5}{2})$ এবং $(5, \frac{5}{2})$ বিন্দুগুলি একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

3. $(-3, 3)$. $(-1, -1)$ এবং $(3, -3)$ বিন্দুগুলি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

4. $(-5, 1)$, $(0, -7)$, $(18, 9)$, $(13, 15)$ বিন্দুগুলি হইল একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু।

5. যে বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু দুইটি $(7, 2)$ এবং $(-3, 2)$ তাহা $(-1, 6)$ বিন্দু দিয়াও গমন করে।

6. $(-3, 1)$ এবং $(13, 3)$ এর সংযোজক রেখাংশের লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক $(7, -14)$ বিন্দু দিয়া গমন করে।

7. $(-4, 0)$, $(6, 3)$ এবং $(36, 12)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ।

8. দেখাও যে $(10, 10)$, $(-14, -2)$, $(-10, -10)$ এবং $(4, -24)$ শীর্ষবিশিষ্ট চতুর্ভুজটিকে দুইটি সমকোণী ত্রিভুজে বিভক্ত করা যায়। প্রমাণ কর যে ইহার ক্ষেত্রফল 400 বর্গএকক।

নিম্নলিখিত তথ্যগুলিকে বীজগাণিতীয় সমীকরণের আকারে প্রকাশ কর (প্রঃ 9 এবং প্রঃ 10) : (প্রবণতার ধারণার সাহায্য লও)

9. (x, y) বিন্দুটি $(5, -2)$ এবং $(-3, 4)$ হইতে সমদূরবর্তী।

[উঃ $4x-3y-1=0$.]

10. (x, y) বিন্দুটি একটি বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত, যাহার একটি ব্যাস হইল $(-3, 6)$ হইতে $(2, 5)$ অভিমুখে **নির্দেশিত** এবং ঐ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ। [উঃ $x^2+y^2+x-11y+24=0$.]

11. একটি রেখা L_1 $(-5, -3)$ এবং $(2, 6)$ বিন্দুগামী এবং অপর একটি রেখা L_2 $(6, 4)$ এবং $(8, 2)$ বিন্দুগামী। যদি L_1 হইতে L_2 পর্যন্ত কোণটি ϕ হয় তবে প্রমাণ কর যে $\tan \phi = 8$.

12. 11নং প্রশ্নের অনুরূপ প্রশ্ন যেখানে L_1 (1, 9) এবং (2, 6) বিন্দুগামী ; L_2 (3, 3) এবং (−1, 5) বিন্দুগামী। প্রমাণ করিতে হইবে $\phi = \pi/4$.

13. যে ত্রিভুজের শীর্ষগুলি নিম্নোক্ত বিন্দুসমূহ, তাহার অন্তঃকোণগুলি নির্ণয় কর : (*i*) (−10, −8), (11, 6) এবং (37,23) ; (*ii*) (7, 12), (2, 5) এবং (−5, −5).

[উঃ (*i*) $\phi_{12} = \tan^{-1}\frac{7}{1749}$, $\phi_{23} = \tan^{-1}\frac{1}{208}$, $\phi_{31} = \tan^{-1}\frac{-1}{112}$

(*ii*) $\phi_{21} = \tan^{-1}\frac{1}{254}$, $\phi_{32} = \tan^{-1}\frac{1}{179}$, $\phi_{13} = \tan^{-1}\frac{-1}{105}$.]

14. A, B, C, D বিন্দুগুলি যথাক্রমে (−2, 0), (4, 3), (1, −1) এবং (5, 1) ; প্রমাণ কর যে $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

15. বিন্দু P : (x, y) এইরূপ একটি রেখার উপর অবস্থিত, যাহা (2, 3) বিন্দুগামী এবং (−1, 2) ও (−5, 4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার উপর লম্ব ; দেখাও যে

$$2x - y - 1 = 0.$$

অঙ্কনসংক্রান্ত প্রশ্ন

16. বর্গাঙ্কিত ছক কাগজ লইয়া উহাতে রুলারের (ruler) সাহায্যে (−2, 3) বিন্দু দিয়া এরূপ একটি রেখা অঙ্কন কর যাহার প্রবণতা = −4 হইবে।

17. প্রশ্ন 16 এর অনুরূপ প্রশ্ন : রেখাটি (1, −2) বিন্দুগামী এবং উহার প্রবণতা = 3 হইবে।

4

সঞ্চারপথ (LOCUS) :
সঞ্চারপথের সমীকরণ (EQUATION TO A LOCUS)

4·1. সূচনা

সঞ্চারপথের ধারণা **বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতির** সর্বাপেক্ষা মৌলিক ধারণাগুলির অন্যতম : কোন সমতলে অবস্থিত একটি বিন্দু যদি ঐ সমতলে এইরূপভাবে গতিশীল থাকে যে উহা সর্বদা এক বা একাধিক বিশেষভাবে উল্লিখিত জ্যামিতিক শর্ত পূরণ করিয়া চলে, তবে যে পথে উহা সঞ্চার বা বিচরণ করে তাহাকে উহার **সঞ্চারপথ** (**locus**) বলা হয়। বিশ্লেষণ জ্যামিতিতে এই জ্যামিতিক শর্তটিকে সঞ্চার পথটির যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্কদ্বয় (x, y) এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়—ইহাই **সঞ্চারপথটির সমীকরণ** (**equation to the locus**) উৎপন্ন করে। x এবং y কে তখন পথটির **সাধারণ স্থানাঙ্ক** (**Current co-ordinates**) বলা হয়। সঞ্চারপথটির যে কোন বিন্দু এই বীজগাণিতীয় সমীকরণকে অবশ্যই সিদ্ধ করিবে, কিন্তু সঞ্চারপথটির বাহিরে অবস্থিত কোন বিন্দু ইহাকে সিদ্ধ করে না। সঞ্চারপথের সমীকরণ কিরূপে পাওয়া যাইতে পারে তাহা এই অধ্যায়ে এখন আলোচনা করা হইবে।

4·2. সঞ্চার পথের সমীকরণ

প্রদত্ত : একটি জ্যামিতিক সর্ত যাহার অধীনে একটি বিন্দু একটি সমতলে গতিশীল বলিয়া ধরা হইল। গতিশীল বিন্দুটির সমুদয় অবস্থানের সমাবেশ (assemblage) বিন্দুটির **সঞ্চারপথ** গঠন করে।

ধরা যাক্, গতিশীল বিন্দুটির একটি অবস্থান হইল P বিন্দু। এক প্রস্থ নির্দিষ্ট অক্ষ লওয়া হইলে সেই অনুসারে P এর স্থানাঙ্ক, ধরা যাক, (x, y)। যে জ্যামিতিক শর্তাধীনে P গতিশীল, তাহার সাহায্যে x এবং y কে অন্তর্ভুক্ত করিয়া একটি বীজগাণিতীয় সম্বন্ধ পাওয়া যাইতে পারে। এই সম্বন্ধ **সঞ্চারপথটির সমীকরণ** প্রদান করে : x এবং y **সাধারণ স্থানাঙ্ক** বলিয়া পরিচিত। সঞ্চারপথটির উপর যে কোন বিন্দু সম্বন্ধটি বজায় রাখে, কিন্তু যে বিন্দু সঞ্চারপথটির উপর অবস্থিত নহে, তাহা উহা বজায় রাখে না। দৃষ্টান্তস্বরূপ নিচের প্রশ্নটি বিবেচনা করা যাক্।

উদা. : কোন বিন্দু একটি সমতলে এইরূপে সঞ্চার করে যে উহা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু A : (3, 2) এবং B : (−1, 5) হইতে সর্বদা সমদূরবর্তী থাকে। গতিশীল বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

1. গতিশীল বিন্দুটির যে কোন একটি অবস্থান P বিবেচনা করা হইবে এবং ইহার স্থানাঙ্ক, ধরা লইল, (x, y).

2. এখানে জ্যামিতিক শর্তটি হইল : $|\overline{PA}| = |\overline{PB}|$.

3. স্থানাঙ্কসমূহের মাধ্যমে শর্তটি দাঁড়ায়

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2}$$

ইহাকে সরল করিয়া পাওয়া যায় : $8x-6y+13=0$ ··· ··· **(1)**

সঞ্চারপথটির উপর যে কোন বিন্দু সমীকরণ **(1)** কে সিদ্ধ করে, কিন্তু যে বিন্দু সঞ্চারপথটির উপর নাই তাহা ইহাকে সিদ্ধ করিতে পারে না। সুতরাং সমীকরণ **(1)** হইল সঞ্চারপথটির নির্ণেয় সমীকরণ। পরবর্তী অধ্যায়ে দেখা যাইবে যে এই সঞ্চারপথটি একটি **সরলরেখা**।

প্রশ্নমালা

কোন বিন্দু P : (x, y) নিম্নে বর্ণিত শর্ত অনুসারে (প্রশ্ন 1—8) সঞ্চারণ করে। প্রতিক্ষেত্রে সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর :

1. $(-4, -4)$ এবং $(2, 8)$ হইতে সমদূরবর্তী।

2. $(4, 0)$ হইতে P এর দূরত্ব $(9, 0)$ হইতে উহার দূরত্বের দুই-তৃতীয়াংশ।

3. $(-3, 0)$ হইতে P সর্বদা 2 একক দূরে থাকে।

4. $(0, 5)$ হইতে P এর দূরত্ব x-অক্ষ হইতে উহার দূরত্বের দুই-তৃতীয়াংশ।

5. $(3, 2)$ হইতে P এর দূরত্ব y-অক্ষ হইতে উহার দূরত্বের দ্বিগুণ।

6. $(0, a)$ এবং $(0, -a)$ হইতে P এর দূরত্বদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি $6a^2$.

7. $(4, 0)$ এবং $(-4, 0)$ হইতে P এর দূরত্বদ্বয়ের সমষ্টি 10.

8. $(2, 0)$ এবং $(-2, 0)$ হইতে P এর দূরত্বদ্বয়ের অন্তর 2.

প্রশ্ন 9—11 এর ক্ষেত্রে A ; $(a, 0)$ এবং B : $(-a, 0)$ দুইটি স্থির বিন্দু; গতিশীল বিন্দু P এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর, যখন

9. $PA^2 - PB^2 = 2k^2$ (k একটি ধ্রুবক রাশি).

10. $PA = n.\ PB$ (n একটি ধ্রুবক).

11. $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$, যেথানে C হইল $(c, 0)$ বিন্দু।

12. একটি স্থির সরলরেখা হইতে একটি স্থির বিন্দুর লম্ব-দূরত্ব k এবং একটি বিন্দু এইভাবে গতিশীল আছে যে স্থির বিন্দুটি হইতে উহার দূরত্ব, স্থির সরলরেখাটি হইতে উহার দূরত্বের সহিত সমান। প্রমাণ কর যে গতিশীল বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ $x^2+2ky=k^2$ ভাবে লেখা যায়।

সঙ্কেত : স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়কে স্থির বিন্দুগামী কর এবং উহাদের একটিকে প্রদত্ত রেখার সহিত সমান্তরাল এবং অপরটিকে উহার উপর লম্বভাবে লও।

13. দুইটি বিন্দু O : (0, 0) এবং A : (3, 4) প্রদত্ত আছে। যদি △OAB এর ক্ষেত্রফল 7 বর্গ একক হয়, যেখানে শীর্ষগুলিকে এই ক্রমে লওয়া হইয়াছে, তবে Bএর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

14. P একটি চল বিন্দু $(t+3,\ 2t-1)$, যেখানে t এর যে কোন মান হইতে পারে। P এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সঙ্কেত : লিখ $x=t+3$, $y=2t-1$; t অপনয়ন কর, তাহা হইলেই x এবং y এর মাধ্যমে সঞ্চারপথটির সমীকরণ পাইবে।

15. P একটি চল বিন্দু $(at^2, 2at)$, যেখানে t এর যে কোন মান হইতে পারে ; দেখাও যে P এর সঞ্চারপথের সমীকরণ $y^2=4ax$.

16. P একটি গতিশীল বিন্দু $(a\cos\theta, b\sin\theta)$, যেখানে θ যে কোন মান গ্রহণ করিতে পারে ; দেখাও যে P এর সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

17. প্রশ্ন নং 15 অথবা 16 'র অনুরূপ প্রশ্ন : ধর P : $\left(t+\frac{1}{t},\ t-\frac{1}{t}\right)$, যেখানে t এর যে কোন মান হইতে পারে ; প্রমাণ কর যে P এর সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল

$$x^2-y^2=4.$$

উত্তরমালা

1. $x+2y=3$, **2.** $x^2+y^2=36$. **3.** $x^2+y^2+6x+5=0$, **4.** $9x^2+5y^2-90y+225=0$. **5.** $3x^2-y^2+6x+4y-13=0$ **6.** $x^2+y^2=2a^2$, **7.** $9x^2+25y^2=225$. **8.** $x^2-3y^2=3$. **9.** $2ax+k^2=0$, **10.** $(n^2-1)(x^2+y^2+a^2)+2ax(n^2+1)=0$ **11.** $(6a-2c)x=a^2-c^2$ **13.** $4x-3y+14=0$ **14.** $2x-y-7=0$.

5

সরলরেখা ঃ বিভিন্ন আকারে ইহার সমীকরণ

(THE STRAIGHT LINE : ITS EQUATIONS IN DIFFERENT FORMS)

5·1. সূচনা

এই অধ্যায়ের প্রধান উদ্দেশ্য, সরলরেখার সমীকরণকে বিভিন্ন আকারে বিধিবদ্ধ করা। ইহা প্রমাণিত হইবে যে, যে কোন সরলরেখাকে দুইটি চলরাশি x এবং y এর একঘাত সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। বিপরীতক্রমে, এইরূপ যে কোন সমীকরণ একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে। এইজন্য এইরূপ সমীকরণকে **সরল (linear) সমীকরণ** বলা হয়।

5·2. স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল রেখা

1. কোন সরলরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল হইলে ইহার সমীকরণের আকার হইবে : $x=k$, যেখানে k হইল y অক্ষ হইতে রেখাটির **দিক-নির্দেশিত (directed) দূরত্ব**।

বিপরীতক্রমে, এই আকারের যে কোন সমীকরণ y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখাকে প্রকাশ করে।

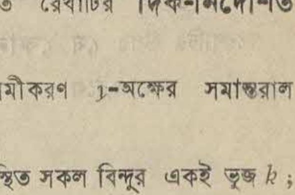
ইহার কারণ, y-অক্ষের সমান্তরাল রেখাটির উপরিস্থিত সকল বিন্দুর একই ভুজ k ; সুতরাং রেখাটির উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু $P(x, y)$ এর ক্ষেত্রে $x=k$.

বিপরীতক্রমে, এইরূপ যে কোন সমীকরণ কেবল সেই বিন্দুগুলিকে নির্দেশ করে যাহারা y-অক্ষ হইতে দিক-নির্দেশিত k দূরত্বে অবস্থিত ; এই বিন্দুগুলি যে সঞ্চারপথ গঠিত করে তাহা y-অক্ষের সমান্তরাল একটি রেখা। অনুরূপভাবে,

2. x-অক্ষের সমান্তরাল এবং উহা হইতে দিক্-নির্দেশিত l দূরত্বে অবস্থিত রেখার সমীকরণ

$$y=l.$$

লক্ষ্য করিতে হইবে যে k বা l দিক-নির্দেশিত দূরত্ব হওয়ায় ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইতে পারে। চিত্র 5.1 এ $x=2$ রেখা (y-অক্ষের সমান্তরাল) এবং $y=-3$ রেখা (x-অক্ষের সমান্তরাল) কে দেখা যাইবে।



চিত্র 5.1

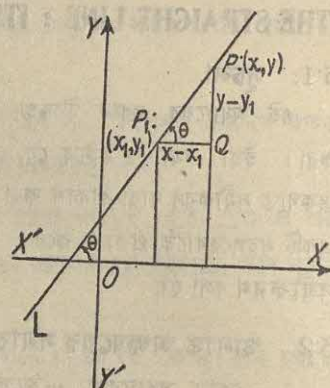
3. $x=0$, $y=0$ হইল যথাক্রমে y-অক্ষ এবং x-অক্ষের সমীকরণ।

5·3. বিন্দু-প্রবণতা আকার (Point-slope form)

I. যে সরলরেখা $P_1 : (x_1, y_1)$ বিন্দু দিয়া যায় এবং যাহার প্রবণতা m, তাহার সমীকরণ হইল

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

টীকা। যদি সরলরেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল হয়, তবে উহার m অসংজ্ঞাত; সুতরাং উহাকে এই আকারের সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা যায় না।



চিত্র 5.2—বিন্দু প্রবণতা আকার

প্রমাণ। ধরা যাক, সরলরেখা L ধনাত্মক x অক্ষের সহিত θ কোণ উৎপন্ন করে। তাহা হইলে ইহার

প্রবণতা $m = \tan\theta$

রেখাটির উপর **যে কোন** বিন্দু P লওয়া হইল এবং ধরা হইল, ইহার স্থানাঙ্কদ্বয় (x, y)। তাহা হইলে

$\overline{P_1P}$ এর প্রবণতা

$$= \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

[চিত্র 5.2 হইতে, $\tan\theta = \frac{\overline{QP}}{P_1Q} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

রেখাটির প্রবণতা = রেখাটির যে কোন অংশের প্রবণতা,

$$\therefore \quad m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

সুতরাং, $y - y_1 = m(x - x_1)$ → রেখাটির সমীকরণের বিন্দু-প্রবণতা আকার

রেখাটির যে কোন বিন্দু P এর পক্ষে এই সম্পর্ক সত্য এবং রেখাটির উপর অবস্থিত নহে এইরূপ কোন বিন্দুর ক্ষেত্রে **সত্য নহে**।

সুতরাং ইহাই রেখাটির সমীকরণ।

টীকা। (x_1, y_1) গামী এবং x-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ

$$y = y_1 \quad (\because \text{ এখানে } m = 0)$$

উদা. 1. (4, 1) এবং (2, 4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার উপর লম্ব এবং (2, −3) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(4, 1) এবং (2, 4) এর সংযোজক রেখার প্রবণতা $=\dfrac{4-1}{2-4}=\dfrac{-3}{2}$

নির্ণেয় রেখাটি ইহার উপর লম্ব, সুতরাং ইহার প্রবণতা $=\frac{2}{3}$.

∴ রেখাটির [(2, −3) বিন্দুগামী এবং প্রবণতা = 2/3] নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$y+3=\tfrac{2}{3}(x-2)$$

বা, $3y-2x+13=0.$

উদা. 2. যে রেখা (4, −8) বিন্দুগামী এবং ধনাত্মক x-অক্ষের সহিত 135° কোণে নত, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

এখানে $m=\tan\ 135^\circ=-1$; সুতরাং (4, −8) বিন্দুগামী এবং −1 প্রবণতার রেখাটির সমীকরণ হইল

$$y+8=-1(x-4)$$

বা, $x+y+4=0$

অনুশীলনী। নিম্নলিখিত ক্ষেত্রসমূহে সরলরেখাগুলির সমীকরণগুলি লিখ :

(*i*) ধনাত্মক x-অক্ষের সহিত 60° কোণে নত এবং (5, −2) বিন্দুগামী।

(*ii*) এমন কোণে নত যাহার ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেন্ট হইল 3/4 এবং (2, 6) বিন্দুগামী।

(*iii*) যখন প্রবণতা −4/5 এবং (−2, 4) বিন্দুগামী।

(*iv*) যখন প্রবণতা m এবং $(0, a\sqrt{1+m^2})$ বিন্দুগামী।

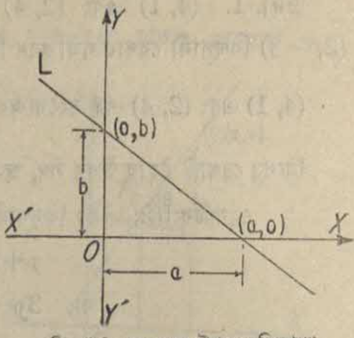
[উত্তর : (*i*) $y-\sqrt{3}x+2+5\sqrt{3}=0$; (*ii*) $4y-3x=18$;
(*iii*) $5y+4x-12=0$ (*iv*) $y=mx+a\sqrt{1+m^2}$.

5·4. প্রবণতা-ছেদিতাংশ আকার (Slope-intercept form)

যদি কোন সরলরেখা y-অক্ষকে কোন $(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে (b ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইতে পারে), তখন **বলা হয় যে রেখাটির y-ছেদিতাংশ হইল b।** সুতরাং কোন রেখার y-ছেদিতাংশটি হইল, মূলবিন্দু হইতে রেখাটি y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই বিন্দু পর্যন্ত **দিক-নির্দেশিত** দূরত্ব। x-ছেদিতাংশের সংজ্ঞাও অনুরূপ, কেবল এক্ষেত্রে 'y-অক্ষে'র স্থলে 'x-অক্ষ' বলিতে হইবে।

চিত্র 5.3 এ L রেখার x-ছেদিতাংশ a এবং y-ছেদিতাংশ b দেখা যাইবে।

II. যে সরলরেখার প্রবণতা m এবং y-ছেদিতাংশ c, তাহার সমীকরণের আকার হইল :



চিত্র 5.3. অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদিতাংশ

$y = mx + c$ →প্রবণতা-ছেদিতাংশ আকার

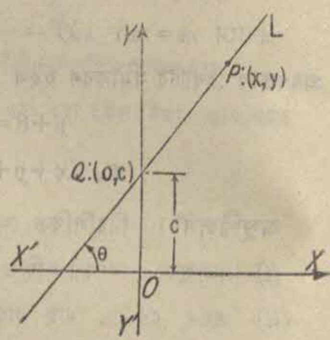
প্রমাণ। ধরা যাক্‌, L রেখা y-অক্ষকে Q (চিত্র 5.4) বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে Q এর স্থানাঙ্কদ্বয় $(0, c)$ কারণ y-ছেদিতাংশ c. রেখাটির উপর যে কোন বিন্দু P : (x, y) লওয়া হইল।

$\overline{QP}$ এর প্রবণতা $= \dfrac{y-c}{x-0}$

কিন্তু রেখাটির প্রবণতা $= m$

$$\therefore \quad m = \frac{y-c}{x}$$

বা, $y = mx + c$;



চিত্র 5.4. প্রবণতা-ছেদিতাংশ আকার

ইহা এমন একটি সম্বন্ধ যাহা রেখাটির উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর পক্ষে সত্য এবং রেখাটির বাহিরে অবস্থিত বিন্দুর পক্ষে সত্য নহে। সুতরাং ইহাই রেখাটির নির্ণেয় সমীকরণ।

টীকা 1. y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার ক্ষেত্রে এই সূত্রের প্রয়োগ করা যাইবে না। (∵ m→সংজ্ঞাত নহে)।

টীকা 2. বিন্দু-প্রবণতা আকার হইতে এই আকারটি সরাসরি পাওয়া যায়, যেমন, এখানে একটি বিন্দু Q : $(0, c)$ এবং প্রবণতা m বলিয়া সমীকরণটি

$$y - c = m(x-0), \quad \text{বা,} \quad y = mx + c.$$

টীকা 3. সমীকরণটিতে দুইটি ধ্রুবক রহিয়াছে, যথা m এবং c ; সুতরাং যদি দুইটি শর্ত প্রদত্ত হয় যাহারা রেখাটিকে সিদ্ধ করে, তবে রেখাটির সমীকরণটি নির্ণয় করা যাইবে। নিম্নে প্রদত্ত উদাহরণগুলি দ্রষ্টব্য ঃ

উদা. 3. (3, 4) এবং (8, −15) বিন্দু দুইটি দিয়া যে রেখা গমন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রথম পদ্ধতি। ধরা যাক, নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$y=mx+c,$$

যেখানে m ও c ধ্রুবক এবং এই বিশেষ ক্ষেত্রে উহাদের মান নির্ণয় করিতে হইবে।

যেহেতু (3, 4) এবং (8, −15) বিন্দুদ্বয় রেখাটির উপর অবস্থিত, সুতরাং

$$4=3m+c$$

$$-15=8m+c,$$

যাহা হইতে, $m=-19/5$ এবং $c=77/5$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$y=-\frac{19}{5}x+\frac{77}{5}$$

বা, $5y+19x=77.$

দ্বিতীয় পদ্ধতি। যেহেতু নির্ণেয় রেখাটির দুইটি বিন্দু হইল (3, 4) এবং (8, −15),

সুতরাং রেখাটির প্রবণতা $=\dfrac{-15-4}{8-3}=-\dfrac{19}{5}.$

যেহেতু রেখাটি (3, 4) বিন্দুগামী, সুতরাং বিন্দু-প্রবণতা আকার হইতে নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$y-4=-\tfrac{19}{5}(x-3)$$

বা, $5y+19x=77.$

তৃতীয় পদ্ধতি। পরবর্তী অনুচ্ছেদে দুইটি প্রদত্ত বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয়ের একটি সূত্র বিধিবদ্ধ করা হইবে। সূত্রটি এই ক্ষেত্রে সরাসরি প্রয়োগ করা যায়।

একটি গুরুত্বপূর্ণ মন্তব্য :

যদি m এবং c দুইটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক হয়, তবে সমীকরণ $y=mx+c$ একটি **বিশেষ রেখাকে** নিরূপিত করে। কিন্তু যদি m একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক (fixed constant) অথচ c একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক (arbitrary constant) হয়, তবে $y=mx+c$ প্রকাশ করে সমান্তরাল রেখাসমূহের একটি সেট্ (a system of parallel lines) কে, যাহাদের একই প্রবণতা m (কেবল c বিভিন্ন রেখার ক্ষেত্রে বিভিন্ন)।

এখন ছাত্রছাত্রীদের নিম্নের প্রশ্নগুলির সঠিক উত্তর দিতে আহ্বান করা যাইতেছে :

প্রঃ নিম্নলিখিত প্রত্যেক ক্ষেত্রে $y = mx + c$ সমীকরণ কি প্রকাশ করে ?

(i) যখন $m = 0$ এবং c একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক ;

(ii) যখন $c(\neq 0)$ একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক, কিন্তু m একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক ;

(iii) যখন $c = 0$ এবং m একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক ;

(iv) যখন $m(\neq 0)$ একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক এবং c ও একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক ;

(v) যখন m এবং c উভয়েই অনির্দিষ্ট ধ্রুবক।

5·5. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী রেখা

III. দুইটি প্রদত্ত বিন্দু A : (x_1, y_1) এবং B : (x_2, y_2) দিয়া যে সরলরেখা গমন করে, তাহার সমীকরণ হইল

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

প্রমাণ : ধরা যাক P : (x, y) রেখাটির যে কোন বিন্দু।

$$\overline{AB} \text{ এর প্রবণতা} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

$$\overline{AP} \text{ এর প্রবণতা} = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

উভয়েই একই রেখার অংশ হওয়ায় এই প্রবণতা দুইটি অবশ্যই সমান ; সুতরাং

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

$$\text{বা,} \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

টীকা। যদি প্রদত্ত বিন্দু দুইটির একই ভুজ হয় $(x_1 = x_2)$, তবে সমীকরণটির এই আকার প্রয়োগ করা যাইবে না, কারণ তখন $x_1 - x_2 = 0$ এবং শূন্য দ্বারা ভাগ অসংজ্ঞাত। লক্ষণীয় যে $x_1 = x_2$ হয়, যখন রেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল। সুতরাং y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণকে উপরে প্রদত্ত আকারে লিখিতে পারা যায় না।

IIIএর আকারের বিকল্প একটি আকার হইল

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$

$$\text{বা,} \quad x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

ছকের (determinant) আকারে প্রকাশ করিলে সমীকরণটি হইবে

IV→
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

এই আকার (IV)কে সহজেই এই তথ্য হইতে নিরূপণ করা যায় যে, বিন্দু (x, y), নির্দিষ্ট বিন্দুদ্বয় (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) এর সহিত শূন্য ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ গঠন করে, যেহেতু বিন্দু তিনটি একই রেখার উপর অবস্থিত।

ইহা কৌতূহলের বিষয় যে **(III)** আকারটিকে যদিও y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয়ে প্রয়োগ করা যায় না, **(IV)** আকারটিকে কিন্তু প্রয়োগ করা যায়, তা রেখাটি যদি y-অক্ষের সমান্তরাল হয় তাহা হইলেও ; কারণ **(IV)** এ $x_1 = x_2$ ধরিয়া সরল করিলে অবশেষে $x = x_1$ পাওয়া যাইবে, যাহা y-অক্ষের সমান্তরাল একটি রেখা।

অনুশীলনী

1. নিম্নের বিন্দুগুলির সংযোজক রেখাসমূহের সমীকরণগুলি লিখ :

(i) (0, 0) এবং (5, −3) ; (ii) (5, −3) এবং (5, 2) ;

(iii) (−5, 2) এবং (3, 2) ; (iv) (−4, 1) এবং (3, −5) ;

(v) $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ এবং $\left(\frac{a}{4m^2}, \frac{a}{m}\right)$; (vi) (a, b) এবং (b, a) ;

(vii) $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ এবং $\left(2\,ct, \frac{c}{2t}\right)$.

2. (−5, 6), (−1, −4) এবং (3, 2) শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের বাহুগুলির (বর্ধিত) সমীকরণ নির্ণয় কর। ত্রিভুজটির মধ্যমাত্রয়ের সমীকরণও নিরূপণ কর।

3. দেখাও যে সমীকরণ
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$
কে x এবং y এর একঘাত সমীকরণরূপে প্রকাশ করা যায়।

[**উঃ** **1.** (i) $3x+5y=0$; (ii) $x=5$; (iii) $y=2$; (iv) $6x+7y+17=0$;

(v) $3y=4mx+\frac{2a}{m}$; (vi) $x+y=a+b$;

(vii) $x+2t^2y=3ct$.

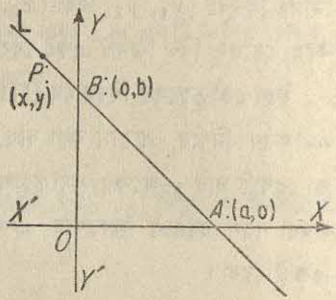
2. $2y+5x+13=0$; $2y-3x+5=0$; $2y+x-7=0$.

$6y-x-9=0$; $6y+7x-1=0$; $x=-1$.]

5·6. ছেদিতাংশ আকার (Intercept form)

V. যে সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদিতাংশ শূন্য নহে অথচ সসীম এবং যাহার x-ছেদিতাংশ ও y-ছেদিতাংশ যথাক্রমে a এবং b, উহার সমীকরণের আকার হইবে :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad (a, b \neq 0)$$



চিত্র 5.5. ছেদিতাংশ আকার

প্রমাণ। ধরা যাক্, L সরলরেখা x-অক্ষকে A : $(a, 0)$ এবং y-অক্ষকে B : $(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে, যাহাতে অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ a এবং b উৎপন্ন হয় (চিত্র 5.5)।

ধরা যাক্, L রেখার উপর P যে কোন বিন্দু এবং P এর স্থানাঙ্ক (x, y)।

$$\overline{AP} \text{ এর প্রবণতা} = \frac{y-0}{x-a}$$

$$\overline{AB} \text{ এর প্রবণতা} = \frac{b-0}{0-a}$$

$\therefore \quad \frac{y}{x-a}=-\frac{b}{a}$, বা, $ay+bx=ab$, যাহাকে ab দ্বারা ভাগ করিয়া পাওয়া যায়

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \longrightarrow \text{ছেদিতাংশ আকার।}$$

টীকা 1. যদি $a=0$ বা, $b=0$ হয়, তবে এই আকারের সাহায্যে রেখার সমীকরণ নির্ণয় করা যাইবে না। রেখাটি যে কোন অক্ষের সমান্তরাল হইলেও ছেদিতাংশ আকার প্রয়োগ করা যাইবে না (a অথবা b তখন অসংজ্ঞাত)

টীকা 2. কিন্তু ছেদিতাংশ আকারে প্রদত্ত রেখাটিকে অঙ্কিত করা সর্বাপেক্ষা সুবিধাজনক ; যেমন $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ রেখাটিকে অঙ্কিত করিতে $(3, 0)$ এবং $(0, 4)$ বিন্দু দুইটি লইয়া উহাদের মধ্য দিয়া রেখাটিকে লইয়া যাইলেই হইল।

উদা. 3. $(4, 3)$ বিন্দুগামী একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের উপর এইরূপ দুইটি ছেদিতাংশ উৎপন্ন করে যাহারা দৈর্ঘ্যে সমান এবং একই চিহ্নযুক্ত। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদিতাংশ দুইটিও নির্ণয় কর।

ধরা যাক্, প্রত্যেক ছেদিতাংশ $=a$ (a ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক)

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ হইল

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1.$$

কিন্তু, (4, 3) বিন্দুটি রেখাটির উপর অবস্থিত,

সুতরাং, $\frac{4}{a}+\frac{3}{a}=1$; বা, $a=7=$ **প্রত্যেক ছেদিতাংশ**

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল

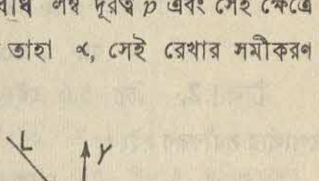
$$x+y=7.$$

5·7. অভিলম্ব বা লম্ব-আকার (Normal form)

VI. যে রেখার মূলবিন্দু **হইতে** রেখাটি **অবধি** লম্ব দূরত্ব p এবং সেই ক্ষেত্রে লম্বটি ধনাত্মক x-অক্ষের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তাহা α, সেই রেখার সমীকরণ নিম্নপ্রকার আকারে প্রকাশ করা যায়, যথা :

$$x \cos \alpha+y \sin \alpha=p.$$

প্রমাণ। চিত্র 5.6 এর প্রতি দৃষ্টি আকর্ষণ করা যাইতেছে। ধরা যাক্, রেখাটি L, যাহার সমীকরণ নির্ণেয়। ধরা যাক্, $\overline{\mathrm{ON}}$ হইল মূলবিন্দু হইতে L রেখা অবধি লম্ব-দূরত্ব। মনে করা হইল, $\overline{\mathrm{ON}}=p$, এবং $\widehat{\mathrm{XON}}=\alpha$; ধরা যাক্, P : (x, y) রেখা L এর উপর যে কোন বিন্দু।



চিত্র 5.6. অভিলম্ব-আকার

লক্ষ্য করা যায় যে N এর পোলার বা মেরু (polar) স্থানাঙ্ক : (p, α), যেখানে পোল বা মেরু (pole) হইল O এবং প্রারম্ভিক রেখা $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$. N এর কার্তেজীয় স্থানাঙ্ক হইল $p \cos \alpha=\overline{\mathrm{OM}}$ এবং $p \sin \alpha=\overline{\mathrm{MN}}$.

স্পষ্টত $\overline{\mathrm{ON}}$ এর প্রবণতা $=\tan \alpha$,

সুতরাং $\overline{\mathrm{ON}}$ এর লম্ব রেখা L এর প্রবণতা

$$=-\frac{1}{\tan \alpha}=-\cot \alpha.$$

এখন বিন্দু-প্রবণতা আকার অনুসারে L রেখার সমীকরণটি হইল

$$y-p \sin \alpha=-\cot \alpha\,(x-p \cos \alpha)$$

$$=-\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}(x-p \cos \alpha)$$

বা, $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = p.$

$\therefore$ $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ → রেখাটির অভিলম্ব বা লম্ব-আকারের সমীকরণ।

রেখাটির উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু P প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে এবং রেখাটির বাহিরে অবস্থিত কোন বিন্দুর পক্ষে ইহা সত্য নহে। সুতরাং ইহাই রেখাটির নির্ণেয় সমীকরণ।

p এর চিহ্ন সম্পর্কে প্রচলিত রীতি :

রেখাটির সকল অবস্থানে p কে **ধনাত্মক** ধরা হইবে।

টীকা 1. ইহা সহজেই নিরূপণ করা যায় যে $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ ছেদিতাংশদ্বয় (চিত্র 5.6) হইল যথাক্রমে $p \sec \alpha$ এবং $p \operatorname{cosec} \alpha$. সুতরাং ছেদিতাংশ-আকারের সাহায্যে L রেখার সমীকরণ হয়

$$\frac{x}{p \sec \alpha} + \frac{y}{p \operatorname{cosec} \alpha} = 1$$

বা, $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.$

টীকা 2. চিত্র 5.6 হইতে ইহা নিরূপণ করা যায় যে L রেখার মেরু বা পোলার সমীকরণ হইবে

$$r \cos (\theta - \alpha) = p,$$

যেখানে যে কোন বিন্দু p এর মেরু বা পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).

টীকা 3. যদি p এবং α জ্ঞাত হয়, তবে সরলরেখাটি সম্পূর্ণ নির্ণীত হয় (সুতরাং উহাকে চিত্রে অঙ্কিত করা যায়)। ধনাত্মক x-অক্ষ হইতে α কোণ পরিমাপ করা হইল যেন $\widehat{XON} = \alpha$. $\overline{ON} = p$ ছিন্ন করিয়া লইয়া এখন N এর মধ্য দিয়া $\overline{ON}$ এর উপর লম্ব রেখা অঙ্কন করিলে নির্ণেয় রেখা পাওয়া যাইবে।

অনুশীলনী

1. নিম্নের প্রতিটি রেখা অঙ্কন কর, যেখানে

(i) $p=5, \alpha=30^\circ$; (ii) $p=4, \alpha=240^\circ$;

(iii) $p=5, \alpha=315^\circ$; (iv) $p=6, \alpha=120^\circ$.

এই রেখাগুলির সমীকরণসমূহ লম্ব-আকারে লিখ।

5·8. x এবং y সংশ্লিষ্ট প্রথম ঘাতের সাধারণ সমীকরণ (The General Equation of first degree in x and y)

x এবং y সংশ্লিষ্ট প্রথম ঘাতের সাধারণ সমীকরণটিকে এই আকারে লেখা যায়, যথা :

$$ax + by + c = 0,$$

যেখানে a, b, c ধ্রুবক এবং **a ও b এর উভয়েই শূন্য নহে।**

প্রতিপাদ্য 1. সমতলস্থ যে কোন রেখার সমীকরণ হইল x এবং y সংশ্লিষ্ট নিম্নলিখিত আকারের প্রথম ঘাতের সমীকরণ, যথা :

$$ax+by+c=0 \text{ (} a, b \text{ এর উভয়েই শূন্য নহে)}$$

প্রমাণ : এক প্রস্ত আয়ত অক্ষ কোন সমতলের উপর স্থাপন করা হইল।

ক্ষেত্র. 1. ধরা যাক্, সমতলটিতে L কোন একটি রেখা, যাহা অক্ষদ্বয়ের কোনটিরই সহিত সমান্তরাল নহে। ইহা জানা আছে যে রেখাটি সম্পূর্ণ নির্ণীত হইবে, যখন রেখাটির উপর অবস্থিত দুইটি বিন্দু, মনে করা যাক্ (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) প্রদত্ত থাকিবে। এইরূপ রেখার সমীকরণ হইল

$$(y-y_1)(x_2-x_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$$

$$\text{বা,}\quad y(x_2-x_1)+x(y_1-y_2)-x_2y_1+x_1y_2=0\,;$$

ইহাকে নিম্নের আকারে লেখা যায় :

$$ax+by+c=0,$$

যেখানে $a=y_1-y_2$, $b=x_2-x_1$ এবং $c=x_1y_2-x_2y_1$.

ক্ষেত্র. 2. ধরা যাক্, L রেখা x-অক্ষের সমান্তরাল। তখন উহার সমীকরণের আকার $y=y_1$: ইহা $ax+by+c=0$ এরই বিশেষ আকার, যেখানে $a=0, b=1$ এবং $c=-y_1$.

ক্ষেত্র. 3. ধরা যাক্, L রেখা y-অক্ষের সমান্তরাল। উহার সমীকরণের আকার তখন $x=x_1$: ইহাও $ax+by+c=0$ এর একটি বিশেষ ক্ষেত্র, যেখানে $a=1$, $b=0$ এবং $c=-x_1$.

x-অক্ষ এবং y-অক্ষ আবার ক্ষেত্র 2 এবং ক্ষেত্র 3 এর যথাক্রমে বিশেষ ক্ষেত্র $(y=0, x=0)$।

সুতরাং কোন সমতলস্থ যে কোন রেখার সমীকরণের আকার হইল

$$ax+by+c=0.$$

এখন বিপরীত প্রতিপাদ্যটি প্রমাণ করা যাক্।

প্রতিপাদ্য 2. x এবং y সংশ্লিষ্ট প্রথম ঘাতের সাধারণ সমীকরণ, যথা :
$ax+by+c=0$ (যেখানে a, b, c ধ্রুবক এবং a, b উভয়েই শূন্য নহে) ··· **(1)**
সর্বদা সমতলস্থ একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে।

প্রমাণ :

ক্ষেত্র. 1. ধরা যাক, $b\neq0$; তাহা হইলে সমীকরণ (1)কে এইভাবে লিখিতে পারা যায় : $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$.

ইহা সরলরেখার প্রবণতা-ছেদিতাংশ আকারের সমীকরণ, যেখানে প্রবণতা হইল $-a/b$ এবং y-ছেদিতাংশ $-c/b$.

যদি $a=0$ হয়, তবে তখন সমীকরণটির আকার হয় $y=-c/b$ অর্থাৎ x-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে।

যদি $a=0$, আবার $c=0$ হয়, তবে সমীকরণটি x-অক্ষকেই প্রকাশ করে।

ক্ষেত্র. 2. ধরা যাক্ $b=0$; সমীকরণ (1)এর হ্রাসপ্রাপ্ত আকার তখন

$$ax+c=0.$$

এখন a শূন্য হইতে পারে না, কারণ তখন a এবং b উভয়েই শূন্য (bকে প্রথমেই শূন্য ধরা হইয়াছে)।

$$\text{সুতরাং}\quad x=-\frac{c}{a}.$$

ইহা y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, যদি $c\neq 0$ হয় ; এবং y-অক্ষই, যদি $c=0$ হয়।

সুতরাং সম্ভাব্য সকল ক্ষেত্রেই, $ax+by+c=0$ (a, b উভয়েই শূন্য নহে) একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে।

টীকা 1. $ax+by+c=0$ এর নাম **রৈখিক সমীকরণ** (linear equation) প্রতিপাদ্য 1 এবং 2 এর লব্ধ ফল, এই সত্যটিকে সমর্থন করে।

টীকা 2. যদি $c=0$, হয়, তবে $ax+by+c=0$ রেখা মূলবিন্দুগামী একটি রেখাকে প্রকাশ করে।

যদি $c\neq 0$ হয়, তবে সমীকরণটিকে এই আকারে প্রকাশ করা যায়, যথা :

$$-\frac{a}{c}x-\frac{b}{c}y=1$$

বা, $lx+my=1$; ইহা মূলবিন্দুগামী নহে এমন একটি সরলরেখা।

$ax+by+c=0$কে বিভিন্ন আকারে প্রকাশ (Reduction of $ax+by+c=0$ into different forms) :

1. **প্রবণতা-ছেদিতাংশ আকার : ইহা সম্ভব যদি কেবল $b\neq 0$ হয়**

$$by=-ax-c$$

বা, $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ (প্রবণতা $=-a/b$, y-ছেদিতাংশ $=-c/b$)

2. **ছেদিতাংশ আকার :** **ইহা সম্ভব কেবল যদি** $c\neq 0,\ a\neq 0,\ b\neq 0$

$$ax+by=-c$$

বা $$\frac{x}{-c/a}+\frac{y}{-c/b}=1$$

(x-ছেদিতাংশ $=-c/a$, y-ছেদিতাংশ $=-c/b$)।

মন্তব্য : রেখাটি অঙ্কনের পক্ষে ইহা সুবিধাজনক আকার।

3. **অভিলম্ব-আকার :**

নিম্নের উক্তিটি যথার্থ বলিয়া ধরিয়া লওয়া হইল :

দুইটি প্রথমঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ, যথা : $ax+by+c=0$ **এবং** $a'x+b'y+c'=0$ **একই সরলরেখাকে প্রকাশ করে যদি এবং কেবলমাত্র যদি**

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\text{ হয়।}$$

$ax+by+c=0$ আকারের সমীকরণকে অভিলম্ব-আকারে প্রকাশ করিবার জন্য নিম্নপ্রকারে অগ্রসর হইতে হইবে :

(i) **ধরা যাক্ c ধনাত্মক।** সমীকরণটিকে এখন এইভাবে লেখা যায় :

$$c=-ax-by$$

এবং ধরিয়া লওয়া হইল যে এই রেখা এবং

$p=x\cos\alpha+y\sin\alpha$ (p সর্বদা ধনাত্মক লওয়া হয়) রেখা একই রেখা।

তাহা হইলে $$\frac{c}{p}=\frac{-a}{\cos\alpha}=\frac{-b}{\sin\alpha}=\frac{+\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}=\frac{+\sqrt{a^2+b^2}}{1}$$

সুতরাং, $$\cos\alpha=\frac{-a}{+\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha=\frac{-b}{+\sqrt{a^2+b^2}},\ p=\frac{c}{+\sqrt{a^2+b^2}}$$

∴ অভিলম্ব আকারে সমীকরণটি এখন হইল

$$\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{-ax}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{by}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

অর্থাৎ এই আকারবিশিষ্ট অবস্থায় ইহা

$p=x\cos\alpha+y\sin\alpha$ -এর সমতুল, যেখানে

$p=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ এবং যেখানে α নিরূপণ করা হয়

$\cos\alpha=\dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ এবং $\sin\alpha=\dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ সমীকরণদ্বয় হইতে।

(*ii*) **ধরা যাক্ c ঋণাত্মক**। তাহা হইলে নির্ণেয় অভিলম্ব-আকার এইভাবে প্রাপ্তব্য, যথা :

$$-c = ax + by$$

প্রত্যেককে $\sqrt{a^2+b^2}$ দ্বারা ভাগ করা হইল ; তাহা হইলে

$$-\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y.$$

ইহা নিম্নের সমীকরণের সহিত সমতুল, যথা :

$$p = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$

যেখানে

$$p = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ এবং } \alpha \text{ নিরূপিত হয়}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ এবং } \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ সমীকরণদ্বয় হইতে।}$$

মন্তব্য। ক্ষেত্র দুইটি এইভাবে বিন্যস্ত হইয়াছে যেন p সর্বদা ধনাত্মক থাকে। ইহা করা হইয়াছে p এর চিহ্ন সম্পর্কে প্রচলিত রীতি (অনুচ্ছেদ 5·7) অনুসারে। আর একবার স্মরণ করাইয়া দেওয়া প্রয়োজন যে p হইল মূলবিন্দু **হইতে** রেখা **পর্যন্ত** লম্ব দূরত্ব।

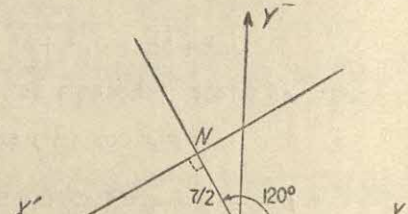
উদা. 5. $x - y\sqrt{3} + 7 = 0$ সমীকরণটিকে অভিলম্ব-আকারে প্রকাশ কর। মূলবিন্দু হইতে রেখাটি পর্যন্ত লম্বের দৈর্ঘ্য (p) নির্ণয় কর। এই লম্ব-রেখা যদি ধনাত্মক x-অক্ষের সহিত α কোণ উৎপন্ন করে, তবে α নির্ণয় কর। p এবং α র মানের সাহায্যে রেখাটি অঙ্কন কর।

এখানে $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$; ধ্রুবক পদ (7) ধনাত্মক। সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণটি এইভাবে লিখিত হইল, যথা :

$$\frac{7}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$$

ইহাই অভিলম্ব-আকার, যাহা নিম্নের সমীকরণের সমতুল, যথা:

$$p = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$



চিত্র 5.7

যেখানে $p=\frac{7}{2}$, এবং যেখানে α নির্ণীত হইবে

$$\cos\alpha=-\tfrac{1}{2} \text{ এবং } \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ হইতে।}$$

লক্ষ্য করা হইল যে α অবশ্যই দ্বিতীয় পাদতে অবস্থিত হইবে

($\because$ $\sin\alpha$ ধনাত্মক এবং $\cos\alpha$ ঋণাত্মক)। বস্তুত, $\alpha=120^\circ$.

অঙ্কন। (চিত্র 5.7 দ্রষ্টব্য)।

$\overline{ON}$ কে এইরূপভাবে লওয়া হইল যেন $X\hat{O}N=120^\circ$ হয়। $\overrightarrow{ON}$ হইতে $\overline{ON}$ এইভাবে ছিন্ন করা হইল যেন $\overline{ON}=\frac{7}{2}$ একক হয়। N গামী এবং $\overline{ON}$ এর লম্ব একটি রেখা অঙ্কন করা হইল। এই প্রকারে নির্ণেয় রেখা অঙ্কিত হইল।

সরলরেখাসমূহের অঙ্কন-প্রণালী, যখন উহাদের সমীকরণ প্রদত্ত থাকে

উদা. 6. নিম্নলিখিত সরলরেখাগুলি অঙ্কন কর:

(i) $4x+3y-12=0$; (ii) $2x+3y+6=0$;

(iii) $x+y=0$; (iv) $x=5$;

(v) $y=-6$.

সঙ্কেত। **1.** ধ্রুবক পদটি শূন্য হইলে সমীকরণটিকে প্রবণতা-ছেদিতাংশ আকারে প্রকাশ কর: যেমন (iii).

2. অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল রেখা সহজেই অঙ্কন করা যাইবে: যেমন (iv) এবং (v).

3. অপর ক্ষেত্রগুলিতে সমীকরণগুলিকে ছেদিতাংশ আকারে লইয়া যাও: যেমন (i) এবং (ii).

(i) $4x+3y=12$

বা, $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$

$\therefore$ রেখাটির উপরিস্থিত দুইটি বিন্দু A(3, 0) এবং B(0, 4)। এখন রেখাটি অঙ্কন কর।

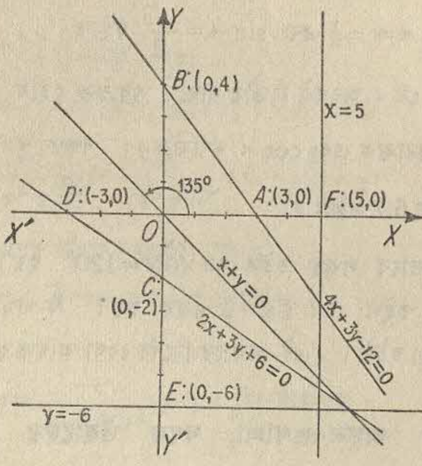
(ii) $2x+3y=-6$

বা, $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-2}=1$

$\therefore$ রেখাটির দুইটি বিন্দু হইল C(−3, 0) এবং D(0, −2)। এখন রেখাটি অঙ্কন কর।

(iii) $y=-x$ (প্রবণতা $=-1$, নতিকোণ $=135^\circ$) রেখাটি মূলবিন্দুগামী।

চিত্র 5.8এ সমুদয় রেখা প্রদর্শিত হইল।



চিত্র 5.8. রেখা অঙ্কন

অনুশীলনী

1. যে সরলরেখাগুলির সমীকরণ নিম্নে প্রদত্ত আছে তাহাদের অঙ্কন কর :

(i) $x+2y-3=0$; (ii) $5x-7y-9=0$;

(iii) $7x+3y=0$; (iv) $3x+8=0$.

2. নিম্নের রেখাগুলির প্রবণতা এবং y-ছেদিতাংশ নির্ণয় কর : রেখাগুলি অঙ্কন কর :

(i) $4x+2y-1=0$; (ii) $7x+8y+5=0$;

(iii) $y=0$; (iv) $x=3-y$;

(v) $2y-3=0$; (vi) $by+ax=ab, (a, b>0)$.

3. p এবং αর প্রদত্ত মানের সাহায্যে প্রত্যেকটি রেখা অঙ্কন কর এবং অভিলম্ব-আকারে তাহাদের সমীকরণগুলি লিখ :

(i) $p=5, \alpha=30^\circ$; (ii) $p=4, \alpha=240^\circ$;

(iii) $p=6, \alpha=315^\circ$; (iv) $p=6, \alpha=120^\circ$.

4. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির প্রত্যেকটিকে অভিলম্ব-আকারে প্রকাশ কর এবং α ও p নির্ণয় কর :

(i) $\sqrt{3}x+y=9$; (ii) $x+y+8=0$;

(iii) $4y-7=0$; (iv) $x+5=0$.

5. যে যে ক্ষেত্রে বিদ্যমান সেই সেই ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত রেখাগুলির x-ছেদিতাংশ এবং y-ছেদিতাংশ উভয়ই নির্ণয় কর এবং রেখাগুলি অঙ্কন কর :

(i) $2x+3y-12=0$; (ii) $x-y+1=0$;

(iii) $5x+7y+13=0$; (iv) $2x-3y=0$;

(v) $2x+3=0$; (vi) $x=0$.

6. কোন বর্গের কর্ণদ্বয় স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয় বরাবর অবস্থিত এবং উহাদের প্রত্যেকের দৈর্ঘ্য 2 একক। বাহু (বর্ধিত) চারিটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

2. (i) -2 ; $1/4$ এবং $1/2$; (ii) $-7/8$; $-\frac{7}{5}$ এবং $-5/8$; (iii) 0 ; কোন ছেদিতাংশ নাই ; (iv) -1 ; 3 এবং 3 ; (v) 0 ; x ছেদিতাংশ নাই, y ছেদিতাংশ$=3/2$; (vi) $-a/b$; b এবং a.

4. (i) $30°$ এবং $9/2$; (ii) $225°$ এবং $4\sqrt{2}$; (iii) $90°$ এবং $7/4$; (iv) $180°$ এবং 5.

6. $x+y=\pm 1$ এবং $x-y=\pm 1$.

5·9. দুইটি রেখার ছেদ (Intersection of two lines)

ধরা যাক্, নিম্নলিখিত রেখাদ্বয়, যথা :

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

এবং $$a_2x+b_2y+c_2=0$$

পরস্পরকে ছেদ করিয়াছে এবং ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্কদ্বয় (α, β)।

যেহেতু (α, β) উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে, সুতরাং

$$a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0$$

$$a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0$$

ইহাদের সমাধান দ্বারা (বজ্রগুণন প্রণালীতে) পাওয়া যায় :

$$\frac{\alpha}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{\beta}{c_1a_2-a_1c_2}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

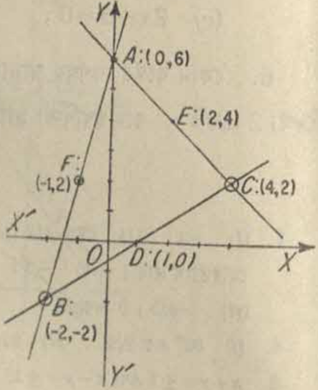
$\therefore$ ছেদবিন্দুটির স্থানাঙ্কদ্বয় হইল :

$$\alpha=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \qquad \beta=\frac{c_1a_2-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

মন্তব্য : যদি $a_1b_2-a_2b_1=0$ হয়, **অর্থাৎ** যদি $a_1/a_2=b_1/b_2$ হয়, তবে রেখা দুইটি ছেদ করিবে না। এই ক্ষেত্রে রেখা দুইটির প্রবণতা $-a_1/b_1$, এবং $-a_2/b_2$ পরস্পর সমান এবং রেখা দুইটি সমান্তরাল।

উদা. 7. একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $(0, 6)$, $(-2, -2)$, $(4, 2)$ বিন্দু ; উহার (i) মধ্যমাত্রয়ের সমীকরণ এবং ছেদবিন্দু ; (ii) লম্ব-উচ্চতাত্রয়ের সমীকরণ এবং ছেদবিন্দু ; (iii) বাহুগুলির লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের সমীকরণ এবং ছেদবিন্দু নির্ণয় কর। যাচাই করিয়া দেখ যে নির্ণীত ছেদবিন্দুত্রয় সমরেখ।

ধরা যাক, শীর্ষত্রয় A : $(0, 6)$, B : $(-2, -2)$ এবং C : $(4, 2)$ [চিত্র 5.9]



চিত্র 5.9

(i) ধরা যাক, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ এর মধ্যবিন্দুগুলি যথাক্রমে D, E এবং F.

D, E এবং F এর স্থানাঙ্কগুলি যথাক্রমে

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-2+2}{2}\right), \left(\frac{4+0}{2}, \frac{2+6}{2}\right),$$

$$\text{এবং } \left(\frac{0-2}{2}, \frac{6-2}{2}\right)$$

অর্থাৎ $(1, 0)$, $(2, 4)$, $(-1, 2)$.

মধ্যমাত্রয়ের সমীকরণ :

$\overleftrightarrow{AD}$র সমীকরণ : $y-6=\frac{0-6}{1-0}(x-0)$

অর্থাৎ $y+6x-6=0$.

$\overleftrightarrow{BE}$র সমীকরণ : $y+2=\frac{4+2}{2+2}(x+2)$

অর্থাৎ, $2y-3x-2=0$.

$\overleftrightarrow{CF}$ এর সমীকরণ : $y-2=\frac{2-2}{-1-4}(x-4)$

অর্থাৎ, $y=2$.

মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়ের জন্য প্রথমত যে কোন দুইটি মধ্যমার সমীকরণ, মনে করা যাক,

$$y+6x-6=0 \text{ এবং } y=2$$

সমাধান করিতে হইবে। সমাধান দ্বারা পাওয়া যায় : $x=\frac{2}{3}$, $y=2$. এই $(\frac{2}{3}, 2)$ বিন্দুটি তৃতীয় মধ্যমা $2y-3x-2=0$ এর উপরও অবস্থিত বলিয়া দেখা যায়।

$\therefore$ মধ্যমা তিনটি পরস্পরকে $(\frac{2}{3}, 2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(*ii*) যেহেতু $\overline{BC}$র প্রবণতা $=\dfrac{2+2}{4+2}=\frac{2}{3}$,

সুতরাং A গামী লম্ব-উচ্চতার ($\overline{BC}$র উপর লম্ব) প্রবণতা $=-3/2$। সুতরাং A বিন্দুগামী লম্ব-উচ্চতা রেখার সমীকরণ হইল

$$y-6=-\tfrac{3}{2}(x-0)$$

বা, $2y+3x-12=0$.

অনুরূপভাবে B এবং C বিন্দুগামী লম্ব-উচ্চতাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করা যাইবে। উহারা যথাক্রমে

$$y-x=0 \quad \text{এবং } 4y+x-12=0.$$

$2y+3x-12=0$ এবং $y-x=0$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাওয়া যায়

$$x=y=\tfrac{12}{5}$$

আবার $(\frac{12}{5}, \frac{12}{5})$ বিন্দু তৃতীয় লম্ব-উচ্চতার উপরও অবস্থিত বলিয়া দেখা যায়।

∴ লম্ব-উচ্চতাত্রয় $(\frac{12}{5}, \frac{12}{5})$ বিন্দুতে মিলিত হয়।

(*iii*) $\overline{BC}$র প্রবণতা $=\frac{2}{3}$

সুতরাং $\overline{BC}$র উপর লম্ব যে কোন রেখার প্রবণতা $=-\frac{3}{2}$

এখন $\overline{BC}$র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক D : (1, 0) বিন্দুগামী ;

∴ $\overline{BC}$র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$y-0=-\tfrac{3}{2}\,(x-1)$$

বা, $2y+3x-3=0$.

অনুরূপভাবে $\overline{CA}$ এবং $\overline{AB}$র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক নির্ণয় করা যায়। তাহারা হইল যথাক্রমে

$$y-x-2=0 \text{ এবং } 4y+x-7=0.$$

সমাধানপূর্বক দেখা যাইবে, $(-\frac{1}{5}, \frac{9}{5})$ বিন্দুটি লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক তিনটির সাধারণ ছেদবিন্দু।

অবশেষে, যাচাই করিয়া দেখিতে হইবে যে বিন্দুত্রয় L : $(\frac{2}{3}, 2)$, M : $(\frac{12}{5}, \frac{12}{5})$ এবং N : $(-\frac{1}{5}, \frac{9}{5})$ এক সরলরেখায় অবস্থিত।

ইহার জন্য ইহা প্রমাণ করিলেই হইবে যে

$$\overline{LM} \text{ এর প্রবণতা} = \overline{LN} \text{ এর প্রবণতা} = \tfrac{3}{13}$$

অথবা, L এবং M গামী রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করা যায় : যথা, $13y-3x-24=0$ এবং পরে দেখা যাইতে পারে যে N বিন্দু উহার উপর অবস্থিত।

অনুশীলনী

1. কোন ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় (2, 0), (3, 2,), (4, −3) হইলে ত্রিভুজটি সম্পর্কে নিম্নলিখিতগুলি নির্ণয় কর :

(*i*) মধ্যমাত্রয়ের সমীকরণ এবং তাহাদের ছেদবিন্দু ; (*ii*) উচ্চতাত্রয়ের সমীকরণ এবং তাহাদের ছেদবিন্দু এবং (*iii*) বাহুগুলির লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক তিনটির সমীকরণ এবং তাহাদের ছেদবিন্দু। যাচাই করিয়া দেখ যে এইভাবে নির্ণীত বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।

মন্তব্য। ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের, ত্রিভুজের উচ্চতাত্রয়ের এবং বাহুগুলির লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের ছেদবিন্দু তিনটিকে যথাক্রমে ভরকেন্দ্র (centroid), লম্ব-বিন্দু (ortho-centre) এবং পরি-কেন্দ্র (circum-centre) বলা হয়।

2. বিশ্লেষণ-জ্যামিতির পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে **যে কোন ত্রিভুজের** ভরকেন্দ্র, লম্ব-বিন্দু এবং পরি-কেন্দ্র সমরেখ (collinear)।

সঙ্কেত। অক্ষদ্বয়ের উপযুক্ত নির্বাচন কর। উপযুক্ত নির্বাচন হইবে, যদি ত্রিভুজটির একটি বাহু বরাবর x-অক্ষ এবং যে কোন একটি শীর্ষগামী y-অক্ষ লওয়া হয়।

5·10. দুইটি রেখার অন্তর্গত কোণ (Angle between two lines)

অনুচ্ছেদ 3·5 (পৃষ্ঠা 38) এ m_1 প্রবণতার রেখা L_1 **হইতে** m_2 প্রবণতার রেখা L_2 **পর্যন্ত** কোণ ϕ এর মান নির্ণয়ের সূত্র নিম্নলিখিত আকারে পাওয়া গিয়াছিল, যথা :

$$\tan\phi=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}, \quad \dots \tag{1}$$

যেখানে ধরিয়া লওয়া হইয়াছিল যে L_1 অথবা L_2 কেহই y অক্ষের সমান্তরাল নহে (অর্থাৎ m_1 এবং m_2 উভয়েরই মান সসীম বলিয়া ধরা হইয়াছিল)।

ধরা যাক্, L_1 এবং L_2 কে নিম্নের সমীকরণ দুইটি প্রকাশ করে, যথা :

$L_1 :\ a_1x+b_1y+c_1=0$ (a_1, b_1 উভয়েই শূন্য নহে)

$L_2 :\ a_2x+b_2y+c_2=0$ (a_2, b_2 উভয়েই শূন্য নহে)।

এখন, প্রথমে ধরা যাক্ b_1 এবং $b_2\neq0$, সুতরাং L_1 এর প্রবণতা $=m_1$ (ধরা হইল) $=-a_1/b_1$ এবং L_2 এর প্রবণতা $=m_2$ (মনে করা যাক্) $=-a_2/b_2$.

তাহা হইলে L_1 রেখা হইতে L_2 রেখা পর্যন্ত কোণ ϕ হইলে

$$\tan\phi=\frac{\left(-\dfrac{a_2}{b_2}\right)-\left(-\dfrac{a_1}{b_1}\right)}{1+\left(\dfrac{-a_2}{b_2}\right)\cdot\left(\dfrac{-a_1}{b_1}\right)}$$

$$=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{b_1b_2+a_1a_2}.$$

মন্তব্য। ইহা স্বীকার করিয়া লওয়া হইয়াছে যে L_1 **হইতে** L_2 **পর্যন্ত** কোণ ϕ পরিমাপ করা হইবে এবং সেই অনুসারে সূত্র **(1)** পাওয়া গিয়াছে। কোন কোন গ্রন্থকারের ব্যাখ্যা অনুসারে কিন্তু "L_1 এবং L_2 এর **মধ্যে** কোণ" হইল হয় "L_1 **হইতে** L_2 পর্যন্ত কোণ" অথবা "L_2 **হইতে** L_1 **পর্যন্ত** কোণ"—ইহাদের মধ্যে যেটিই সূক্ষ্ম সেইটি, তা যেকোনটিই হউক না কেন। সুতরাং চিত্র 3.6 অথবা 3.7 প্রসঙ্গে তাহারা L_1 এবং L_2 এর **মধ্যবর্তী** কোণ হিসাবে হয় ϕ কে অথবা উহার সম্পূরককে লইয়া থাকেন। এইজন্য তাঁহারা সূত্রটিকে নিম্নের আকারে প্রকাশ করেন:

$$\tan(L_1 \text{ এর } L_2 \text{ এর অন্তর্বর্তী কোণ}) = \pm\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

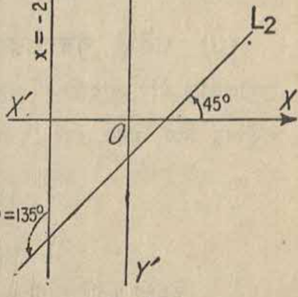
আমাদের প্রচলিত রীতি হইবে

$$0^\circ \leqslant \phi \leqslant 180^\circ.$$

সূত্র (1) নিরূপণের সময় ধরিয়া লওয়া হইয়াছে যে L_1 এবং L_2 উভয়েরই নির্দিষ্ট প্রবণতা বর্তমান। যদি ইহা না হয়, তবে রেখা দুইটির একটি অন্ততঃ y-অক্ষের সমান্তরাল এবং তখন এই সূত্রের প্রয়োজন হয় না—কোণ ϕ সরাসরি নির্ণয় করা যায়। যেমন, ধরা যাক, L_1 এবং L_2 হইল যথাক্রমে

$$x + 2 = 0 \text{ এবং } x - y = 1.$$

তাহা হইলে (চিত্র 5.10 দ্রষ্টব্য) L_1 y-অক্ষের সমান্তরাল এবং L_2 ধনাত্মক x-অক্ষের উপর 45° কোণে নত, কারণ $x - y = 1$ রেখার প্রবণতা হইল 1. ফলে L_1 **হইতে** L_2 **পর্যন্ত** কোণটি হইল 135° (চিত্র দ্রষ্টব্য).



চিত্র 5.10

দুইটি রেখা L_1 এবং L_2 এর পরস্পর সমান্তরাল এবং লম্ব হইবার শর্ত, যেখানে

$$L_1: \ a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$L_2: \ a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

***(i)* দুইটি সমান্তরাল রেখা:** দুইটি রেখা সমান্তরাল হইবে, যদি এবং কেবলমাত্র যদি উহাদের প্রবণতা সমান হয়। সুতরাং L_1 এবং L_2 সমান্তরাল হইবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \text{ (অবশ্য } b_1 \text{ এবং } b_2 \text{ যদি শূন্য না হয়)।}$$

ইহাই L_1 এবং L_2 রেখাদ্বয়ের সমান্তরাল হওয়ার শর্ত প্রদান করে, যথা :
L_1 এবং L_2 হইল সমান্তরাল, যদি এবং কেবলমাত্র যদি $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ হয়।

এখন লক্ষ্য করা যাক :

যদি $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = k$ ($\neq 0$, ধরা যায়), তবে $a_1 = ka_2$ এবং $b_1 = kb_2$ এবং তাহা হইলে রেখা দুইটিকে এইভাবে প্রকাশ করা যায়, যথা :

$$k(a_2x + b_2y) + c_1 = 0 \quad \text{এবং } a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$\therefore \quad a_2x + b_2y + c_1/k = 0 \quad \text{এবং } a_2x + b_2y + c_2 = 0 \text{ হইল সমান্তরাল।}$$

বিপরীতক্রমে, যদি $b_2 \neq 0$ হয়, রেখা দুইটির একই প্রবণতা, $(= -a_2/b_2)$; যদি $b_2 = 0$ হয়, তবে a_2 তখন শূন্য হইতে পারে না, এবং রেখা দুইটির প্রত্যেকে y-অক্ষের সমান্তরাল, সুতরাং উহারা পরস্পর সমান্তরাল ।

সুতরাং নিম্নলিখিত প্রতিপাদ্যটি পাওয়া যায় :

প্রতিপাদ্য 1. দুইটি রেখা পরস্পর সমান্তরাল হয়, যখন উহাদের সমীকরণদ্বয়কে এইরূপ আকারে লেখা যায়, যথা :

$$ax + by + c = 0$$

$$\text{এবং } \quad ax + by + c' = 0$$

(*ii*) দুইটি পরস্পর লম্ব রেখা : দুইটি রেখা পরস্পর লম্ব, যদি এবং কেবলমাত্র যদি তাহাদের প্রবণতাদ্বয়ের গুণফল $= -1$ হয়। সুতরাং L_1 এবং L_2 পরস্পর লম্ব, যখন এবং কেবলমাত্র যখন

$$\left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right) = -1$$

$$\text{বা, } \quad a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

ইহাই দুইটি রেখা L_1 এবং L_2 এর পরস্পর **লম্ব হওয়ার শর্ত**।

এখন লক্ষ্য করা যাক্ যে, যদি $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ হয়, তবে

$$\frac{a_2}{b_1} = -\frac{b_2}{a_1} = k \text{ (} \neq 0, \text{ যদি ধরা যায়)}$$

$$\text{বা, } \quad a_2 = kb_1 \quad \text{এবং } b_2 = -ka_1$$

$$\therefore \quad \text{সমীকরণ } a_2x + b_2y + c_2 = 0 \text{ এখন হইবে :}$$

$$k(b_1x - a_1y) + c_2 = 0$$

$$\text{বা, } \quad b_1x - a_1y + \frac{c_2}{k} = 0.$$

অতএব পরস্পর লম্ব দুইটি রেখাকে এইরূপ আকারে পাওয়া গেল, যথা :

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$
এবং $$b_1x-a_1y+c_2/k=0.$$

বিপরীতক্রমে, যদি $b_1\neq 0$ এবং $a_1\neq 0$ হয়, তবে প্রবণতা দুইটির গুণফল $=(-a_1/b_1)\cdot(b_1/a_1)=-1$ এবং রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব।

ইহা হইতে নিম্নলিখিত প্রতিপাদ্যটি পাওয়া যায় :

প্রতিপাদ্য 2. দুইটি রেখা পরস্পর লম্ব হয় যখন এবং কেবলমাত্র যখন তাহাদের সমীকরণদ্বয়কে এইরূপ আকারে লেখা যায়, যথা :

$$ax+by+c=0$$
এবং $$bx-ay+c'=0.$$

[প্রথম সমীকরণ হইতে দ্বিতীয়টি পাওয়া যায়—প্রথমটির x এবং y এর সহগ দুইটির স্থান বিনিময়, উহাদের একটির চিহ্ন পরিবর্তন এবং ধ্রুবক পদটিকে অপর কোন ধ্রুবকে পরিবর্তন দ্বারা।]

নিম্নে প্রতিপাদ্য 1 এবং 2 এর প্রয়োগমূলক দৃষ্টান্ত দেওয়া হইল।

উদা. 8. (5, −6) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর, যদি উহা

(*i*) $8x+7y+5=0$ রেখার সমান্তরাল হয় ;

(*ii*) $8x+7y+5=0$ রেখার উপর লম্ব হয়।

(*i*) **প্রথম প্রণালী :** $8x+7y+5=0$ রেখার সমান্তরাল যে কোন সরলরেখার সমীকরণের আকার হইবে :

$$8x+7y+c=0,$$ যেখানে c একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক।

যদি এই রেখাকে (5, −6) বিন্দু দিয়া যাইতে হয়, তবে

$$8\times 5+7\times -6+c=0,$$
বা, $$c=2.$$

∴ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ হইল

$$8x+7y+2=0.$$

দ্বিতীয় প্রণালী : $8x+7y+5=0$ রেখার প্রবণতা হইল $-8/7$; নির্ণেয় রেখা, এই রেখার সমান্তরাল, সুতরাং উহার একই প্রবণতা। আবার ইহা (5, −6) বিন্দুগামী। সুতরাং উহার সমীকরণ (বিন্দু-প্রবণতা আকারে) হইল

$$y+6=-\tfrac{8}{7}(x-5)$$
বা, $$7y+8x+2=0.$$

তৃতীয় প্রণালী : (প্রবণতা-ছেদিতাংশ আকারের সাহায্য লইয়া)।

ধরা যাক্, নির্ণেয় রেখার সমীকরণটি হইল

$$y=mx+c \; (m=\text{প্রবণতা}, \; c=y\text{-ছেদিতাংশ})$$

যেহেতু ইহা $8x+7y+5=0$ রেখার সমান্তরাল (যাহার প্রবণতা $=-8/7$),

$$\therefore \; m=-\tfrac{8}{7} \quad \cdots \quad (1)$$

আবার যেহেতু ইহা $(5, -6)$ বিন্দুগামী।

$$\therefore \; -6=5m+c \quad \cdots \quad (2)$$

(1) এবং (2) হইতে, $m=-\frac{8}{7}$ এবং $c=-\frac{2}{7}$; সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$y=-\tfrac{8}{7}x-\tfrac{2}{7}$$

$$\text{বা,} \; \mathbf{7y+8x+2=0.}$$

***(ii)* প্রথম প্রণালী :** $8x+7y+5=0$ রেখার উপর লম্ব **যে কোন** রেখার সমীকরণের আকার হইবে,

$$7x-8y+c=0$$

যেহেতু নির্ণেয় রেখা $(5, -6)$ বিন্দু দিয়াও গমন করে,

$$\therefore \; 7\times 5-8(-6)+c=0,$$

$$\text{বা,} \; c=-83.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল :

$$\mathbf{7x-8y-83=0.}$$

টীকা। ছাত্রছাত্রীরা পূর্বের ন্যায় অপর প্রণালীগুলির (বিন্দু-ছেদিতাংশ বা প্রবণতা-ছেদিতাংশ) সাহায্যে প্রশ্নটি সমাধানের চেষ্টা করিতে পারে।

অনুশীলনী

1. (x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং $yy_1=2a(x+x_1)$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. প্রমাণ কর যে $(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ বিন্দুগামী এবং $x\sec\theta+y\,\mathrm{cosec}\,\theta=a$ সরলরেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ হইল $x\cos\theta-y\sin\theta=a\cos 2\theta$.

3. যে রেখা $2x-y-4=0$ রেখার উপর লম্ব এবং প্রথম পাদ হইতে এইরূপ একটি ত্রিভুজ ছিন্ন করে যাহার ক্ষেত্রফল 16 বর্গএকক, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

4. একটি রেখা, $3x+2y-6=0$ রেখার সমান্তরাল এবং উহা প্রথম পাদতে নিম্নলিখিত রেখা দুইটি,

$$x-2y=0 \text{ এবং } 2x-y=0$$

এর সহিত এইরূপ একটি ত্রিভুজ উৎপন্ন করে, যাহার ক্ষেত্রফল 21 বর্গএকক। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

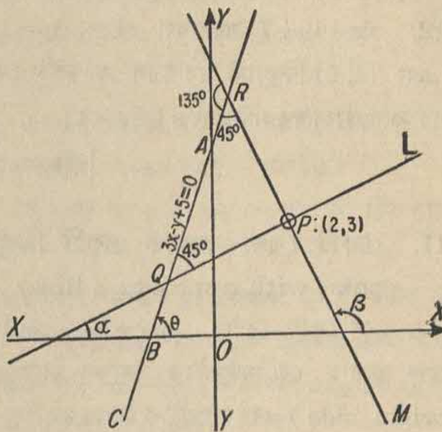
[উঃ 1. $2ay+xy_1=2ay_1+x_1y_1$. 3. $x+2y-8=0$. 4, $3x+2y-28=0$.]

উদা. 9. (2, 3) বিন্দুগামী এইরূপ **সরলরেখাগুলির** সমীকরণ নির্ণয় কর যাহারা নিম্নের রেখাটি,

$$3x-y+5=0$$

এর সহিত 45° সূক্ষ্ম কোণ উৎপন্ন করে।

ধরা যাক্ P : (2, 3) প্রদত্ত বিন্দু, এবং $\overleftrightarrow{CBA}$ প্রদত্ত রেখা $3x-y+5=0$; যদি এই রেখা ধনাত্মক x-অক্ষের সহিত θ কোণ করে, তবে $\tan\theta=3$. [চিত্র 5.11]



চিত্র 5.11

এখন অঙ্কন করা যাক্ দুইটি রেখা—$\overleftrightarrow{QPL}$ এবং $\overleftrightarrow{MPR}$—যাহাদের প্রত্যেকে $\overleftrightarrow{CBA}$ রেখার সহিত 45° সূক্ষ্ম কোণ উৎপন্ন করে।

চিত্র হইতে, $\overleftrightarrow{QPL}$ **হইতে** $\overleftrightarrow{CBA}$ **পর্যন্ত** কোণ = 45°, সুতরাং $P\widehat{Q}R=45°$.

$\overleftrightarrow{MPR}$ **হইতে** $\overleftrightarrow{CBA}$ পর্যন্ত কোণ = 135° ; সূক্ষ্ম কোণটি বিবেচনা করিতে হইবে, সুতরাং উহার সম্পূরক $Q\widehat{R}P=45°$ কে লওয়া হইল।

ধরা যাক্ যে $\overleftrightarrow{QPL}$ এবং $\overleftrightarrow{MPR}$ রেখাদ্বয়ের নতিকোণ যথাক্রমে α এবং β. চিত্র 5.11 হইতে $\theta=45°+\alpha$ এবং $\beta=45°+\theta$.

$$\therefore\ \tan\alpha=\tan\ (\theta-45°)=\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}=\frac{3-1}{1+3}=\frac{1}{2}$$

$$\tan\beta=\tan\ (\theta+45°)=\frac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta}=\frac{3+1}{1-3}=-2$$

$\therefore$ রেখা দুইটির সমীকরণ (বিন্দু-প্রবণতা আকারে) হইল :

$$y-3=\tfrac{1}{2}(x-2)\quad এবং\quad y-3=-2(x-2)$$

অর্থাৎ, $2y-x-4=0$ এবং $y+2x-7=0$.

অনুশীলনী

1. প্রমাণ কর যে (x', y') বিন্দুগামী যে রেখাগুলি প্রদত্ত রেখা $y=mx+c$ এর সহিত সূক্ষ্ম কোণ α উৎপন্ন করে, তাহাদের সমীকরণ হইল :

$$y-y'=\frac{m\pm\tan\alpha}{1\mp\tan\alpha}(x-x')$$

2. $3x=4y+7$ সরলরেখা হইতে $5y=12x+6$ রেখা পর্যন্ত কোণটি নির্ণয় কর এবং $(4, 5)$ বিন্দুগামী যে সরলরেখা দুইটি প্রদত্ত রেখা দুইটির সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে তাহাদের সমীকরণও নির্ণয় কর।

[উঃ $\tan^{-1}\frac{33}{56}$; $9x-7y=1$, $7x+9y=73$]

5·11. একটি রেখা সম্পর্কে একটি বিন্দুর অবস্থান (Position of a point with respect to a line)

1. যে কোন রেখা L : $ax+by+c=0$ $(c\neq 0)$ সমতলটিকে দুইটি অঞ্চলে বিভক্ত করে : যে অঞ্চলটিতে মূলবিন্দু থাকে, তাহাকে L এর **মূলবিন্দু-পার্শ্ব** **(origin side)** এবং অপরটিকে উহার মূলবিন্দু-বর্জিত পার্শ্ব (non-origin side) বলা হয়।

2. যদি c ধনাত্মক হয়, তবে বলা হয় যে মূলবিন্দু রেখাটির **ধনাত্মক পার্শ্বে** আছে ; যদি c ঋণাত্মক হয়, তবে মূলবিন্দু রেখাটির **ঋণাত্মক পার্শ্বে** আছে বলা হইবে।

3. **(a)** কোন বিন্দু P : (x_1, y_1) রেখা L : $ax+by+c=0$ এর **মূলবিন্দুর পার্শ্বে** অবস্থিত, যদি ax_1+by_1+c এবং c এর চিহ্ন একই হয়। আরও স্পষ্ট করিয়া বলিলে বলিতে হয় যে,

(i) যদি ax_1+by_1+c এবং c উভয়েই **ধনাত্মক** হয়, তবে P, L রেখার **ধনাত্মক পার্শ্বে** অবস্থিত।

(ii) যদি ax_1+by_1+c এবং c উভয়েই **ঋণাত্মক** হয়, তবে P, L এর ঋণাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত।

(b) কোন বিন্দু P : (x_1, y_1), L রেখার **মূলবিন্দু-বর্জিত পার্শ্বে** অবস্থিত, যদি ax_1+by_1+c এবং c এর চিহ্ন পরস্পর বিপরীত হয়। আরও স্পষ্টকরিয়া বলিলে,

(i) যদি c **ধনাত্মক** এবং ax_1+by_1+c **ঋণাত্মক** হয়, তবে P, L রেখার **ঋণাত্মক পার্শ্বে** অবস্থিত।

(ii) যদি c **ঋণাত্মক** এবং ax_1+by_1+c **ধনাত্মক** হয়, তবে P, L রেখার **ধনাত্মক পার্শ্বে** অবস্থিত।

দৃষ্টান্ত : (3, 2) বিন্দু $2x-3y-1=0$ রেখার ঋণাত্মক পার্শ্বে এবং $3x-2y-1=0$ রেখার ধনাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত। (যাচাই করিয়া দেখ।)

উদা. 10. প্রমাণ কর যে (2, −1) এবং (1, 1) বিন্দু $3x+4y-6=0$ রেখার পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

এখানে **মূলবিন্দু** রেখাটির ঋণাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত (কারণ ধ্রুবক পদটি ঋণাত্মক)।

$3\times2+4\times-1-6=-4$ এবং $3\times1+4\times1-6=1$ এই রাশি দুইটি যথাক্রমে ঋণাত্মক এবং ধনাত্মক।

$\therefore$ (2, −1) রেখাটির মূলবিন্দুর পার্শ্বে (**অর্থাৎ** ঋণাত্মক পার্শ্বে) এবং (1, 1) বিন্দু উহার মূলবিন্দু-বর্জিত পার্শ্বে (**অর্থাৎ** ধনাত্মক পার্শ্বে) অবস্থিত।

সুতরাং (2, −1) এবং (1, 1) বিন্দু দুইটি প্রদত্ত রেখার পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

4. ইহা সহজেই নিরূপণ করা যায় যে, c ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাহাই হউক না কেন, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দু দুইটি $ax+by+c=0$ রেখার একই পার্শ্বে (অথবা পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে) অবস্থিত, যদি ax_1+by_1+c এবং ax_2+by_2+c এই রাশি দুইটির যথাক্রমে একই (অথবা বিপরীত) চিহ্ন হয়।

অনুশীলনী

1. প্রমাণ কর যে মূলবিন্দু এবং (2, 3) বিন্দু $7x-24y+8=0$ রেখার পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

2. দেখাও যে P : (3, 2), Q : (3, −1) বিন্দুদ্বয় $x-2y+2=0$ এবং $x+y+1=0$ রেখা দুইটির দ্বারা উৎপন্ন সন্নিহিত কোণদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

3. দেখাও যে বিন্দু চতুষ্টয়, যথা : (0, 0), (−1, 1), (−7, −4) এবং (9, 6) $2x-3y+1=0$ এবং $3x-5y+2=0$ সরলরেখা দুইটির দ্বারা উৎপন্ন চারটি অঞ্চলে অবস্থিত।

4. দেখাও যে (3, 2) এবং (7, 3) বিন্দুদ্বয় $2x-5y+3=0$ রেখার পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

5. দেখাও যে (−2, 6) বিন্দুটি $3x+2y-7=0$ রেখার ঋণাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত।

6. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ নিম্নরূপ :

$x-7y+25=0$, $5x+3y+11=0$, এবং $3x-2y-1=0$;

দেখাও যে মূলবিন্দু ত্রিভুজটির মধ্যে অবস্থিত।

সঙ্কেত : অনুরূপ শীর্ষত্রয় হইল (−1, −2), (3, 4) এবং (−4, 3).

মন্তব্য : যে ক্ষেত্রে L : $ax+by+c=0$ রেখা মূলবিন্দুগামী (**অর্থাৎ** $c=0$) সেই ক্ষেত্র এখন পর্যন্ত বিবেচনা করা হয় নাই। এই রেখাও সমতলটিকে দুইটি অংশে বিভক্ত করে। যে অংশের প্রত্যেক বিন্দু (x_1, y_1)র জন্য $ax_1+by_1>0$ হয়, সেই অংশটিকে L এর **ধনাত্মক পার্শ্বে** বলা হইবে এবং অপর অংশটিকে উহার **ঋণাত্মক পার্শ্বে** ধরা হইবে।

5·12. প্রদত্ত একটি রেখা হইতে কোন বিন্দুর লম্ব-দূরত্ব (Perpendicular distance of a point from a line)

প্রতিপাদ্য : দেওয়া আছে অভিলম্ব-আকারে L রেখার সমীকরণ :

L : $x \cos \alpha+y \sin \alpha=p \ (p>0)$.

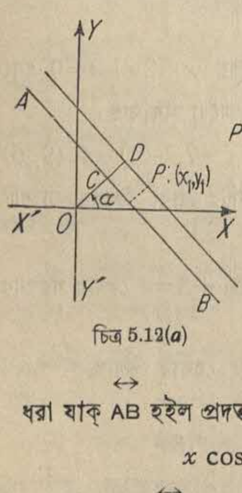
এবং আরও দেওয়া আছে সমতলটিতে যে কোন বিন্দু P : (x_1, y_1)।

L রেখা **হইতে** P বিন্দু **পর্যন্ত** লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে। বস্তুতপক্ষে প্রমাণ করিতে হইবে যে L রেখা হইতে P বিন্দুর লম্ব-দূরত্ব

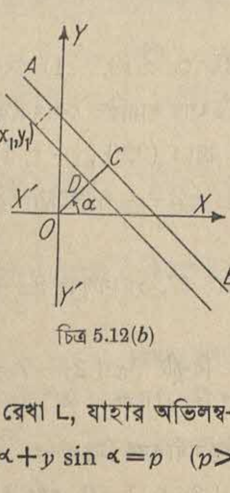
$=p-x_1 \cos \alpha-y_1 \sin \alpha$, যদি P, L রেখার মূলবিন্দু-পার্শ্বে অবস্থিত হয় ;

$=-(p-x_1 \cos \alpha-y_1 \sin \alpha)$, যদি P, L রেখার মূলবিন্দু-বর্জিত পার্শ্বে অবস্থিত হয়।

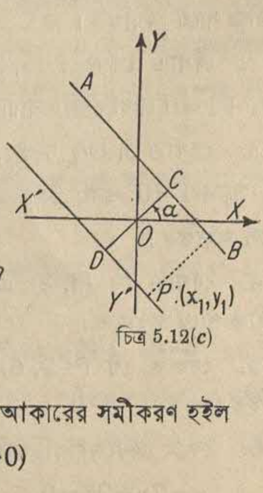
প্রমাণ। চিত্র 5.12 (a), (b) এবং (c) এর প্রতি দৃষ্টি আকর্ষণ করা হইতেছে।



চিত্র 5.12(a)



চিত্র 5.12(b)



চিত্র 5.12(c)

ধরা যাক্ $\overleftrightarrow{AB}$ হইল প্রদত্ত রেখা L, যাহার অভিলম্ব-আকারের সমীকরণ হইল

$$x \cos \alpha+y \sin \alpha=p \quad (p>0)$$

ধরা যাক্ $\overline{OC}$, $\overleftrightarrow{AB}$র উপর অঙ্কিত লম্ব। তাহা হইলে

$$\widehat{XOC}=\alpha, \ \overline{OC}=p.$$

ধরা যাক্ P : (x_1, y_1) প্রদত্ত বিন্দু, যাহা হইতে লম্ব-দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে।

P দিয়া $\overleftrightarrow{AB}$ রেখার সমান্তরাল একটি রেখা অঙ্কন করা হইল। ধরা যাক্, $\overline{OD}$ এই রেখার উপর লম্ব।

ক্ষেত্র 1. চিত্র 5.12(*a*): ধরা হইল, D বিন্দু, $\overline{OC}$এর বর্ধিতাংশের উপর অবস্থিত ;

স্পষ্টত $X\widehat{O}D=\alpha$, $\overline{OD}=p_1$ (মনে করা হইল)

এখন L রেখার সমান্তরাল এবং P বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ হইল

$x \cos \alpha+y \sin \alpha=p_1$; যেখানে $p_1=x_1 \cos \alpha+y_1 \sin \alpha$.

$\therefore$ L রেখা হইতে P বিন্দু পর্যন্ত লম্বের দৈর্ঘ্য

$=p_1-p=x_1 \cos \alpha+y_1 \sin \alpha-p$

$=-(p-x_1 \cos \alpha-y_1 \sin \alpha)$.

[টীকা : এই চিত্রে P বিন্দুটি L রেখার মূলবিন্দু-বর্জিত পার্শ্বে এবং $p>0$;

$\therefore$ $p-x_1 \cos \alpha-y_1 \sin \alpha$ ঋণাত্মক।]

ক্ষেত্র 2. চিত্র 5.12(*b*) : ধরা হইল D বিন্দুটি $\overline{OC}$ রেখাংশের উপর অবস্থিত।

ইহা স্পষ্ট যে, $X\widehat{O}D=\alpha$, $\overline{OD}=p_1$ (মনে করা হইল)

সুতরাং P বিন্দুগামী ও L রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ হইবে

$x \cos \alpha+y \sin \alpha=p_1$, যেখানে $p_1=x_1 \cos \alpha+y_1 \sin \alpha$.

$\therefore$ L রেখা হইতে P বিন্দু পর্যন্ত লম্ব-দৈর্ঘ্য

$=p-p_1=p-x_1 \cos \alpha-y_1 \sin \alpha$.

[টীকা : এই চিত্রে P বিন্দুটি L রেখার মূলবিন্দু-পার্শ্বে এবং $p>0$

$\therefore$ $p-x_1 \cos \alpha-y_1 \sin \alpha$ ধনাত্মক।]

ক্ষেত্র 3. চিত্র 5.12(*c*) : ধরা হইল, D বিন্দুটি বর্ধিত $\overline{CO}$ ছেদাংশের উপর অবস্থিত।

তাহা হইলে $X\widehat{O}D=\alpha+\pi$ এবং $\overline{OD}=p_1$ (মনে কর)

P বিন্দুগামী এবং L রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ এখানে

$x \cos (\alpha+\pi)+y \sin (\alpha+\pi)=p_1$

বা, $x \cos \alpha+y \sin \alpha=-p_1$, যেখানে $p_1=-x_1 \cos \alpha-y_1 \sin \alpha$.

∴ L রেখা হইতে P বিন্দু পর্যন্ত লম্ব-দৈর্ঘ্য

$$=p+p_1=p-x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha.$$

[টীকা : P বিন্দুটি L রেখার মূলবিন্দু-পার্শ্বে এবং $p>0$;

∴ $p-x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha$ **ধনাত্মক**।]

সুতরাং নির্ণেয় লম্ব-দূরত্ব (যাহা মূলতঃ ধনাত্মক)

$$=\pm(p-x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha),$$

মনে রেখ + অথবা − চিহ্ন নির্ভর করে P বিন্দুটি সরলরেখা $p-x\cos\alpha-y\sin\alpha=0$ অনুসারে মূলবিন্দুর পার্শ্বে অথবা মূলবিন্দু-বর্জিত পার্শ্বে অবস্থিত—তাহার উপর।

অনুসিদ্ধান্ত : যদি অভিলম্ব-আকারের পরিবর্তে L রেখার সমীকরণ নিম্ন আকারের হয়, যথা :

$$ax+by+c=0,$$

তবে সমীকরণটিকে প্রথমে অভিলম্ব-আকারে লইয়া আসা যায়, যেমন

$$\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y=0.$$

এখন, যদি $c>0$ হয়, তবে L রেখাটি হইতে (x_1, y_1) বিন্দুর লম্ব-দূরত্ব হইবে

$$\pm\frac{c+ax_1+by_1}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \cdots (i$$

এখানেও + অথবা − চিহ্ন নির্ভর করে (x_1, y_1) বিন্দু L রেখাটির অনুসারে মূলবিন্দুর পার্শ্বে অথবা মূলবিন্দু-বর্জিত পার্শ্বে অবস্থিত—তাহার উপর।

আবার, যদি $c<0$ হয়, তবে L রেখা হইতে (x_1, y_1) বিন্দুর লম্ব-দূরত্ব হইবে

$$\pm\frac{c+ax_1+by_1}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \cdots (ii)$$

+ অথবা − চিহ্ন নির্ভর করে (x_1, y_1) বিন্দু রেখাটির অনুসারে **মূলবিন্দু-বর্জিত পার্শ্বে** অথবা **মূলবিন্দুর পার্শ্বে** অবস্থিত—তাহার উপর।

(i) ও (ii) কে যুক্তভাবে বলিলে, বলিতে হয় যে,

$ax+by+c=0$ রেখা হইতে (x_1, y_1) বিন্দুর লম্ব-দূরত্ব হইল

$$\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

যেখানে ইহার এবং c এর চিহ্ন একই হইবে, যখন (x_1, y_1) বিন্দু রেখাটির অনুসারে মূলবিন্দুর পার্শ্বে অবস্থিত হইবে, এবং উহাদের চিহ্ন বিপরীত হইবে, যখন (x_1, y_1) বিন্দু মূলবিন্দু-বর্জিত পার্শ্বে অবস্থিত হইবে।

[টীকা। ছাত্রছাত্রীরা স্মরণ রাখিতে পারে যে $ax+by+c=0$ রেখা হইতে (x_1, y_1) বিন্দুর লম্ব-দূরত্ব সর্বদা

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{+\sqrt{a^2+b^2}}$$

এখন $ax+by+c=0$ রেখা হইতে (x_1, y_1) বিন্দুর লম্ব-দূরত্বের সাংখ্যমান নির্ণয়ের আরও দুইটি পদ্ধতি আলোচনা করা হইবে।

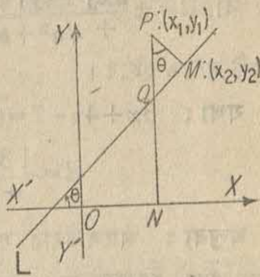
প্রশ্ন। প্রদত্ত : একটি বিন্দু P : (x_1, y_1), যাহা

$$L : ax+by+c=0$$

রেখার উপর অবস্থিত নহে।

নির্ণেয় : L রেখা **হইতে** P বিন্দুর লম্ব-দূরত্ব, d (মনে করা যাক)। dএর সাংখ্য-মান নির্ণয় করিতে হইবে

পদ্ধতি 1. P হইতে X-অক্ষের উপর $\overline{PN}$ লম্বপাত করা হইল। ধরা যাক, $\overline{PN}$, L রেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে Q এর ভুজ হইল $\overline{ON}=x_1$; Q এর কোটিকে y_3 দ্বারা নির্দেশ করা হইল।



চিত্র 5.13 রেখা হইতে একটি বহিঃস্থ বিন্দুর লম্ব-দূরত্ব

তাহা হইলে $\overline{QP}=\overline{NP}-\overline{NQ}=y_1-y_3$.

যেহেতু Q : (x_1, y_3) L রেখার উপর অবস্থিত, সুতরাং ইহার স্থানাঙ্ক L এর সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে ; অতএব

$$ax_1+by_3+c=0$$

$$\text{বা,}\quad y_3=-\frac{ax_1+c}{b}, \text{ (যদি } b\neq 0 \text{ হয়)}$$

$$\text{সুতরাং,}\quad \overline{QP}=y_1-y_3=y_1+\frac{ax_1+c}{b}=\frac{ax_1+by_1+c}{b} \quad \cdots \quad (1)$$

ধরা যাক, L ধনাত্মক x-অক্ষের উপর θ কোণে নত। এখন $\overline{QP}\cos\theta$ গুণফলটি বিবেচনা করা যাক্। P এবং L এর অবস্থান অনুসারে উৎপাদক দুইটির একটি অথবা দুইটিই ঋণাত্মক হইতে পারে।

[মূলত P এবং L এর চারিটি বিভিন্ন অবস্থান আছে : কারণ L এর ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক প্রবণতা হইতে পারে এবং P, L এর একদিকে অথবা অপরদিকে অবস্থিত হইতে পারে]

কিন্তু, গুণফলটির সাংখ্যমান, d দূরত্বের সমান :

$$d=|\overline{QP}\cos\theta| \quad \cdots \quad (2)$$

[5.13 চিত্র হইতে ইহা সুস্পষ্ট ; কিন্তু ছাত্রছাত্রীদের উচিত হইবে, P এবং L এর অপর অবস্থানগুলি অঙ্কনপূর্বক দেখান যে ঐ ক্ষেত্রগুলিতেও (2) বৈধ।]

যেহেতু L এর প্রবণতা হইল

$$\tan\theta = -\frac{a}{b},$$

সুতরাং $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\therefore\ d = |\overline{QP}\cos\theta| = \left|\frac{ax_1+by_1+c}{b} . \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \frac{|ax_1+by_1+c|}{+\sqrt{a^2+b^2}}$$

বা, $d = \pm\frac{ax_1+by_1+c}{+\sqrt{a^2+b^2}}$, যেখানে ডানপক্ষকে ধনাত্মক করিতে উপযুক্ত চিহ্নটি লইতে হইবে।

যথা : $3x+4y-7=0$ রেখা হইতে $(3, -2)$ বিন্দুর দূরত্ব হইল

$$d = \frac{|3.3+4(-2)-7|}{+\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|-6|}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}.$$

মন্তব্য : আলোচনার সময় ধরিয়া লওয়া হইয়াছে যে $b\neq 0$, সুতরাং পরোক্ষে ধরিয়া লওয়া হইয়াছে যে L রেখা y অক্ষের সমান্তরাল নহে। কিন্তু উপরে নির্ণীত d এর **সূত্রটি প্রয়োগ করা যাইবে তখনও যখন রেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল।** কারণ এই ক্ষেত্রে ইহা স্পষ্ট (একটি চিত্র অঙ্কন করিয়া লওয়া যাইতে পারে) যে

$$d = \left|x_1+\frac{c}{a}\right| = \left|\frac{ax_1+c}{a}\right|$$

এবং হুবহু একই ফল সূত্রটি হইতেও পাওয়া যায়, যদি উহাতে $b=0$ ধরা হয়।

পদ্ধতি 2. L : $ax+by+c=0$ রেখার উপর লম্ব এবং P : (x_1, y_1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ হইল

$$y-y_1 = \frac{b}{a}(x-x_1)$$

$$\text{বা,}\quad a(y-y_1)-b(x-x_1)=0.$$

যদি এই লম্বরেখা L রেখাকে M বিন্দুতে ছেদ করে এবং যদি M এর স্থানাঙ্ক (x_2, y_2) ধরা যায়, তবে, যেহেতু M উভয় রেখার উপর অবস্থিত, (চিত্র 5.13) অতএব

$$a(y_2-y_1)-b(x_2-x_1)=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

এবং $ax_2+by_2+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$

(ii)কে এইভাবে লেখা যায় (ax_1+by_1 কে যোগ ও বিয়োগ করিয়া) :

$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c+ax_1+by_1=0$$

বা, $a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)=-(ax_1+by_1+c) \quad \cdots \quad (iii)$

(i) ও (iii) হইতে, বর্গ করিয়া ও যোগ করিয়া, পাওয়া যায়

$$(a^2+b^2)\{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\}=(ax_1+by_1+c)^2.$$

সুতরাং,

$$|\overline{MP}|=+\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

অনুশীলনী

প্রথম পাঁচটি প্রশ্নের প্রত্যেকটি ক্ষেত্রে প্রদত্ত রেখা হইতে প্রদত্ত বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর :

	বিন্দু	রেখা
1.	(5, 2);	$3x-4y+6=0.$
2.	(6, −1);	$3x-y+1=0.$
3.	(3, 4);	$2x+5=0.$
4.	(−2, −5);	$y=0.$
5.	মূলবিন্দু;	$3x+2y-6=0.$

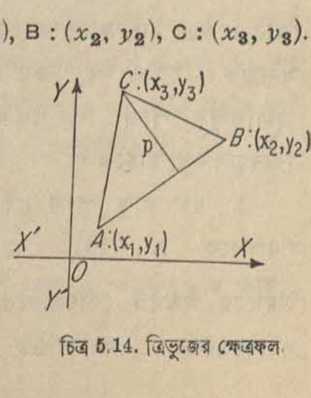
6. যে ত্রিভুজের শীর্ষতিনটি (2, 0), (3, 5) এবং (−1, 2) বিন্দুতে অবস্থিত তাহার উচ্চতাগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[উঃ 1. 13/5. 2. $2\sqrt{10}$. 3. 11/2. 4. 5.
5. $\frac{6}{13}\sqrt{13}$. 6. $\frac{17\sqrt{26}}{26}$, $\frac{17}{5}$, $\frac{5\sqrt{13}}{13}$.]

উদা. 11. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, যখন শীর্ষত্রয় প্রদত্ত (অনুচ্ছেদ 5·12এর প্রয়োগ)

দ্বিতীয় প্রণালী (অনুচ্ছেদ 2·5 দ্রষ্টব্য) :

ধরা যাক্ ABC ত্রিভুজের শীর্ষ A : (x_1, y_1), B : (x_2, y_2), C : (x_3, y_3). ইহার **ক্ষেত্রফল** নির্ণয় করিতে হইবে (চিত্র 5.14).



চিত্র 5.14. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

যে কোন একটি শীর্ষ, ধরা যাক্ C(x_3, y_3), হইতে বিপরীত বাহু ABর উপর লম্বপাত করা হইল। তাহা হইলে নির্ণেয় ক্ষেত্রফল$=\frac{1}{2}p.\overline{AB}$, যেখানে $p=$C হইতে ABর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য।

স্পষ্টত, $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) এর সংযোজক রেখা $\overleftrightarrow{AB}$র সমীকরণ

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

বা, $x(y_2-y_1)-y(x_2-x_1)+x_2y_1-x_1y_2=0$

$\therefore$ $p=$ AB রেখা হইতে C এর লম্ব-দূরত্ব

$$=\pm\frac{x_3(y_2-y_1)-y_3(x_2-x_1)+x_2y_1-x_1y_2}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}}$$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}p.\ \overline{AB}$

$$=\pm\tfrac{1}{2}[x_3(y_2-y_1)-y_3(x_2-x_1)+x_2y_1-x_1y_2]$$

$$=\pm\tfrac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)-y_1(x_2-x_3)+x_2y_3-x_3y_2]$$

$$=\pm\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ বর্গ একক}$$

5·13. দুইটি রেখার অন্তর্গত কোণসমূহের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ
(Equations of bisectors of angles between two lines)

প্রশ্ন। প্রদত্ত : দুইটি ছেদী রেখা

$$L_1 : ax+by+c=0$$

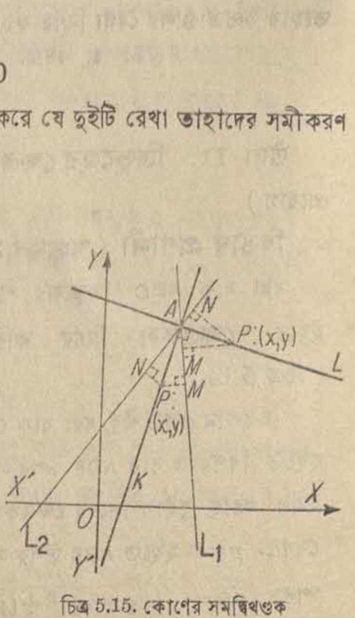
এবং $L_2 : a'x+b'y+c'=0$

ইহাদের অন্তর্গত কোণগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে যে দুইটি রেখা তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রমাণ। চিত্র 5.15 দ্রষ্টব্য।

1. সাধারণ চরিত্রটির কোন রূপ হানি না করিয়া ধরা যাইতে পারে যে c এবং c' ধনাত্মক। ইহার অর্থ, উভয় রেখার ক্ষেত্রেই **মূলবিন্দুর পার্শ্ব** (দিক্)কে **ধনাত্মক পার্শ্ব** বিবেচনা করা যাইতে পারে।

2. ধরা যাক্ প্রদত্ত L_1 এবং L_2 রেখা পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। উহাদের অন্তর্গত কোণগুলিকে $\overleftrightarrow{AK}$ এবং $\overleftrightarrow{AL}$ সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।



চিত্র 5.15. কোণের সমদ্বিখণ্ডক

সাধারণতঃ, রেখা দুইটির অন্তর্গত সূক্ষ্মকোণটির সমদ্বিখণ্ডককে **অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক** এবং অপরটিকে তখন **বহিঃসমদ্বিখণ্ডক** বলা হয়। উভয় রেখারই সমীকরণ নির্ণয় করা হইবে।

3. বিন্দু P : (x, y) যদি এইরূপভাবে সঞ্চার করে যে L_1 হইতে ইহার দূরত্ব $\overline{PM}$ = L_2 হইতে ইহার দূরত্ব $\overline{PN}$ হয়, তবে P এর সঞ্চার-পথের সমীকরণ নির্ণয় করিলে অভীষ্ট সমীকরণ পাওয়া যাইবে। এই দূরত্ব নির্দেশক রাশিদ্বয় হইল

$$\overline{PM}=\pm\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \overline{PN}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}.$$

4. প্রথমে সমদ্বিখণ্ডক $\overleftrightarrow{AK}$ সম্পর্কে (চিত্র 5.15) বিবেচনা করা যাক্। ইহা মূলবিন্দুর ধারক কোণটির সমদ্বিখণ্ডক। ইহার উপর যে কোন বিন্দু P, L_1 এবং L_2 উভয় রেখারই মূলবিন্দুর পার্শ্বে (দিকে) অবস্থিত; আর তাহা না হইলে উভয় রেখারই মূলবিন্দু-বর্জিত পার্শ্বে অবস্থিত। সুতরাং লম্ব $\overline{PM}$ এবং $\overline{PN}$ এর দৈর্ঘ্য-নির্দেশক রাশি দুইটি হয় **উভয়ই** ধনাত্মক নতুবা **উভয়ই** ঋণাত্মক। যে কোন ক্ষেত্রে, এই সমদ্বিখণ্ডকের উপর যে কোন বিন্দুর পক্ষে এই সম্পর্ক, যথা :

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

বজায় থাকে। সুতরাং যে কোণের অন্তর্গত মূলবিন্দু রহিয়াছে তাহার সমদ্বিখণ্ডক $(\overleftrightarrow{AK})$ এর ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

5. এখন অপর সমদ্বিখণ্ডিত $\overleftrightarrow{AL}$ কে বিবেচনা করিতে হইবে। ইহার উপর যে কোন বিন্দুর অবস্থান এইরূপ যে মূলবিন্দু ও ঐ বিন্দু P, L_1 এর পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে এবং L_2 এর একই পার্শ্বে নতুবা L_1 এর একই পার্শ্বে এবং L_2 এর পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হয়। সুতরাং L_1 এবং L_2 এর উপর লম্ব $\overline{PM}$ এবং $\overline{PN}$ এর দৈর্ঘ্য সূচক রাশি দুইটির একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক। যে কোন ক্ষেত্রে, এই সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু P এর পক্ষে এই সম্পর্কটি, যথা :

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\frac{a'x+b'x+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

সর্বদা বজায় থাকে এবং ইহাই হইল, মূলবিন্দু যে কোণটির অন্তর্গত নহে তাহার সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ।

6. সুতরাং সমদ্বিখণ্ডক দুইটির সমীকরণ হইল

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}},$$

যেখানে ধনাত্মক চিহ্ন (উপরের চিহ্নটি) সেই সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ দিবে, যাহা মূলবিন্দুর ধারক কোণটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে (যদি অবশ্য c এবং c' উভয়কেই ধনাত্মক লওয়া হয়)।

উদা. 12. $3x-4y-2=0$ এবং $5x+12y+6=0$ সরলরেখা দুইটির অন্তর্গত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমীকরণ দুইটিকে এইভাবে লেখা হইল যেন ধ্রুবক পদগুলি ধনাত্মক হয়, যথা :

$$2-3x+4y=0 \text{ এবং } 6+5x+12y=0$$

সুতরাং মূলবিন্দু যে কোণের অন্তর্ভুক্ত তাহার সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$\frac{2-3x+4y}{\sqrt{(-3)^2+(4^2)}}=\frac{6+5x+12y}{\sqrt{5^2+12^2}}$$

অর্থাৎ $13(2-3x+4y)=5(6+5x+12y)$

অর্থাৎ $\mathbf{16x+2y+1=0.}$

অপর সমদ্বিখণ্ডকটির সমীকরণ হইল

$$\frac{2-3x+4y}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=-\frac{6+5x+12y}{\sqrt{5^2+12^2}}$$

অর্থাৎ $\mathbf{8y-x+4=0.}$

উদা. 13. কোন ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A, B, C বিন্দুগুলি হইল যথাক্রমে

$$(1,2), (25,8) \text{ এবং } (9,21)\,;$$

ত্রিভুজটির অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় কর।

$\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$, $\overleftrightarrow{AB}$ বাহুগুলির সমীকরণ সহজেই নির্ণেয়—তাহারা হইল যথাক্রমে

$$13x+16y-453=0,\ 19x-8y-3=0 \text{ এবং } x-4y+7=0.$$

ইহাদের এইরূপভাবে লিখিতে হইবে যেন উহাদের ধ্রুবক পদগুলি সকলে ধনাত্মক হয়, যেমন

$$453-13x-16y=0,\ 3-19x+8y=0 \text{ এবং } x-4y+7=0.$$

$\overleftrightarrow{BC}$ এবং $\overleftrightarrow{CA}$ এর অন্তর্বর্তী যে কোণের অন্তর্গত মূলবিন্দু নহে, তাহার সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$\frac{453-13x-16y}{\sqrt{13^2+16^2}}=-\frac{3-19x+8y}{\sqrt{19^2+8^2}}$$

ইহাই ACB কোণের সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র 5.16)।

$\overleftrightarrow{CA}$ এবং $\overleftrightarrow{BA}$ এর অন্তর্বর্তী যে কোণের অন্তর্গত মূলবিন্দু, তাহার সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$\frac{3-19x+8y}{\sqrt{19^2+8^2}}=+\frac{x-4y+7}{\sqrt{1^2+4^2}}$$

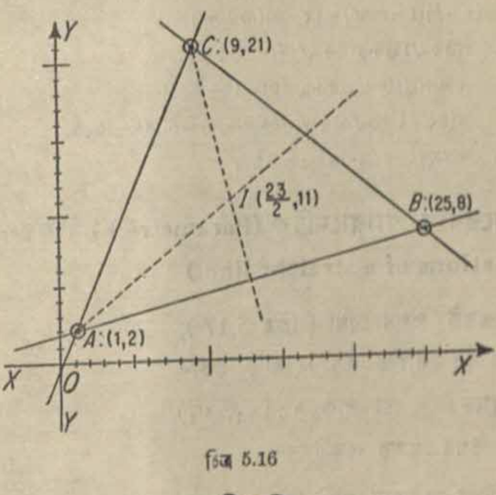
লক্ষ্য কর, ইহাই BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র 5.16)।

এই দুই সমদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দুই ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র।

সুতরাং কেন্দ্রটি পাওয়া যাইবে নিম্নলিখিত সমীকরণ হইতে, যথা :

$$\frac{453-13x-16y}{5\sqrt{17}}=\frac{19x-8y-3}{5\sqrt{17}}=\frac{4y-x-7}{\sqrt{17}}$$

x এবং y সমাধানপূর্বক নির্ণেয় অন্তর্বৃত্তের স্থানাঙ্ক হইল $\left(\frac{23}{2}, 11\right)$.



চিত্র 5.16

অনুশীলনী

নিম্নে প্রদত্ত রেখাগুলির অন্তর্বর্তী কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর (প্রঃ 1—প্রঃ 5) :

1. $13x-9y=10$ এবং $x+3y=6$.
2. $2x+y+1=0$ এবং $11x+2y=2$.
3. $y=3x$ এবং $x+y=1$.

4. $3x-4y+7=0$ এবং $12x-5y-8=0$.

5. $y-b=\dfrac{2m}{1-m^2}(x-a)$ এবং $y-b=\dfrac{2m'}{1-m'^2}(x-a)$.

6. যে ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ

$3x+5y=15,\ x+y=4$ এবং $2x+y=6$,

তাহার অন্তঃস্থ কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. প্রশ্ন 6 এর অনুরূপ—এখানে বাহুগুলির সমীকরণ তিনটি ধর

$7x-y+11=0,\ x+y-15=0$ এবং $7x+17y+65=0$,

অন্তঃকেন্দ্রের (in-centre) স্থানাঙ্কও নির্ণয় কর।

[উঃ 1, $2x-6y+5=0$; $9x+3y=20$, 2, $21x+7y+3=0$; $x-3y=7$,

3, $(3\pm\sqrt{5})x-(1\mp\sqrt{5})y=\pm\sqrt{5}$,

4, $99x-77y+51=0$; $21x+27y-131=0$,

5, $(y-b)(m+m')+(x-a)(1-mm')=0$;

$(y-b)(1-mm')-(x-a)(m+m')=0$,

6, $x(3+\sqrt{17})+y(5+\sqrt{17})=15+4\sqrt{17}$;

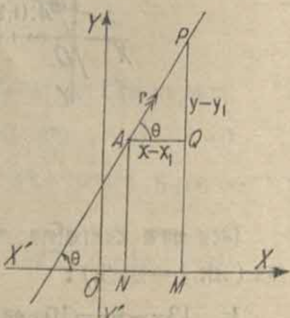
$x(4+\sqrt{10})+y(2+\sqrt{10})=12+4\sqrt{10}$;

$x(2\sqrt{34}-3\sqrt{5})+y(\sqrt{34}-5\sqrt{5})=6\sqrt{34}-15\sqrt{5}$,

7, অন্তঃকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $=(5,\ 1)$.]

5·14. সরলরেখার 'প্যারামেট্রিক' (Parametric) সমীকরণ (Parametric Equations of a straight line)

ধরা যাক, একটি প্রদত্ত রেখা (চিত্র 5.17), ধনাত্মক x-অক্ষের সহিত θ $(\neq 90°)$ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। ধরা যাক $A:(x_1,\ y_1)$ প্রদত্ত রেখার উপর প্রদত্ত একটি বিন্দু।



চিত্র 5.17

রেখাটির উপর যে কোন একটি বিন্দু P লওয়া হইল। ধরা যাক P এর স্থানাঙ্ক $(x,\ y)$।

আরও ধরা যাক দিক-নির্দেশিত রেখাংশ $\overline{AP}=r$; তাহা হইলে চিত্র হইতে,

$\overline{AQ}=\overline{NM}=\overline{OM}-\overline{ON}=x-x_1$,

$\overline{QP}=\overline{MP}-\overline{MQ}=\overline{MP}-\overline{NA}=y-y_1$;

আবার $\triangle PAQ$ হইতে,

$$r\cos\theta = x - x_1$$

এবং $r\sin\theta = y - y_1$

ইহাদের এইভাবে লেখা হইল, যথা :

$$x = x_1 + r\cos\theta,\; y = y_1 + r\sin\theta \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

বা, $$\frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} = r \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$$

(i) অথবা (ii), রেখাটির উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্কদ্বয়ের মধ্যে বিদ্যমান সম্পর্কটি প্রকাশ করে ; সুতরাং (i) অথবা (ii) রেখাটির সমীকরণ।

মন্তব্য 1. r এর মান ঋণাত্মক হইবে যদি P বিন্দুটি A র অপরদিকে অবস্থিত হয় (চিত্র 6.17 দ্রষ্টব্য)।

2. r যে ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হইতে পারে ইহা ধরিয়া লইয়া রেখাটির উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইল

$$x_1 + r\cos\theta \quad \text{এবং} \quad y_1 + r\sin\theta \quad \cdots \quad (iii)$$

এইভাবে রেখাটির যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্কদ্বয় (x, y):কে একটিমাত্র অজ্ঞাত চল r [x_1, y_1 এবং θ জ্ঞাত থাকায়] এর সাহায্যে প্রকাশ করা হইয়াছে। এই ক্ষেত্রে বলা হইয়া থাকে যে "x এবং y কে একটি **প্যারামিটার (parameter)** r এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হইয়াছে।" সমীকরণদ্বয় (i) কে রেখাটির 'প্যারামেট্রিক' (parametric) সমীকরণ বলা হয়। (iii) হইতে রেখাটির যে কোন বিন্দু P এর **প্যারামেট্রিক (parametric) স্থানাঙ্ক দুইটি** পাওয়া যায়।

উদা. 14. একটি রেখার প্রবণতা $\frac{3}{4}$ এবং উহা $P : (-2, -5)$ বিন্দুগামী। রেখাটির উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু $Q : (x, y)$ এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। যদি $\overline{PQ} = 10$ হয়।

$$x = -2 + 10\cos\theta,\; y = -5 + 10\sin\theta,$$

এখানে দেওয়া আছে যে $\tan\theta = \frac{3}{4}$;

ফলে $\cos\theta = \pm\frac{4}{5}$ এবং $\sin\theta = \pm\frac{3}{5}$ [দুইটিই + অথবা দুইটিই −]

$\therefore$ $\left.\begin{aligned} x &= -2 + 10\times\tfrac{4}{5} \\ \text{এবং } y &= -5 + 10\times\tfrac{3}{5} \end{aligned}\right\}$ বা, $\left.\begin{aligned} &-2 + 10\times(-\tfrac{4}{5}) \\ &-5 + 10\times(-\tfrac{3}{5}) \end{aligned}\right\}$

$\therefore$ **Q হইল (6, 1) বিন্দু বা, (−10, −11) বিন্দু।**

উদা. 15. (1, 2) বিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা কি অভিমুখে অঙ্কিত হইলে উহার $x+y=4$ রেখার সহিত ছেদবিন্দুটি প্রদত্ত বিন্দু হইতে $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ একক দূরত্বে অবস্থিত হইবে, তাহা নির্ণয় কর।

যদি রেখাটি ধনাত্মক x-অক্ষের সহিত θ কোণ করে, তবে রেখাটির উপরিস্থ যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দুইটি হইল

$$x=1+\tfrac{1}{3}\sqrt{6}\cos\theta$$
$$y=2+\tfrac{1}{3}\sqrt{6}\sin\theta$$

এইরূপ একটি বিন্দু অবশ্যই $x+y=4$ রেখার উপরও অবস্থিত হইবে।

$$\therefore\ 1+\tfrac{1}{3}\sqrt{6}\cos\theta+2+\tfrac{1}{3}\sqrt{6}\sin\theta=4$$

$$\text{বা},\quad \cos\theta+\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{6}}$$

$$\text{বা},\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ \sin(\theta+45^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ \theta+45^\circ=60^\circ,\ \text{বা},\ 120^\circ$$

$$\therefore\ \theta=15^\circ,\ \text{বা},\ 75^\circ.$$

অনুশীলনী

1. A হইল $(-5, -3)$ বিন্দু এবং B, $x-3y-1=0$ রেখার উপর অবস্থিত। $\overline{AB}$, x-অক্ষের সহিত একটি সূক্ষ্ম কোণে নত, যাহার tangent হইল $\frac{5}{12}$; $\overline{AB}$র দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [উঃ 13 একক]

2. $\frac{5}{12}$ প্রবণতার একটি রেখা A : $(3, -\frac{7}{2})$ বিন্দুগামী; রেখাটির উপর অবস্থিত কোন বিন্দু B এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর, যেখানে $\overline{AB}=\frac{13}{2}$. [উঃ (9, −1) বা (−3, −6)]

5·15. কতিপয় সাধারণ পদ্ধতি : সমবিন্দুতা (Concurrence)

উদা. 16(a). নিম্নের উক্তিটি যাচাই করিতে হইবে :

দুইটি প্রদত্ত রেখা, যথা :

$$L_1 \equiv ax+by+c=0 \quad \cdots \quad (i)$$
$$L_2 \equiv a'x+b'y+c'=0 \quad \cdots \quad (ii)$$

এর ছেদবিন্দুগামী যে কোন রেখার সমীকরণকে নিম্নের আকারে, যথা :

$$(ax+by+c)+\lambda(a'x+b'y+c')=0 \quad \cdots \quad (iii)$$

লেখা যায়, যেখানে λ হইল যে কোন অনির্দিষ্ট (arbitrary) ধ্রুবক।

ধরা যাক A : (x_1, y_1) হইল (i) এবং (ii) এর ছেদবিন্দু।

$\therefore$ Aর স্থানাঙ্ক (i) ও (ii) উভয়কেই সিদ্ধ করিবে ; সুতরাং

$$ax_1+by_1+c=0$$

এবং $$a'x_1+b'y_1+c'=0.$$

$\therefore$ (x_1, y_1), λর যে কোন মানে (iii) কে সিদ্ধ করে, এবং ফলে (x_1, y_1) হইল (iii) এর সঞ্চারপথের উপর একটি বিন্দু।

কিন্তু (iii) হইল x এবং y সংশ্লিষ্ট প্রথম ঘাতের সমীকরণ, যথা :

$$x(a+\lambda a')+y(b+\lambda b')+c+\lambda c'=0,$$

সুতরাং ইহা একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে।

$\therefore \lambda$ র যে কোন মানে (iii) সমীকরণটি (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু A গামী একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে।

উদা. 16(b). $x+2y+3=0$ এবং $3x+4y+7=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $x-y+8=0$ সরলরেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রথম পদ্ধতি : $x+2y+3=0$ এবং $3x+4y+7=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হইল

$$x+2y+3+\lambda(3x+4y+7)=0,$$

যেখানে λ হইল যে কোন অনির্দিষ্ট ধ্রুবক,

বা, $$x(1+3\lambda)+y(2+4\lambda)+3+7\lambda=0 \quad \cdots (i)$$

এই রেখার প্রবণতা $= -\dfrac{1+3\lambda}{2+4\lambda}$.

রেখা (i), $x-y+8=0$ রেখার উপর লম্ব হইবে, যদি

$$-\frac{1+3\lambda}{2+4\lambda}\times 1=-1, \quad \text{অর্থাৎ যদি } \lambda=-1.$$

λ এর এই মান লইয়া নির্ণেয় সমীকরণটি হয় [(i) এ $\lambda=-1$ ধরিয়া]

$$x(1-3)+y(2-4)+3-7=0$$

বা, $$x+y+2=0.$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি। $x+2y+3=0$ এবং $3x+4y+7=0$ এই সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া ইহাদের সাধারণ বিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া যায় :

$$x_1=-1, \ y_1=-1$$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখা $(-1, -1)$ বিন্দু দিয়া যায় এবং $x-y+8=0$ রেখার উপর লম্ব।

সুতরাং ইহার সমীকরণের আকার হইবে

$$y+x+c=0, \text{ যেখানে } c=2$$

[$(-1, -1)$ বিন্দুটা রেখাটির উপর অবস্থিত এই বিবেচনা হইতে c এর মান পাওয়া যায়]। সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$x+y+2=0.$$

উদা. 17(a). উক্তিটি যাচাই কর :

এই তিনটি রেখা, যথা :

$$L_1 \equiv a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \cdots (i)$$
$$L_2 \equiv a_2x+b_2y+c_2=0 \quad \cdots (ii)$$
$$L_3 \equiv a_3x+b_3y+c_3=0 \quad \cdots (iii)$$

সমবিন্দু (concurrent) হইবে, যদি এমন তিনটি ধ্রুবক k, l, m (সকলেই শূন্য নহে) বিদ্যমান হয় যাহাতে

$$k(a_1x+b_1y+c_1)+l(a_2x+b_2y+c_2)+m(a_3x+b_3y+c_3)=0 \cdots (iv)$$

এই সম্বন্ধ অভেদ গুণসম্পন্নভাবে বজায় থাকে (holds identically) অর্থাৎ x এবং y এর সকল মানের জন্যই অভেদটি সিদ্ধ হয়)

ধরা যাক্ (i) এবং (ii) রেখা পরস্পরকে (x_1, y_1) বিন্দুতে ছেদ করে ; সুতরাং

$$a_1x_1+b_1y_1+c_1=0$$
$$a_2x_1+b_2y_1+c_2=0$$

$\therefore$ (iv) সমীকরণ হইতে,

$$a_3x_1+b_3y_1+c_3=0$$

[$\because$ (iv) x এবং y এর সকল মানে বজায় থাকে,

$\therefore$ $x=x_1$ এবং $y=y_1$ মানেও উহা বজায় থাকে।]

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দু (iii) এর উপর অবস্থিত।

অর্থাৎ $(i), (ii), (iii)$ রেখাত্রয় সমবিন্দু, যদি (iv) সম্পর্কটি বজায় থাকে।

মন্তব্য : তিনটি সরলরেখার সমবিন্দুতা প্রমাণের ইহা শ্রেষ্ঠতর পদ্ধতি। কিন্তু, যদি k, l, m ধ্রুবক তিনটি সহজে নির্ণয় করা না যায়, তাহা হইলে ছাত্রছাত্রীরা নিম্নলিখিত পদ্ধতি অবলম্বন করিতে পারে :

1. (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু (x_1, y_1) নির্ণয় কর, যথা :

$$x_1=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \quad y_1=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

2. এই বিন্দু (iii) এর উপর অবস্থিত হইবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি

$$a_3.\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}+b_3.\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}+c_3=0 \text{ হয়।}$$

3. সুতরাং তিনটি রেখা (*i*), (*ii*) এবং (*iii*) এর সমবিন্দুতার জন্য নিম্নলিখিত সর্তটিকে অবশ্যই বজায় থাকিতে হইবে, যথা :

$$a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)=0.$$

ছক আকারে (in the determinant form) শর্তটি হইল :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

উদা. 17(*b*). দেখাও যে রেখাত্রয়

$x-4y+2=0,\ 4x-y+3=0,\ x+2y=0$ একটি বিন্দুতে মিলিত হয়।

প্রথম পদ্ধতি : পর্যবেক্ষণ দ্বারা দেখা যায় যে 3, −2 এবং 5 এমন তিনটি ধ্রুবক যে

$$3(x-4y+2)-2(4x-y+3)+5(x+2y)\equiv 0.$$

সুতরাং রেখা তিনটি সমবিন্দু।

দ্বিতীয় পদ্ধতি : $x-4y+2=0,\ 4x-y+3=0$ সমাধান করিয়া ইহাদের ছেদবিন্দু (x_1, y_1) পাওয়া যায়, যেখানে $x_1=-2/3,\ y_1=1/3$. $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ বিন্দু তৃতীয় সমীকরণ $x+2y=0$ কে সিদ্ধ করে। সুতরাং রেখা তিনটি সমবিন্দু এবং সাধারণ বিন্দুটি হইল $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

প্রয়োজনীয় ও গুরুত্বপূর্ণ ফলসমূহ : সংক্ষেপ

(Useful results : A summary)

1. কোন রেখার প্রবণতা $=m=\tan\theta=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

2. দুইটি রেখা সমান্তরাল যদি এবং কেবলমাত্র যদি $m=m'$.

   দুইটি রেখা পরস্পর লম্ব যদি এবং কেবলমাত্র যদি $m\times m'=-1$.

3. L_1 রেখা হইতে L_2 রেখা পর্যন্ত কোণ ϕ হইলে

$$\tan\phi=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}.$$

4. স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল রেখা : $x=k$ (y-অক্ষের সমান্তরাল)
   $y=l$ (x-অক্ষের সমান্তরাল)

   x-অক্ষের সমীকরণ : $y=0$

   y-অক্ষের সমীকরণ : $x=0$.

5. সরলরেখার সমীকরণ :

(*a*) বিন্দু-প্রবণতা আকার : $y-y_1=m(x-x_1)$.

(*b*) প্রবণতা-ছেদিতাংশ আকার : $y=mx+c$.

(*c*) দুইটি বিন্দু (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) দিয়া যাইলে :

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

(*d*) ছেদিতাংশ-আকার : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

(*e*) অভিলম্ব-আকার : $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$.

(*f*) 'প্যারামেট্রিক'-আকার : $\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r$.

6. প্রথম ঘাতের সাধারণ সমীকরণ : $ax+by+c=0$ কে বিভিন্ন আকারে প্রকাশ :

(*a*) প্রবণতা-ছেদিতাংশ আকার : $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$. $(b\neq 0)$

(*b*) ছেদিতাংশ আকার : $\frac{x}{-c/a}+\frac{by}{-c/b}=1$. $(a, b, c\neq 0)$

(*c*) অভিলম্ব আকার :

$$-\frac{ax}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{by}{\sqrt{a^2+b^2}}=+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},\ c>0$$

$$\frac{ax}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{by}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}},\ c<0.$$

7. দুইটি রেখার ছেদবিন্দু (x_1, y_1) নির্ণয়ের জন্য সমীকরণ দুইটি সমাধান কর : $ax+by+c=0$ এবং $a'x+b'y+c'=0$.

8. দুইটি রেখার অন্তর্গত কোণ নির্ণয়ের জন্য রেখা দুইটির প্রবণতা নির্ণয় কর এবং উপরের 3 সূত্র প্রয়োগ কর।

9. (*a*) দুইটি রেখা পরস্পর সমান্তরাল যদি এবং কেবলমাত্র যদি তাহাদের সমীকরণগুলির আকার হয় :

$$ax+by+c=0 \text{ এবং } ax+by+c'=0.$$

(b) দুইটি রেখা পরস্পর লম্ব হয় যদি এবং কেবলমাত্র যদি উহাদের সমীকরণগুলির আকার হয় :

$$ax+by+c=0 \text{ এবং } bx-ay+c'=0.$$

10. $ax+by+c=0$ এর ধ্রুবক পদ c কে সর্বদা ধনাত্মক কর।

যদি ax_1+by_1+c এবং ax_2+by_2+c এর চিহ্ন একই হয়, তবে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় $ax+by+c=0$ এর একই পার্শ্বে, নতুবা উহারা রেখাটির পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

11. $ax+by+c=0$ রেখা হইতে $P:(x_1, y_1)$ বিন্দুর লম্ব-দূরত্বের সাংখ্যমান হইল

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{+\sqrt{a^2+b^2}}.$$

12. দুইটি রেখা, যথা :

$L_1 : a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $L_2 : a_2x+b_2y+c_2=0$

এর অন্তর্গত কোণসমূহের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ (c_1 এবং c_2 ধনাত্মক ধরিয়া) হইল :

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{+\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{+\sqrt{a_2^2+b_2^2}},$$

যেখানে উপরের চিহ্নটি (+) মূলবিন্দুর ধারক কোণের সমদ্বিখণ্ডক দিবে।

13. $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে কোন রেখার সমীকরণের আকার

$$a_1x+b_1y+c_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2)=0,$$

যেখানে λ হইল অনির্দিষ্ট যে কোন ধ্রুবক।

14. তিনটি রেখা $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ এবং $a_3x+b_3y+c_3=0$ সমবিন্দু ; যদি, সকলে শূন্য নহে এইরূপ তিনটি ধ্রুবক k, l, m পাওয়া যায় যাহাতে

$$k(a_1x+b_1y+c_1)+l(a_2x+b_2y+c_2)+m(a_3x+b_3y+c_3)=0 \text{ হয়।}$$

15. 14 নং এর তিনটি রেখার সমবিন্দু হইবার সর্ত হইল

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

বা, $a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)=0.$

অধ্যায় 5 এর উপর
বিবিধ প্রশ্নমালা
[A]

1. $(a \cos \theta, a \sin \theta)$ বিন্দুগামী যে রেখা x-ছেদিতাংশ $a/\cos \theta$ উৎপন্ন করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. সরলরেখা $x+ay=a$, x-অক্ষ ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে ; যদি $\overline{OA}=3\overline{OB}$ হয়, তবে $\overleftrightarrow{AC}$র সমীকরণ নির্ণয় কর, যেখানে C হইল $(0, -9)$ বিন্দু এবং দেখাও যে $\overline{AC}$, $\overline{AB}$র উপর লম্ব।

3. $8x-2y-3=0$ এবং $kx-5y+2=0$ রেখাদ্বয় পরস্পর $\pi/4$ কোণে নত ; প্রমাণ কর যে $k=3$ বা $-25/3$.

4. দেখাও যে রেখাদ্বয় $(1-m)y-(1+m)x=c$ এবং $y=mx+c$ পরস্পর 45° কোণে নত।

5. A, B, C হইল বিন্দু $(-1, 2)$, $(8, 5)$, $(4, 9)$; D বিন্দু ABর উপর অবস্থিত এবং $\overline{AD} : \overline{DB}=1 : 2$; $\overleftrightarrow{DC}$'র সমীকরণ নির্ণয় কর।

6. $P : (\alpha, \beta)$ বিন্দু, $y=6x+1$ রেখার উপর অবস্থিত এবং $Q : (\beta, \alpha)$ বিন্দু $2x-5y=5$ রেখার উপর অবস্থিত ; $\overleftrightarrow{PQ}$ এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. বিন্দু $P : (-2, -3)$, রেখা $\overleftrightarrow{AB}$র উপর অবস্থিত, যাহার সমীকরণ হইল $4x+ky=1$; যদি $\overline{AP}=\overline{PB}=10$ হয়, তবে A এবং B এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[এখানে প্যারামেট্রিক সমীকরণ সুবিধাজনক হইবে।]

8. নিম্নের প্রত্যেক রেখাযুগল যাচাই করিয়া বল, উহারা সমান্তরাল অথবা লম্ব কিনা ; যখন উহারা দুইটির কোনটিই নয় তখন উহাদের অন্তর্গত কোণের ত্রিকোণমিতিক tangent নির্ণয় কর :

(*i*) $2x-3y+1=0$ এবং $16x-24y+7=0$

(*ii*) $x+2y+4=0$ এবং $x-3y+2=0$

(*iii*) $2x+3y+6=0$ এবং $6x-4y+3=0$

(*iv*) $3x+4y-7=0$ এবং $2x+5y+7=0$.

9. $(a \sec \theta, b \tan \theta)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যদি উহা রেখা $\frac{x}{a} \sec \theta-\frac{y}{b} \tan \theta=1$ এর উপর লম্ব হয়।

10. (1, 2) বিন্দু হইতে $4x-3y+2=0$ রেখা বরাবর $x-2y-2=0$ রেখা পর্যন্ত দূরত্ব নির্ণয় কর।

[B]

1. একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A : (−3, 3), B : (−5, −1) এবং C : (4, −4) ; উহার পরিকেন্দ্র (circum-centre) নির্ণয় কর।

2. (−2, −3), (6, 1) এবং (1, 6) যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তাহার লম্ব-বিন্দু (ortho-centre) নির্ণয় কর।

3. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি (3, −4), (−5, 4), (−3, −8) হইলে উহার ভরকেন্দ্র (centroid) নির্ণয় কর।

4. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ

$$78x+8y=5,\ 11x+y+50=0 \text{ এবং } 4x-7y=26;$$

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

5. দেখাও যে m এর সকল মানে $(a, 0)$ হইতে $y=mx+a/m$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু y-অক্ষের উপর অবস্থিত হইবে।

6. x-অক্ষ এবং y-অক্ষের উপর $\overleftrightarrow{AB}$ যথাক্রমে ছেদিতাংশ $2a$ এবং a, এবং $\overleftrightarrow{CD}$ যথাক্রমে ছেদিতাংশ $-a$ এবং $2a$ উৎপন্ন করে; দেখাও যে $\overleftrightarrow{AB}$ এবং $\overleftrightarrow{CD}$ $3x+y=0$ রেখার উপর পরস্পরকে ছেদ করে।

7. দেখাও যে $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ রেখাকে নিম্নলিখিত

$$\frac{x-p\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\frac{y-p\sin\alpha}{\cos\alpha}=r \text{ আকারে লেখা যায়।}$$

8. কোন চতুর্ভুজের ক্রম-অনুসারে গৃহীত দুইটি বাহুর সমীকরণ হইল

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p \quad \cdots \quad (i)$$

$$x\cos\beta+y\sin\beta=p_1 \quad \cdots \quad (ii)$$

এবং মূলবিন্দু হইতে (ii) এবং (i) এর উপর অঙ্কিত লম্ব-দৈর্ঘ্য যথাক্রমে p_1 এবং p; দেখাও যে চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল

$$=\frac{2pp_1-(p^2+p_1^2)\cos(\beta-\alpha)}{2\sin(\beta-\alpha)}.$$

9. $5x-12y-5=0$ এবং $5x-12y+21=0$, এই দুইটি সমান্তরাল রেখার মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।

10. দেখাও যে $2x-3y+1+k(3x+y-1)=0$, $l(2x-3y+1)-(3x+y-1)=0$ এবং $x-7y+3=0$ এই রেখাগুলি সমবিন্দু।

[C]

1. একটি সঞ্চারমান রেখা x-অক্ষ এবং y-অক্ষের উপর এইরূপ ছেদিতাংশ a এবং b উৎপন্ন করে যেন $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6}$ হয়; দেখাও যে উহা সকল অবস্থানে অবশ্যই $(6, 6)$ বিন্দুর মধ্য দিয়া যাইবে।

2. $x \cos \theta+y \sin \theta=p$ রেখা A, B বিন্দুতে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষকে ছেদ করে; θ চল (variable) হইলে দেখাও যে $\overline{AB}$র মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $p^2(x^2+y^2)=4x^2y^2$.

3. A, B হইল বিন্দু (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) এবং P, $\overline{AB}$কে $m : n$ অনুপাতে বিভক্ত করে; P, $Ax+By+C=0$ রেখার উপর অবস্থিত ; দেখাও যে

$$\frac{m}{n}=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$$

ইহা হইতে $Ax+By+C=0$ রেখা সম্পর্কে A এবং B এর অবস্থান নির্ণয়ের **একটি** সূত্র নিরূপণ কর (অনুচ্ছেদ 5·11)।

4. $3x-4y+1=0$ রেখা $(4, -3)$ এবং $(5, -1)$ এর সংযোজক রেখাংশকে যে অনুপাতে বিভক্ত করে, তাহা নির্ণয় কর।

5. দেখাও যে $x-y+2=0$, $3x+y+4=0$ এই রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ, নিম্নলিখিত রেখাদ্বয়, যথা : $x-4y+3=0$, $9x-2y+1=0$ এর অন্তর্গত কোণের সমান।

6. $x-3y-2=0$ রেখার উপর অবস্থিত এবং $(2, 3)$ ও $(6, -5)$ বিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

7. দেখাও যে নিম্নে প্রদত্ত রেখাদ্বয়, যথা :

$$x \sin \theta-y(\cos \theta-1)=a \sin \theta$$

এবং $x \sin \theta-y(\cos \theta+1)=-a \sin \theta$

এর ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $x^2+y^2=a^2$.

8. $x+y-5=0$ এবং $x-2y+4=0$ রেখাদ্বয়ের সহিত সমবিন্দু যে রেখার প্রবণতা $\frac{4}{3}$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. দেখাও যে নিম্নলিখিত রেখাগুলি, যথা :

$$\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1$$

$$-\frac{x}{a}\sin\theta+\frac{y}{b}\cos\theta=1$$

$bx+ay\tan(\theta-\pi/4)=0$ হইল সমবিন্দু।

[D]

1. $(-3, 1)$ বিন্দুগামী এবং $5x-2y+7=0$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. $2x-7y+11=0$ এবং $x+3y-8=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর, যদি উহা

(i) মূলবিন্দুর মধ্য দিয়া যায়।

(ii) $2x-5y+6=0$ রেখার উপর লম্ব হয়।

(iii) অক্ষদ্বয়ের উপর সমচিহ্নের সমান ছেদিতাংশ উৎপন্ন করে।

3. $(-2, 7)$ এবং $(8, -1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। মূল-বিন্দু হইতে এই লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক কত দূরে অবস্থিত ?

4. যে ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি $(2, 7)$, $(-6, 1)$ এবং $(4, -5)$, তাহার লম্ব-বিন্দু নির্ণয় কর।

5. $(3, 2)$ এবং $3x+y-5=0$ ও $x+5y+3=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণটিকে ছেদিতাংশ আকারে প্রকাশ কর।

এই রেখা স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয় হইতে যে ত্রিভুজ ছিন্ন করে তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

6. দেখাও যে বিন্দুত্রয় $(3, 1)$, $(5, -5)$ এবং $(-1, 13)$ সমরেখ। যে রেখার উপর উহারা অবস্থিত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. কোন ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(3, 2)$ এবং $(5, 6)$। যদি ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 12 বর্গএকক হয়,তবে উহার তৃতীয় শীর্ষের সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. একটি সঞ্চারমান রেখা $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ এইরূপভাবে গতিশীল যে $a+b=10$; উহার যে অংশ অক্ষদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত তাহার মধ্যপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. $3x+4y=24$ রেখা y-অক্ষকে A এবং x-অক্ষকে B তে ছেদ করে। $\overline{AB}$র লম্ব-সমদ্বিখককে $(0, -1)$ বিন্দুগামী ও x-অক্ষের সমান্তরাল রেখা C তে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে ACB এক সমকোণ।

10. $2x+6y-1=0$, $4x-2y-9=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $3x+4y=0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[E]

1. $(0, a)$ বিন্দুগামী এমন দুইটি রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর, যাহাদের উপর $(2a, 2a)$ বিন্দু হইতে পতিত লম্বদ্বয়ের প্রত্যেকের দৈর্ঘ্য a;

আরও প্রমাণ কর যে এই দুই লম্বের পাদবিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ হইল $y+2x=5a$.

2. যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ কর যে (বিশ্লেষণমূলক প্রমাণ)

(i) A, B এবং C কোণের সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু ;

(ii) মধ্যমাগুলি একবিন্দুগামী ;

(iii) বাহুগুলির লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক তিনটি একই বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়।

3. মূলবিন্দু এবং $x-y-4=0$ ও $7x+y+20=0$ এর ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর ; ইহাও প্রমাণ কর যে এই রেখা প্রদত্ত রেখা দুইটির অন্তর্গত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

4. যে সরলরেখা $2x-3y=10$ এবং $x+2y=6$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু ও $16x-10y=33$ এবং $12x+14y+29=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া গমন করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. (a) প্রমাণ কর যে নিম্নলিখিত সরলরেখাসমূহ, যথা :

$$\sqrt{3}x+y=0, \quad \sqrt{3}y+x=0, \quad \sqrt{3}x+y=1. \quad \sqrt{3}y+x=1$$

যে সামান্তরিক উৎপন্ন করে তাহার কর্ণদ্বয় পরস্পর সমকোণে অবস্থিত।

(b) প্রশ্নটি 5(a)র অনুরূপ ; কেবল রেখাগুলি এখানে

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \ \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1, \ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2; \ \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=2.$$

6. কোন বর্গের একটি বাহু x-অক্ষের উপর α কোণে নত এবং বাহুটির একটি প্রান্তবিন্দু মূলবিন্দুতে অবস্থিত ; প্রমাণ কর যে উহার কর্ণ দুইটির সমীকরণ হইল

$$y(\cos\alpha-\sin\alpha)=x(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

এবং $y(\sin\alpha+\cos\alpha)+x(\cos\alpha-\sin\alpha)=a$,

যেখানে a হইল বর্গটির বাহুর দৈর্ঘ্য।

7. (h, k) বিন্দু হইতে $Ax+By+C=0$ সরলরেখার উপর লম্বের পাদবিন্দুগামী এবং ঐ লম্ব ও প্রদত্ত রেখার অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. যে সরলরেখাগুলির সমীকরণ $x \sec\theta + y \operatorname{cosec}\theta = a$ এবং $x\cos\theta \quad y\sin\theta = a\cos 2\theta$, তাহাদের উপর মূলবিন্দু হইতে লম্ব দুইটি যদি p এবং p' হয়, তবে প্রমাণ কর যে $4p^2 + p'^2 = a^2$.

9. যে সরলরেখাগুলি $(3, -2)$ বিন্দু দিয়া যায় এবং $\sqrt{3}x + y = 1$ রেখার সহিত $60°$ কোণে নত তাহাদের **সমীকরণগুলি** নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

[A]

1. $x\cos\theta + y\sin\theta = a$. 2. $3x - y - 9 = 0$.
5. $3x - y - 3 = 0$. 6. $x + y - 6 = 0$.
7. $(4, 5)$ এবং $(-8, -11)$. 8. (*i*) সমান্তরাল; (*ii*) $\tan\theta = \pm 1$.
(*iii*) লম্ব; (*iv*) $\tan\theta = \pm 7/26$. 9. $a\cos\theta x + b\cot\theta y = a^2 + b^2$.
10. 5 একক।

[B]

1. $(0, -1)$. 2. $(3, \frac{1}{2})$. 3. $(-5/3, -8/3)$. 4. $8\frac{1}{2}$ বর্গ একক। 9. 2 একক।

[C]

4. $-5 : 4$. 6. $(14, 4)$. 8. $4x - 3y + 1 = 0$.

[D]

1. $2x + 5y + 1 = 0$ 2. (*i*) $27x - 23y = 0$ (*ii*) $5x + ?y = 13$;
(*iii*) $13x + 13y = 50$, 3. $5x - 4y = 3$; $\frac{3}{\sqrt{41}}$ একক।
4. $\left(-\frac{10}{9}, \frac{49}{27}\right)$. 5. $\frac{x}{7/3} + \frac{y}{-7} = 1$; $8\frac{1}{6}$ বর্গ একক। 6. $3x + y = 10$,
7. $y = 2x + 8$, $y = 2x - 16$, 8. $x + y = 5$, 10. $3x + 4y = 4$.

[E]

1. $y = a$; $3y = 4x + 3a$. 3. $y = 3x$. 4. $13x - 23y = 64$.
7. $A(y - k) - B(x - h) = \pm(Ax + By + C)$.
9. $y = -2$ এবং $y - \sqrt{3}x + 2 + 3\sqrt{3} = 0$.

TEST PAPERS

I

[সময় : 2 ঘন্টা]

1. নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের একটি গতিশীল রেখাংশ APB, x-অক্ষকে A এবং y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে ; $|\overline{AP}| = b$, $|\overline{PB}| = a$;

প্রমাণ কর যে P এর সঞ্চারপথের সমীকরণ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

2. দেখাও যে (r_1, θ_1) এবং (r_2, θ_2) বিন্দুগামী রেখার মেরু সমীকরণ (polar equation) হইল

$$\frac{1}{r}\sin(\theta_2-\theta_1)+\frac{1}{r_1}\sin(\theta-\theta_2)+\frac{1}{r_2}\sin(\theta_1-\theta)=0.$$

3. x-অক্ষের উপর লম্ব এবং P $(a\cos\theta, 0)$ বিন্দুগামী রেখা যথাক্রমে Q এবং R বিন্দুতে রেখাদ্বয়

$$\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1, \quad \frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{a}\cos\theta=1.$$

কে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে $\overline{PR} : \overline{PQ} = a : b$.

4. ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র এবং পরিব্যাসার্ধ নির্ণয় কর, যদি উহার বাহুগুলি হয়

$x+3y=0, \quad 2x+y=10, \quad x+10=7y.$

5. দেখাও যে রেখাত্রয় $4x+y-9=0$, $x-2y+3=0$ এবং $5x-y-6=0$ যে কোন একটি 2-প্রবণতাবিশিষ্ট রেখার সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

6. $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ হইল $\triangle$ABCর লম্বসমূহ ; A, D, E, F হইল $(-4, 5)$, $(\frac{16}{5}, -\frac{23}{5})$, $(4, 1)$ এবং $(-1, -4)$ বিন্দুগুলি ; ত্রিভুজটির বাহুগুলির সমীকরণ এবং B ও C এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

7. A : $(-5, -4)$গামী একটি রেখা যথাক্রমে B, C, D বিন্দুতে রেখাত্রয় $x+3y+2=0$, $2x+y+4=0$, $x-y-5=0$ কে ছেদ করে ; $\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{AD}$ বিপরীত প্রগতি (harmonic progression) তে আছে ; $\overleftrightarrow{AB}$র সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. A, C, B হইল বিন্দু $(-a, 0)$, $(a\cos\phi, 0)$, $(a, 0)$; রেখাদ্বয় $x\cos\phi+y\sin\phi=a$, $x\cos\phi-y\sin\phi=a$

পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে ; দেখাও যে D, x-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং $\overline{AC} : \overline{CB} = \overline{AD} : \overline{BD}$.

9. A, B, C, D চারিটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-1, 4)$, $(-7, -2)$, $(3, -4)$, $(5, 1)$; ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে ইহা $\overline{BD}$ দ্বারা এবং $5x+y+1=0$ রেখার দ্বারাও সুমদ্বিখণ্ডিত হয়।

10. মনে করা যাক রেখাত্রয় যথা :

$$ax+hy+g=0$$

$$hx+by+f=0$$

$$gx+fy+c=0$$

হইল সমবিন্দু ; দেখাও যে

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0.$$

11. kর মান যাহাই হউক না কেন, দেখাও যে রেখা

$$(2k-3)x+(3k-2)y-(4k-1)=0$$

একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া নিত্য গমন করে। উহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

12. $x-3y+1=0$ রেখা, L রেখা এবং $x-y+1=0$ রেখার অন্তর্গত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে ; L এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

13. রেখাদ্বয়

$$x+8y+18=0, 7x+4y+30=0$$

এর অন্তর্গত কোণের একটি সমদ্বিখণ্ডক x-অক্ষ ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A, B বিন্দুতে ছেদ করে, এবং অপরটি এই অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A_1, B_1 বিন্দুতে ছেদ করে ; দেখাও যে $\overline{AB_1}$, $\overline{A_1B}$ পরস্পরকে $(-\frac{14}{5}, \frac{8}{5})$ বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে।

14. দেখাও যে A : $(1, -1/m)$ এবং B : $(-1/l, 1)$ বিন্দুদ্বয় হইতে $lx+my+1=0$ রেখার লম্ব-দৈর্ঘ্যদ্বয়ের অনুপাত $l : m$. মূল বিন্দুগামী যে রেখাগুলির উপর A এবং B হইতে অঙ্কিত লম্ব-দৈর্ঘ্যগুলির অনুপাত $l : m$, তাহাদের প্রবণতা নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

1. $(1,-2)$; 5. 6. $3x-4y-28=0$; $3x+y+7=0$; $x+2y-6=0$; $(0,-7)$, $(8,-1)$; 7. $x-2y-3=0$. 11. $(-1,2)$. 12. $x+7y+1=0$.
14. $(l-1)/(m-1)$: $-\{(l+1)/(m+1)\}$.

6

বৃত্ত (THE CIRCLE)

6·1. সূচনা

বৃত্তের সংজ্ঞা এইভাবে দেওয়া যাইতে পারে, যথা : কোন সমতলে একটি স্থির বিন্দু হইতে নির্দিষ্ট দূরত্ব বজায় রাখিয়া যে বিন্দু গতিশীল থাকে তাহার সঞ্চারপথ (locus)কে **বৃত্ত** বলা হয়। স্থির বিন্দুটিকে উহার **কেন্দ্র** (centre) এবং নির্দিষ্ট বা ধ্রুবক দূরত্বটিকে উহার **ব্যাসার্ধ** (radius) বলে। এই সঞ্চারপথটির সমীকরণ নিরূপণ করাই হইল বর্তমান অধ্যায়ের উদ্দেশ্য।

6·2. বৃত্তের সমীকরণ (Equation to a circle)

A. কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং ব্যাসার্ধ a হইলে বৃত্তটির সমীকরণ :

$$x^2+y^2=a^2.$$

এখানে প্রশ্নটি হইল, মূলবিন্দু হইতে যে P : (x,y) বিন্দুর দূরত্ব সর্বদা a, তাহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করা ;

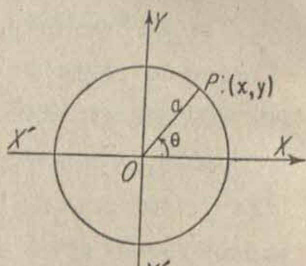
সঞ্চারপথটির উপর P এর সকল অবস্থানে (চিত্র 6.1)

$$\overline{OP}=a\ ;$$

সুতরাং, $|\overline{OP}|^2=a^2$;

$\therefore\ (x-0)^2+(y-0)^2=a^2$

অর্থাৎ, $x^2+y^2=a^2.$



চিত্র 6.1

সঞ্চারপথটির যে কোন বিন্দুর ক্ষেত্রে এই সম্পর্ক বজায় থাকে, কিন্তু পথটির বাহিরে অবস্থিত কোন বিন্দুর ক্ষেত্রে সম্পর্কটি বজায় থাকে না।

সুতরাং ইহাই হইল সঞ্চারপথটির সমীকরণ এবং ঐ সঞ্চারপথ একটি **বৃত্ত**।

টীকা 1. যদি $\overrightarrow{OX}$ কে প্রারম্ভিক রেখা এবং O কে মেরু (pole) ধরা হয় এবং P এর মেরু বা পোলার (polar) স্থানাঙ্ক লওয়া হয় (r, θ), তবে বৃত্তটির মেরু সমীকরণ (polar equation) হইবে $r=a$.

টীকা 2. কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ জ্ঞাত হইলেই বৃত্তটি সম্পূর্ণরূপে নির্ণীত হয়।

উদা. 1. কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং বৃত্তটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী ; বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

যদি a বৃত্তটির ব্যাসার্ধ হয় তাহা হইলে সমীকরণটির আকার হইবে,

$$x^2+y^2=a^2.$$

যেহেতু বৃত্তটি (x_1, y_1) বিন্দু দিয়া গমন করে, সুতরাং

$$x_1^2+y_1^2=a^2.$$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ

$$x^2+y^2=x_1^2+y_1^2.$$

B. কেন্দ্র C যদি (h, k) বিন্দু এবং ব্যাসার্ধ a হয়, তবে বৃত্তটির সমীকরণ হইবে

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2.$$

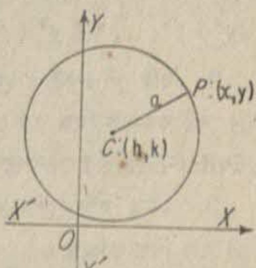
ধরা যাক,

P : (x, y) বিন্দু C : (h, k) হইতে নির্দিষ্ট দূরত্ব a বজায় রাখিয়া নিয়ত গতিশীল ; (চিত্র 6.2)

P এর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

চিত্র হইতে, $|\overline{CP}|^2=a^2$

বা, $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2.$



চিত্র 6.2

সঞ্চারপথটির উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু P : (x,y) এই সমীকরণকে সিদ্ধ করে, এবং অপর কোনও বিন্দু ইহাকে সিদ্ধ করে না ; সুতরাং ইহাই বৃত্তটির সমীকরণ।

টীকা। যদি (h, k) বিন্দু মূলবিন্দু $(0, 0)$ হয়, তবে সমীকরণটির আকার হয়, $x^2+y^2=a^2.$

C. সাধারণ আকার (General form)

প্রতিপাদ্য। বৃত্তের সমীকরণকে নিম্নের আকারে প্রকাশ করা যায়, যেমন

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0, \qquad \cdots \qquad \text{(i)}$$

যেখানে একটি বিশেষ বৃত্তের পক্ষে g, f, c নির্দিষ্ট ধ্রুবক।

বিপরীতক্রমে, x ও y সংশ্লিষ্ট (i) আকারের প্রত্যেক দ্বিতীয় ঘাতের সমীকরণ একটি বৃত্তকে প্রকাশ করে অথবা একটিমাত্র বিন্দুকে প্রকাশ করে অথবা (i) কে সিদ্ধ করে এইরূপ স্থানাঙ্ক-বিশিষ্ট কোন বিন্দুই নাই।

প্রমাণ: পূর্বের আলোচনা হইতে বলা যায় যে, কেন্দ্র (α, β) এবং ব্যাসার্ধ a হইলে বৃত্তটির সমীকরণ হইবে

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2,$$

$$\text{বা,}\quad x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+(\alpha^2+\beta^2-a^2)=0,$$

এবং ইহা (i) এর আকারের অনুরূপ, যদি $-\alpha=g, -\beta=f, c=\alpha^2+\beta^2-a^2$ ধরা হয়।

বিপরীতক্রমে, x ও y সংশ্লিষ্ট দ্বিতীয় ঘাতের সমীকরণ যদি নিম্নের আকারে প্রদত্ত থাকে,

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0,$$

তবে উহাকে এইভাবে লিখিতে পারা যায়, যথা:

$$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c \quad \cdots \quad (ii)$$

1. ইহা একটি বৃত্তকে প্রকাশ করে, যাহার কেন্দ্র $(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2+f^2-c}$, যদি $g^2+f^2>c$ হয়।

2. যদি $g^2+f^2=c$ হয়, তবে একটি এবং কেবলমাত্র একটি বিন্দু $(-g, -f)$, (ii) সমীকরণকে সিদ্ধ করে। প্রকারান্তরে, সমীকরণ (ii) তখন একটি **বিন্দু-বৃত্ত (Point-circle)** বা **শূন্য-বৃত্ত (Null-circle)** কে প্রকাশ করে।

3. কিন্তু যদি $g^2+f^2<c$ হয়, তবে এমন কোন বিন্দু নাই যাহার স্থানাঙ্কদ্বয় (ii) কে সিদ্ধ করিবে।

সংক্ষেপে বলিলে:

সমীকরণ (i) একটি বৃত্তকে, একটি একক বিন্দুকে অথবা এমন কোন বিন্দু নাই যাহার স্থানাঙ্কদ্বয় (i) কে সিদ্ধ করে এইরূপ অবস্থাকে প্রকাশ করে, যখন নিম্নের রাশিটি,

$$g^2+f^2-c$$

যথাক্রমে ধনাত্মক, শূন্য অথবা ঋণাত্মক হয়।

মন্তব্য: (a) কোন কোন গ্রন্থকার ইহা বলা বাঞ্ছনীয় মনে করেন যে যখন $g^2+f^2-c<0$, তখন (i) সমীকরণ একটি **কাল্পনিক বৃত্ত (Imaginary circle)** কে প্রকাশ করে—কিন্তু এই শব্দটি নবীন শিক্ষার্থীদের মনে বিভ্রান্তি সৃষ্টি করিতে পারে, এই আশঙ্কায় এই পুস্তকে উহা পরিহার করা হইল।

(b) এখানে সকল আলোচনাই করা হইতেছে **বাস্তব তলের** (real plane) সম্পর্কে, **অর্থাৎ** x, y কে সর্বদা বাস্তব ধরা হইতেছে।

উদা. 2. কোন বৃত্তের কেন্দ্র $(-\frac{5}{4}, \frac{8}{3})$ এবং ব্যাসার্ধ $\frac{11}{6}$ হইলে উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

নির্ণেয় সমীকরণ

$$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2=\left(\frac{11}{6}\right)^2,$$

বা, সরল করিলে,

$$144(x^2+y^2)+360x-768y+765=0.$$

মন্তব্য : লক্ষ্য করিতে হইবে যে x^2 এবং y^2 এর একই সহগ (144) এবং xy সংশ্লিষ্ট কোন পদ সমীকরণটিতে নাই। বস্তুত. সমীকরণটিকে (*i*) এর আকারে এইভাবে লিখিতে পারা যায়, যথা :

$$x^2+y^2+2.\frac{180}{144}x-2.\frac{384}{144}y+\frac{765}{144}=0.$$

উদা. 3. নিম্নে প্রদত্ত বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর (যেক্ষেত্রে উহা বিদ্যমান) :

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

প্রদত্ত সমীকরণ : $\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}.$

1. যদি $A^2+B^2-4C>0$ হয়, তবে সমীকরণটি এমন একটি বৃত্তকে প্রকাশ করে যাহার কেন্দ্র $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4C}$.

2. যদি $A^2+B^2-4C=0$ হয়, তবে সমীকরণটি একটি একক বিন্দুকে প্রকাশ করে।

3. যদি $A^2+B^2-4C<0$ হয়, তবে এমন কোন বিন্দু নাই যাহার স্থানাঙ্কদ্বয় প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে।

6·3. দ্বিতীয় ঘাতের সাধারণ সমীকরণ (General Equation of the Second Degree)

x এবং y সংশ্লিষ্ট দ্বিতীয় ঘাতের সাধারণ সমীকরণ এই আকারের হয়, যথা :

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

(যেখানে a,b,c,h,g,f ধ্রুবক)।

ক্ষেত্র 1. যদি $a=h=b=0$ হয়, তবে সমীকরণটি একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে, যদি g এবং f উভয়েই শূন্য না হয়।

ক্ষেত্র 2. যদি $h=0$, $a=b(\neq 0)$ হয়, তবে সমীকরণটির আকার তখন হয়

$$a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0$$

$$\text{বা,}\quad \left(x+\frac{g}{a}\right)^2+\left(y+\frac{f}{a}\right)^2=\frac{g^2+f^2-ac}{a^2}.$$

ইহা একটি **বৃত্ত** অথবা একটি **বিন্দু-বৃত্তকে** প্রকাশ করে, যদি যথাক্রমে $g^2+f^2>ac$, অথবা, $g^2+f^2=ac$ হয়। আর $g^2+f^2<ac$ হইলে এমন কোন বিন্দু পাওয়া যাইবে না যাহা এই সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে।

স্মরণ রাখিতে হইবে : সাধারণভাবে, x এবং y সংশ্লিষ্ট দ্বিতীয় ঘাতের সাধারণ সমীকরণ একটি বৃত্তকে প্রকাশ করে, যদি

(*i*) x^2 এর সহগ $=y^2$ এর সহগ ;

এবং (*ii*) xy এর সহগ শূন্য।

উদা. 4. (*i*) সমীকরণ $49x^2+49y^2-14x+28y+5=0$,

যখন $\left(x-\frac{1}{7}\right)^2+\left(y+\frac{2}{7}\right)^2=0$, আকারে লিখিত হয়,

তখন দেখা যায় যে ইহা কেবল একটি বিন্দু $(\frac{1}{7}, -\frac{2}{7})$ কে প্রকাশ করে।

(*ii*) $x^2+y^2+2x+4y+6=0$ সমীকরণকে নিম্নলিখিত আকারে,

$$(x+1)^2+(y+2)^2=-1$$

লিখিলে দেখা যায় যে কোন বিন্দুই ($\because$ x এবং y উভয়েই বাস্তব বলিয়া এই পুস্তকে ধরা হইবে) ইহাকে সিদ্ধ করে না।

অনুশীলনী

বৃত্তের কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নিম্নে প্রদত্ত হইল ; বৃত্তগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর :

1. কেন্দ্র : $(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $=2$.
2. কেন্দ্র : $(4, 6)$ এবং ব্যাসার্ধ $=3$.
3. কেন্দ্র : $(0, -2)$ এবং ব্যাসার্ধ $=2$.
4. কেন্দ্র : $(\frac{7}{5}, -\frac{2}{5})$ এবং ব্যাসার্ধ $=2$.
5. কেন্দ্র : (a, a) এবং ব্যাসার্ধ $=a\sqrt{2}$.

নিম্নলিখিত বৃত্তগুলির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর :

6. $x^2+y^2+6x-8y=0$.
7. $(x-1)^2+(y+2)^2=5$.

8. $(x-1)(x-3)+(y-2)(y-4)=0.$

9. নিম্নে প্রদত্ত সমীকরণগুলি কি প্রকাশ করে ?

(i) $x^2+y^2-6x+4y+13=0.$

(ii) $x^2+y^2+3=0.$

(iii) $3x^2+3y^2-x+y=6.$

10. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 এবং উহা $x^2+y^2+2x-6y=0$ বৃত্তের সহিত সমকেন্দ্রীয় (concentric); বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

11. প্রমাণ কর যে $(5, -14)$, $(-10, 11)$, $(2\sqrt{13}, 13)$ বিন্দু তিনটি একটি বৃত্ত-পরিধির উপর অবস্থিত, যে বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু; বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

12. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তটি $(2, 1)$, $(0, 5)$ এবং $(-1, 2)$ বিন্দু তিনটি দিয়া গমন করে ; g, f এবং c নির্ণয় কর।

13. P বিন্দুর সেই সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর, যেখানে P হইতে $(2, 3)$ এবং $(-1, -2)$ পর্যন্ত দূরত্ব দুইটির বর্গের সমষ্টি 34 হইবে।

14. 1 ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট প্রত্যেক বৃত্তের সমীকরণ লিখ।

15. 1 ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট প্রত্যেক বৃত্তের সমীকরণ লিখ, যদি উহার কেন্দ্র $y=-x$ রেখার উপর অবস্থিত হয়।

16. $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$—এই সমীকরণটি কি প্রকাশ করিবে, যখন

(i) h এবং k নির্দিষ্ট ধ্রুবক এবং r যে কোন অনির্দিষ্ট ধ্রুবক হইবে ?

(ii) h এবং r নির্দিষ্ট ধ্রুবক এবং k যে কোন অনির্দিষ্ট ধ্রুবক হইবে ?

(iii) k এবং r প্রদত্ত ধ্রুবক এবং h অনির্দিষ্ট কোন ধ্রুবক হইবে ?

17. দেখাও যে (a, b) এবং (c, d) বিন্দু দুইটি হইতে যে বিন্দুর দূরত্ব দুইটির অনুপাত কোন একটি ধ্রুবকের সমান, তাহার সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত হইবে।

উত্তরমালা

1. $x^2+y^2=4.$ 2. $x^2+y^2-8x-12y+43=0.$ 3. $x^2+y^2+4y=0.$
4. $25x^2+25y^2-70x+20y-47=0.$ 5. $x^2+y^2-2ax-2ay=0.$
6. $(-3,+4)$; 5. 7. $(1,-2)$; $\sqrt{5}$, 8. $(2,3)$; $\sqrt{2}$. 9. (i) একটি $(3,-2)$ বিন্দু ;
(ii) কোন সঞ্চারপথ নাই। (iii) একটি বৃত্ত, যাহার কেন্দ্র $(\frac{1}{6},-\frac{1}{6})$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{37/18}$.
10. $x^2+y^2+2x-6y-6=0.$ 11. $x^2+y^2=221.$ 12. $x^2+y^2-2x-6y+5=0.$
13. $x^2+y^2-x-y=8$, একটি বৃত্ত। 14. $(x-h)^2+(y-k)^2=1.$
15. $x^2+y^2+2kx-2ky+2k^2-1=0.$
16. (i) এক প্রস্থ সমকেন্দ্রীয় বৃত্ত, যেখানে সাধারণ কেন্দ্রটি (h, k).
(ii) সম-ব্যাসার্ধের এক প্রস্থ বৃত্ত, যাহাদের কেন্দ্রগুলি y-অক্ষ হইতে h দূরত্বে অবস্থিত y-অক্ষের সমান্তরাল একটি রেখার উপর অবস্থিত।
(iii) . (ii) এর অনুরূপ, কিন্তু কেন্দ্রগুলি এখানে x-অক্ষের সমান্তরাল ও x-অক্ষ হইতে h দূরত্বে অবস্থিত রেখার উপর থাকিবে।

6·4. উল্লিখিত (বা নির্দিষ্ট) শর্ত অনুসারে বৃত্ত (Circles under stated conditions)

এখানে ধরিয়া লওয়া হইল যে বৃত্তের মৌলিক ধর্মগুলির সহিত ছাত্রছাত্রীরা ইতিপূর্বে পরিচিত হইয়াছে, যেমন, প্রাথমিক জ্যামিতিতে ইহা প্রমাণ করা হইয়াছে যে **সমরেখ নহে এইরূপ তিনটি বিন্দু দ্বারা একটিমাত্র বৃত্ত অনন্যভাবে (uniquely) নিরূপিত হয়।** বিশ্লেষণ-জ্যামিতিতে ইহা সহজেই পাওয়া যায়, কারণ—বৃত্তের সাধারণ সমীকরণটি (standard equation)কে নিম্নপ্রকারে লিখিতে পারা যায়,

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0.$$

এখানে তিনটি ধ্রুবক আছে—g, f, c এবং ইহারাই বৃত্তটিকে নিরূপণ করে। এখন কোন বৃত্ত যদি তিনটি সমরেখ নহে এইরূপ বিন্দু দিয়া যায়, তবে ধ্রুবক তিনটি নির্ণয়ের জন্য তিনটি সহ-সমীকরণ গঠন করা যাইবে।

আরও সাধারণভাবে বলা যায় যে বৃত্তকে দিয়া **তিনটি উপযুক্ত শর্ত** পূরণ করান যায় এবং ইহা যদি বিশ্লেষণ-জ্যামিতির মাধ্যমে প্রকাশ করা হয় তবে ধ্রুবক তিনটি নির্ণয়ের জন্য তিনটি সহ-সমীকরন পাওয়া যায়। কিন্তু এই বিষয়ে দৃষ্টি আকর্ষণ করা প্রয়োজন যে, **যে কোন তিনটি শর্ত** হইতেই একটি বৃত্ত **অনন্যভাবে** নিরূপিত **হয় না** (নীচে উদা. 9 দ্রষ্টব্য)।

উদা. 5. A : (1, 1), B : (2, −1), C : (2, 3) বিন্দু তিনটি সমরেখ নহে ; এই তিন বিন্দুগামী বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

পদ্ধতি 1. বৃত্তটির সমীকরণকে সাধারণ আকারে ধরা যাক্, যথা :

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0.$$

যদি ইহাকে A, B, C দিয়া যাইতে হয়, তাহা হইলে স্থানাঙ্কগুলি যথাক্রমে পর পর বসাইয়া নিম্নলিখিত সহ-সমীকরণ তিনটি পাওয়া যাইবে :

$$2+2g+2f+c=0 \quad \cdots \quad \cdots (i)$$
$$5+4g-2f+c=0 \quad \cdots \quad \cdots (ii)$$
$$13+4g+6f+c=0 \quad \cdots \quad \cdots (iii)$$

(i) এবং (ii) **হইতে** (বিয়োগ দ্বারা) : $3+2g-4f=0 \cdots (iv)$

(i) এবং (iii) **হইতে** (বিয়োগ দ্বারা) : $11+2g+4f=0 \cdots (v)$

(iv) এবং (v) **হইতে,** $2g=-7,\quad 2f=-2$

সুতরাং (i) হইতে, $c=7.$

অতএব, বৃত্তটির সমীকরণ হইল

$$x^2+y^2-7x-2y+7=0.$$

এইরূপ ক্ষেত্রে এই পদ্ধতিই সাধারণভাবে প্রয়োগ করা হয়। বৈচিত্র্য হিসাবে দ্বিতীয় একটি পদ্ধতি প্রদর্শিত হইল :

পদ্ধতি 2. পদ্ধতিটি এই তথ্য-নির্ভর যে সমরেখ নহে এমন তিন বিন্দু, A, B, C দিয়া যে বৃত্তটি যায় তাহার কেন্দ্র হইল $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদ-বিন্দু। $\overline{AB}$র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণটি হইল

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$$

[লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকটির উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু A এবং B হইতে সমদূরবর্তী]

বা, $2x-4y=3.$

অনুরূপভাবে, $\overline{AC}$র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$2x+4y=11$$

সমাধান করিয়া, বৃত্তটির কেন্দ্র হইল $(\frac{7}{2}, 1)$। ব্যাসার্ধ r হইল $(\frac{7}{2}, 1)$ হইতে প্রদত্ত বিন্দু দুইটির যে কোন একটির দূরত্ব, অর্থাৎ

$$r=\sqrt{(\tfrac{7}{2}-1)^2+(1-1)^2}=\tfrac{5}{2}$$

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ হইল

$$(x-\tfrac{7}{2})^2+(y-1)^2=(\tfrac{5}{2})^2$$

বা, $x^2+y^2-2y-7x+7=0.$

স্মরণ রাখিতে হইবে :

1. বৃত্তটির সাধারণ সমীকরণ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

এ যদি দেখা যায় যে $c=0$, তবে বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী : (0, 0) উহাকে সিদ্ধ করে।

2. কিন্তু যদি $g=0$ হয়, তবে বৃত্তটির কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত, কারণ তখন সমীকরণ টিহইবে

$$x^2+(y+f)^2=f^2-c.$$

3. আবার, যদি $f=0$ হয়, তবে কেন্দ্রটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত।

উদা. 6. একটি বৃত্তের কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং বৃত্তটি $(-4, 1)$ এবং $(3, 0)$ বিন্দুগামী ; বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

যে বৃত্তের কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত, তাহার সমীকরণের আকারটি হইবে

$$x^2+y^2+2fy+c=0$$

যেহেতু ইহা $(-4, 1)$ এবং $(3, 0)$ বিন্দুগামী, সুতরাং

$$17+2f+c=0 \quad \text{এবং } 9+c=0\;;$$

ইহা হইতে পাওয়া যায়, $c=-9,\ 2f=-8.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$x^2+y^2-8y-9=0.$$

উদা. 7. যে বৃত্তের ব্যাস $A:(x_1, y_1)$, $B:(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ তাহার সমীকরণ হইল :

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

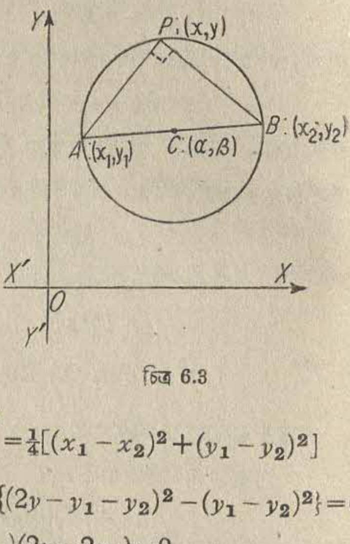
প্রথম পদ্ধতি : কেন্দ্র C এর স্থানাঙ্ক হইল

$$\alpha=\frac{x_1+x_2}{2},\ \beta=\frac{y_1+y_2}{2}$$

এবং ব্যাসার্ধ r

$$=\sqrt{\left(x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y_1-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2}$$

$$\therefore\quad r=\tfrac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$



চিত্র 6.3

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

বা, $\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\frac{1}{4}[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]$

বা, $\{(2x-x_1-x_2)^2-(x_1-x_2)^2\}+\{(2y-y_1-y_2)^2-(y_1-y_2)^2\}=0$

বা, $(2x-2x_1)(2x-2x_2)+(2y-2y_1)(2y-2y_2)=0$

বা, $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$

দ্বিতীয় পদ্ধতি : এই পদ্ধতিতে বৃত্তের নিম্নোক্ত ধর্মটির সাহায্য লওয়া হইবে : "বৃত্তের ব্যাস পরিধিস্থ যে কোন বিন্দুতে সমকোণ উৎপন্ন করে।"

ধরা যাক্, বৃত্তটির উপর যে কোন একটি বিন্দু $P:(x, y)$।

তাহা হইলে $\overline{AP}$র প্রবণতা হইল $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$

এবং $\overline{BP}$র প্রবণতা হইল $\dfrac{y-y_2}{x-x_2}$,

কিন্তু $\overline{AP}$, $\overline{BP}$র উপর লম্ব,

$$\therefore \quad \frac{y-y_1}{x-x_1} \cdot \frac{y-y_2}{x-x_2} = -1$$

অর্থাৎ, $\quad (y-y_1)(y-y_2)+(x-x_1)(x-x_2)=0.$

যেহেতু বৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু (x, y) এর পক্ষে ইহা সত্য, সুতরাং ইহাই বৃত্তটির সমীকরণ।

উদা. 8. অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদিতাংশ (Intercepts on the axes)

(*i*) $(0, -1)$ এবং $(2, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ যে বৃত্তের ব্যাস-তাহার x-অক্ষের ছেদিতাংশ নির্ণয় কর।

পূর্বের উদাহরণ অনুসারে বৃত্তটির সমীকরণ (দুইটি পদ্ধতির যে কোন একটির সাহায্য লইয়া) হইল

$$(x-0)(x-2)+(y+1)(y-3)=0$$

বা, $x^2-2x+y^2-2y-3=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$

[বৃত্তটির দ্বারা x-অক্ষ হইতে ছিন্ন দৈর্ঘ্য হইল উহার x-অক্ষের উপর **ছেদিতাংশ।**]

যে বিন্দু দুইটিতে বৃত্তটি x-অক্ষকে (যাহার সমীকরণ $y=0$) ছেদ করে, তাহাদের ভুজ পাওয়া যায়

$x^2-2x-3=0$ হইতে ; $\quad$ [(i)-এ $y=0$ বসাইয়া]

ইহা হইতে, $\quad x=-1, 3$; সুতরাং বৃত্তটি x-অক্ষকে A_1 এবং A_2 বিন্দুতে ছেদ করিয়া থাকিলে, $A_1 : (-1, 0)$, $A_2 : (3, 0)$.

$$\therefore \quad \overline{A_1A_2}=\overline{OA}_2-\overline{OA}_1=3-(-1)=\mathbf{4} ;$$

ইহাই x-অক্ষের উপর নির্ণেয় ছেদিতাংশ।

(*ii*) ধরা যাক্, x-অক্ষের উপর বৃত্ত

$$a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0 \quad \cdots \quad (ii)$$

এর ছেদিতাংশ নির্ণয় করিতে হইবে।

বৃত্ত (ii) x-অক্ষকে ($y=0$) যে দুই বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদের ভুজ পাওয়া যায় $ax^2+2gx+c=0$ হইতে ; $\quad$ [(ii)-এ $y=0$ বসাইয়া]

যদি x_1 এবং x_2 এই দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ হয়, তবে

$$x_1+x_2=-\frac{2g}{a}$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}$$

সুতরাং, x-অক্ষের উপর নির্ণেয় ছেদিতাংশ

$$= |x_1 - x_2| = +\sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

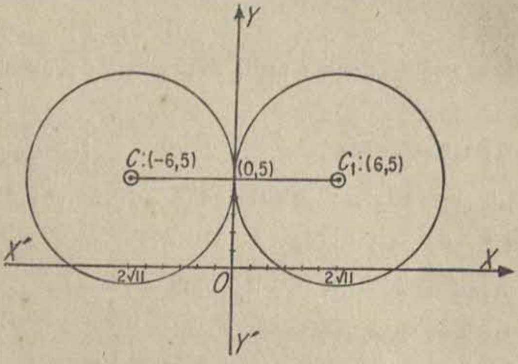
$$= +\sqrt{\frac{4g^2}{a^2} - \frac{4c}{a}} = +\frac{2}{a}\sqrt{g^2 - ac}.$$

টীকা : বৃত্ত x-অক্ষকে আদৌ ছেদ করিবে না, যদি x_1 এবং x_2 বীজদ্বয় কাল্পনিক হয় (অর্থাৎ, যদি নিরূপক $g^2 - ac$ ঋণাত্মক হয়)। যদি $g^2 = ac$ হয়, তবে বীজ দুইটি সমান এবং তখন বলা হয় যে x-অক্ষ বৃত্তটিকে $(x_1, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

উদা. 9. যে বৃত্ত y-অক্ষকে মূলবিন্দু হইতে দিক্-নির্দেশিত $+5$ দূরত্বে স্পর্শ করে এবং x-অক্ষ হইতে $2\sqrt{11}$ দৈর্ঘ্যের ছেদিতাংশ ছিন্ন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

বৃত্তটির সমীকরণ ধরা যাক্

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ (} g, f, c \text{ ধ্রুবক)}$$



চিত্র 6.4

বৃত্তটি যদি y-অক্ষের সহিত মিলিত হয় তবে যে বিন্দুতে বৃত্তটি উহার সহিত মিলিত হইবে তাহার কোটি পাওয়া যাইবে (সমীকরণটিতে $x=0$ বসাইয়া)

$$y^2 + 2fy + c = 0 \text{ হইতে ;}$$

কিন্তু যেহেতু বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে, সুতরাং দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজ দুইটি অবশ্যই সমান হইবে ; এবং প্রত্যেকে 5 এর সমান হইবে, অর্থাৎ সমীকরণটি এখন হইবে

$$(y-5)^2 = 0$$

$$\therefore\ 2f = -10,\ c = 25.$$

আবার, বৃত্তটি x-অক্ষকে যে বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে তাহাদের ভুজ পাওয়া যায় (বৃত্তের সমীকরণে $y=0$ বসাইয়া)

$$x^2+2gx+c=0 \text{ হইতে ;}$$

$$\text{বা, } x^2+2gx+25=0 \ (\because c=25)$$

সমীকরণটির বীজ দুইটি যদি x_1 এবং x_2 হয়, তবে x-অক্ষের উপর ছেদিতাংশ

$$= |x_1-x_2| = +\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$= +\sqrt{4g^2-100} = +2\sqrt{g^2-25}.$$

প্রদত্ত শর্ত অনুসারে,

$$2\sqrt{11} = +2\sqrt{g^2-25},$$

ইহা হইতে, $g=\pm 6.$

$\therefore$ প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে এইরূপ দুইটি বৃত্ত আছে। উহারা হইল (চিত্র. 6.4 দ্রষ্টব্য)

$$x^2+y^2+12x-10y+25=0$$

$$\text{এবং } x^2+y^2-12x-10y+25=0.$$

অনুশীলনী

1. $(-1, 3)$, $(3, 5)$ বিন্দুগামী যে বৃত্তের কেন্দ্র

$$x+2y=6$$

রেখার উপর অবস্থিত, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. $(0, a)$ এবং (b, h) বিন্দুগামী যে বৃত্তের কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

3. নিম্নে প্রদত্ত বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণগুলি নির্ণয় কর :

(i) $(-6, 5)$, $(-3, -4)$ এবং $(2, 1)$.

(ii) $(2, 0)$, $(-1, 3)$ এবং $(-2, 0)$.

(iii) $(0, 0)$, $(a, 0)$ এবং $(0, b)$.

(iv) $(5, 7)$, $(8, 1)$ এবং $(1, 3)$.

(v) (c, d), $(c, -d)$ এবং $(c+d, c-d)$.

4. যে বৃত্ত $(0, 0)$ বিন্দুগামী এবং অক্ষদ্বয় হইতে 3 এবং 4 এর সমান ছেদিতাংশ ছিন্ন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. প্রমাণ কর যে

$(2, 0)$, $(-1, 3)$, $(-2, 0)$, $(1, -1)$ বিন্দুগুলি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত ; উহার সমীকরণ এবং কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

6. যে বৃত্ত প্রত্যেক ধনাত্মক অক্ষকে মূলবিন্দু হইতে 4 একক দূরত্বে স্পর্শ করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. যে সমুদয় বৃত্ত প্রত্যেক অক্ষকে স্পর্শ করে এবং যাহাদের ব্যাসার্ধ a, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. $(-2, -3)$ বিন্দুগামী যে বৃত্তগুলি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. x-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং $(1, -2)$ ও $(3, -4)$ বিন্দু দিয়া যায় যে বৃত্তগুলি, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

10. প্রমাণ কর যে, যে বৃত্ত y-অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (a, b) বিন্দু দিয়া যায় তাহার সমীকরণ হইল

$$a(x^2+y^2)=x(a^2+b^2).$$

11. মূলবিন্দু হইতে 3 একক দূরে x-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং y-অক্ষকে 6 একক দূরত্বে ছেদ করে এইরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

12. A এবং B এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, -3)$, $(6, 1)$; $\overline{AB}$র মধ্যবিন্দু C এবং D, $\overline{AB}$ কে $3:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে ; C এবং D এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং দেখাও যে এই বিন্দু দুইটি বিন্দু $(2, 4)$ এবং $(4, 3)$ এর সহিত সমবৃত্ত।

13. A, B, C, D হইল যথাক্রমে $(-2, -4)$, $(1, 5)$, $(6, 0)$, $(3, 1)$ বিন্দু ; দেখাও যে $\triangle ABC$ এর পরি-ব্যাসার্ধ দৈর্ঘ্যে $\overline{AD}$ এবং $\overline{BC}$র মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের সমান।

14. একটি বিন্দু এইরূপভাবে গতিশীল আছে যে $(-3, 2)$ বিন্দু হইতে উহার দূরত্বের বর্গ, $3x-4y+2=0$ রেখা হইতে উহার দূরত্বের সহিত ভেদে থাকে ; দেখাও যে সঞ্চারপথটি একটি বৃত্ত এবং উহার সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে $(3, 4)$ বিন্দুটি ঐ সঞ্চারপথের উপর আছে।

15. কেন্দ্র $4x-5y-5=0$ রেখার উপর অবস্থিত এবং $(0, 1)$ ও $(4, 3)$ বিন্দুগামী এইরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

16. দেখাও যে নিম্নের বৃত্ত দুইটির প্রত্যেকের কেন্দ্র অপর বৃত্তটির উপর অবস্থিত :

$$2x^2+2y^2-3x-4y+1=0\ ;\ 16x^2+16y^2-32x-1=0.$$

17. দেখাও যে

$x^2+y^2+2x-6y+9=0$, $2x^2+2y^2+3x+y=0$ এই বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয় হইল নিম্নোক্ত বৃত্ত

$4x^2+4y^2+7x-11y=0$ এর একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু

উত্তরমালা

1. $x^2+y^2-4x-4y-2=0$.
2. $b(x^2+y^2-a^2)=x(b^2+h^2-a^2)$.
3. (i) $x^2+y^2+6x-2y-15=0$.
   (ii) $x^2+y^2-2y-4=0$.
   (iii) $x^2+y^2-ax-by=0$.
   (iv) $3x^2+3y^2-29x-19y+56=0$.
   (v) $d(x^2+y^2)-(c^2+d^2)x+(c-d)(c^2+d^2)=0$.
4. $x^2+y^2-3x-4y=0$.
5. $x^2+y^2-2y-4=0$; (0, 1).
6. $x^2+y^2-8x-8y+16=0$.
7. $x^2+y^2\pm 2ax\pm 2ay+a^2=0$.
8. $x^2+y^2+2(5\pm\sqrt{12})(x+y)+37\pm 10\sqrt{12}=0$.
9. $x^2+y^2-6x+4y+9=0$, বা, $x^2+y^2+10x+20y+25=0$.
11. $x^2+y^2\pm 6\sqrt{2}y-6x+9=0$.
14. $x^2+y^2+30x-36y+29=0$.
15. $x^2+y^2-5x-2y+1=0$.

6·5. বৃত্তের স্পর্শকের প্রাথমিক ধারণাসংক্রান্ত আনুষঙ্গিক প্রশ্নসমূহ (Associated Problems connected with the elementary notions of tangent to a Circle)

পরবর্তী একটি অধ্যায়ে, **বক্ররেখার উপরিস্থিত কোন বিশেষ বিন্দুতে স্পর্শক,** এই শব্দটির যথারীতি সংজ্ঞা দেওয়া হইবে। এই অনুচ্ছেদে কিন্তু ধরিয়া লওয়া হইবে যে, **বৃত্তের একটি বিন্দুতে স্পর্শক,** এই শব্দটি সম্পর্কে ছাত্রছাত্রীদের কিছু মৌলিক ধারণা আছে। বিশেষ করিয়া, নিম্নলিখিত উক্তি দুইটি তাহাদের জানা আছে বলিয়া মনে করা হইবে :

1. কোন সমতলে একটি সরলরেখা ও একটি বৃত্ত প্রদত্ত হইলে, তিনটি ক্ষেত্রের উদ্ভব হইতে পারে :

(i) রেখাটি বৃত্তটিকে দুইটি পৃথক বিন্দুতে, ধরা যাক A এবং B তে, ছেদ করিতে পারে (চিত্র 6.5)।

(ii) রেখাটি বৃত্তটিকে আদৌ ছেদ না করিতে পারে, **অর্থাৎ** ঐ রেখা ও বৃত্তের কোন সাধারণ বিন্দু নাই।

(iii) বৃত্তের **একটি এবং কেবলমাত্র ঐ একটি বিন্দু** Pতে রেখাটির দুইটি ছেদ-বিন্দু সমাপতিত হয়।

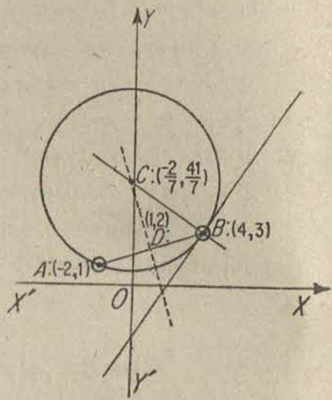
শেষের ক্ষেত্রে বলা হয় যে রেখাটি বৃত্তটির P বিন্দুতে **স্পর্শক (tangent)** (অথবা, রেখাটি বৃত্তটকে P তে **স্পর্শ করিয়াছে**)। বিন্দু P **স্পর্শবিন্দু (Point of contact)** বলিয়া পরিচিত।

2. যদি PT রেখা বৃত্তটির Pতে স্পর্শক হয়, তবে ব্যাসার্ধ $\overline{OP}$, PT স্পর্শকের উপর লম্ব।

উদা. 10. $(-2, 1)$ বিন্দুগামী যে বৃত্ত $3x-2y-6=0$ রেখার $(4, 3)$ বিন্দুতে স্পর্শক, তাহার সমীকরণ নিরূপণ কর।

স্পষ্টত বৃত্তটি A $(-2, 1)$ এবং B $(4, 3)$ বিন্দু দিয়া যায়। সুতরাং বৃত্তটির কেন্দ্র C (চিত্র 6.5) $\overline{AB}$ রেখাংশের লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

আবার C, B গামী ব্যাসার্ধের উপরও অবস্থিত, যেখানে $\overline{CB}$, B বিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্ব।



চিত্র 6.5

$\overline{AB}$র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় করিলে পাওয়া যাইবে

$$3x+y-5=0 \quad \cdots \quad \cdots (i)$$

[$\overline{AB}$র প্রবণতা $=1/3$; $\overleftrightarrow{CD}$র প্রবণতা $=-3$; একটি বিন্দু, অর্থাৎ $\overline{AB}$র মধ্যবিন্দু, হইল D : $(1, 2)$]

$\overleftrightarrow{BC}$ রেখার (যাহা স্পর্শক রেখার উপর লম্ব) সমীকরণ হইল

$$y-3=-\tfrac{2}{3}(x-4)$$

বা, $3y+2x=17 \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$

(i) ও (ii) সমাধান করিয়া পাওয়া যায়, C এর স্থানাঙ্ক : $(-\frac{2}{7}, \frac{41}{7})$.

তাহা হইলে ব্যাসার্ধ $r=\sqrt{(4+\frac{2}{7})^2+(3-\frac{41}{7})^2}=\frac{10}{7}\sqrt{13}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$(x+\tfrac{2}{7})^2+(y-\tfrac{41}{7})^2=(\tfrac{10}{7}\sqrt{13})^2$$

বা, $\mathbf{7x^2+7y^2+4x-82y+55=0.}$

উদা. 11. (*a*) বৃত্ত $x^2+y^2=25$ এবং রেখা $x+2y-5=0$ এর ছেদের ফলে উৎপন্ন জ্যাটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(*b*) রেখা $3x+4y+7=0$ বৃত্ত $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ কে কোথায় ছেদ করে, নির্ণয় কর।

সমাধান। (*a*) $x+2y-5=0$ রেখা এবং $x^2+y^2=25$ বৃত্তের ছেদ বিন্দুর ভুজ পাওয়া যাইবে

$x^2+\left(\frac{5-x}{2}\right)^2=25$ হইতে ; (সমীকরণ দুইটির মধ্যে y অপনয়ন দ্বারা)

বা, $x^2-2x-15=0$, অর্থাৎ $x=5$; বা -3.

যখন $x=5$, $y=(5-x)/2$; বা $y=0$

যখন $x=-3$, $y=(5-x)/2$; বা $y=4$

$\therefore$ রেখাটি বৃত্তকে যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে তাহা হইল

$(5, 0)$ এবং $(-3, 4)$

$\therefore$ জ্যাটির দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(5+3)^2+(0-4)^2}=4\sqrt{5}$ একক।

(*b*) $3x+4y+7=0$ হইতে পাওয়া যায় $x=(-4y-7)/3$

x এর এই মান $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ সমীকরণে বসাইলে,

$$\frac{(4y+7)^2}{9}+y^2+\frac{4(4y+7)}{3}-6y-12=0$$

বা, $y^2+2y+1=0$

বা, $(y+1)^2=0$,

অর্থাৎ $y=-1, -1$ এবং ফলে $x=-1, -1$, অর্থাৎ,

রেখাটি বৃত্তটির সহিত যে বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে তাহারা সমাপতিত এবং বিন্দুটি হইল $(-1, -1)$। প্রকারান্তরে বলা যায়, রেখাটি বৃত্তটিকে $(-1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

বিবিধ প্রশ্নমালা

(অধ্যায় 6 এর উপর)

[A]

1. $x^2+y^2=64$ বৃত্ত $3x+4y-c=9$ সরলরেখা হইতে যে জ্যা ছিন্ন করে তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

2. 6 একক দৈর্ঘ্যের একটি দণ্ড এইরূপে গতিশীল আছে যে উহার প্রান্তবিন্দুদ্বয় সর্বদা স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের উপর অবস্থান করে। প্রমাণ কর যে উহার মধ্য বিন্দু একটি বৃত্ত রচনা করে এবং বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

3. (3, 4), (3, −6), (−1, 2) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। উহার কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধও নির্ণয় কর।

4. প্রমাণ কর যে $y=x+a\sqrt{2}$ রেখা বৃত্ত $x^2+y^2=a^2$ কে $(-\frac{1}{2}a\sqrt{2}, \frac{1}{2}a\sqrt{2})$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

5. B : (3, 0) এবং C : (−3, 0) দুইটি বিন্দু। যদি A এইরূপ একটি বিন্দু হয় যে $\widehat{BAC}=90°$ হয়, তবে দেখাও যে ত্রিভুজ ABCর ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত হইবে, যাহার সমীকরণ $x^2+y^2=1$.

6. যে বৃত্ত মূলবিন্দুগামী এবং x-অক্ষের ও y-অক্ষের ধনাত্মক দিকে যথাক্রমে 6 এবং 8 দৈর্ঘ্যের ছেদিতাংশ ছিন্ন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. প্রমাণ কর যে বৃত্তত্রয়

$x^2+y^2-2x+6y=-1$, $x^2+y^2+4x-12y=9$, $x^2+y^2=16$

এর কেন্দ্রগুলি সম-রেখ। এই সরলরেখাটির সমীকরণ কি হইবে ?

8. যে বৃত্ত (0, 4) বিন্দু দিয়া গমন করে এবং x-অক্ষকে (2, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. প্রমাণ কর যে $3x+4y+7=0$ রেখা $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ বৃত্তকে (−1, −1) বিন্দুতে স্পর্শ করে।

10. সঞ্চারপথ দুইটি অঙ্কন কর, যদি উহাদের সমীকরণ হয়

(*i*) $x^2+y^2-6x+8y=0$; (*ii*) $(x-3)(y+4)=0$.

11. প্রমাণ কর যে $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2+6x-2y=6$, এবং $x^2+y^2-12x+4y=9$ এই বৃত্ত তিনটির ব্যাসার্ধগুলি A. P. তে আছে।

12. (0, −1) এবং (2, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ যে বৃত্তের ব্যাস, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। ঐ বৃত্ত x-অক্ষ হইতে যে ছেদিতাংশ ছিন্ন করে তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[B]

1. কোন ত্রিভুজের ভূমির প্রান্তবিন্দুদ্বয় B এবং C হইল যথাক্রমে $(a, 0)$ এবং $(-a, 0)$। উহার শীর্ষ A এর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর, যখন

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2k^2 \quad (k=\text{ধ্রুবক}, k^2>a^2).$$

2. $x^2+y^2+2x+2y-5=0$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া যায় যে বৃত্ত, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর, যদি উহার কেন্দ্র (2, 3) বিন্দু হয়।

3. যে বৃত্ত বা বৃত্তসমূহ x-অক্ষকে প্রথম পাদতে মূলবিন্দু হইতে 5 একক দূরে স্পর্শ করে এবং y-অক্ষ হইতে 24 একক দৈর্ঘ্যের জ্যা ছিন্ন করে, তাহার বা তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

4. একটি বৃত্তের কেন্দ্র $x-4y+7=0$ রেখার উপর অবস্থিত এবং উহা x-অক্ষকে $x=2$ এবং $x=6$ বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে ; বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. প্রমাণ কর যে $x^2+y^2-2x+4y=0$ এবং $x^2+y^2-10x+20=0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

6. (3, 7) এবং (9, 1) এর সংযোজক রেখাংশকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে $x+y=4$ রেখাটি বৃত্তটিকে (3, 1) বিন্দুতে স্পর্শ করে।

7. যদি দুইটি বৃত্ত $x^2+y^2+2ax+c=0$, $x^2+y^2+2by+c=0$ পরস্পরকে স্পর্শ করে, তবে দেখাও যে

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c}.$$

8. প্রদত্ত একটি বৃত্ত যাহার সমীকরণ হইল

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0.$$

কিরূপে নির্ণয় করিবে যে কোন প্রদত্ত বিন্দু $P_1(x_1, y_1)$

(i) বৃত্তটির বাহিরে ;

(ii) বৃত্তটির ভিতরে ;

(iii) বৃত্তটির উপরে

অবস্থিত কি না ?

9. প্রমাণ কর যে n সংখ্যক নির্দিষ্ট বিন্দু, যথা $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ হইতে P বিন্দুর দূরত্বগুলির বর্গের সমষ্টি যদি ধ্রুবক k হয়, তবে P এর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।

10. প্রমাণ কর যে সমীকরণ

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে, যাহা সমরেখ নহে এমন তিনটি বিন্দু $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ দিয়া যায়।

[C]

1. যে বৃত্তের $3x+4y-16=0$ রেখা স্পর্শক এবং $(-4, 2)$ বিন্দু কেন্দ্র তাহার সমীকরণ নিরূপণ কর।

2. প্রমাণ কর যে $(0, a)$ এবং (b, a) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ যে সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ, তাহার সমকোণের শীর্ষের সঞ্চার-পথের সমীকরণ

$$x^2+y^2-bx-2ay+a^2=0.$$

3. (i) বৃত্ত

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

এর বহিঃস্থ বিন্দু $P_1 : (x_1, y_1)$ হইতে অঙ্কিত বৃত্তটির স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[ইঙ্গিত : যদি C কেন্দ্র হয় এবং T স্পর্শ-বিন্দু, তবে ΔCTP_1 একটি সমকোণী ত্রিভুজ যাহার $<CTP_1=90°$.

$$\therefore P_1T^2=\overline{CP_1}^2-CT^2.]$$

(ii) অনুরূপ প্রশ্ন : যেখানে বৃত্তটি ধর $x^2+y^2-4x-2y-15=0$ এবং বহিঃস্থ বিন্দু $(8, 4)$.

4. A : $(1, 2)$ এবং B : $(3, 4)$ বিন্দুগামী বৃত্তগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর, যদি $3x+y-3=0$ রেখা উহাদের স্পর্শক হয়।

5. 5 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট যে বৃত্তসমূহ $3x+4y-16=0$ রেখার $(4, 1)$ বিন্দুতে স্পর্শক, তাহাদের সমীকরণ নিরূপণ কর।

[ইঙ্গিত : সমাধান কর : $\frac{3h+4k-16}{5}=\pm 5$ এবং $(h-4)^2+(k-1)^2=5^2$, যেখানে (h, k) কেন্দ্র। দুইটি বৃত্ত সম্ভব।]

6. (2,3) বিন্দুগামী বৃত্ত দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর, যাহাদের $3x-4y+1=0$ এবং $4x+3y-7=0$ রেখাদ্বয় স্পর্শক।

7. যে বৃত্তের $x+y+4=0$ এবং $7x-y+4=0$ রেখাদ্বয় স্পর্শক এবং যাহার কেন্দ্র $4x+3y=2$ রেখার উপর অবস্থিত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. $x^2+y^2-4x+6y-17=0$ বৃত্তের সহিত সমকেন্দ্রীয় যে বৃত্তের $3x-4y+7=0$ রেখা স্পর্শক, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. যে বিন্দুর $(-2, -5)$ হইতে দূরত্বের বর্গ বিন্দুটির $8x+15y-34=0$ রেখা হইতে দূরত্বের তিনগুণ, তাহার সঞ্চারপথের সমীকরণটি লিখ।

10. পরস্পর লম্ব রেখাদ্বয় $ax+by+c=0$ এবং $bx-ay+c'=0$ হইতে যে বিন্দুর দূরত্ব দুইটির বর্গের সমষ্টি কোন ধ্রুবক k^2 এর সমান, দেখাও যে উহার সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।

[D]

1. x-অক্ষের উপর (1, 0) এবং (2, 0) বিন্দু লওয়া হইল। এই বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের উপর একটি সমবাহু ত্রিভুজ এমনভাবে অঙ্কিত হইল যেন উহার শীর্ষ ধনাত্মক পাদে অবস্থিত হয়। ইহার বাহুগুলিকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. কোন বৃত্তে (a, b) এবং $(b, -a)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ উহার জ্যা, এবং জ্যাটি বৃত্তটির পরিধিস্থ যে কোন বিন্দুতে 45° কোণ উৎপন্ন করে; বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

3. যে বৃত্তের কেন্দ্র $(1, -3)$ বিন্দু এবং $2x-y-4=0$ রেখা যাহার স্পর্শক, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

4. $x-7y+25=0$ রেখা $x^2+y^2=25$ বৃত্তকে যে বিন্দুগুলিতে ছেদ করে তাহাদের নির্ণয় কর।

5. $4x-3y-5=0$ রেখা হইতে $x^2+y^2+3x-y-10=0$ বৃত্ত যে জ্যা ছিন্ন করে তাহার দৈর্ঘ্য কত ?

6. দেখাও যে $9x^2+9y^2-18x+6y-170=0$ বৃত্তের কেন্দ্রে $x-3y+8=0$ সরলরেখা বৃত্তটি হইতে যে জ্যা ছিন্ন করে, তাহা একটি সমকোণ উৎপন্ন করে।

7. দেখাও যে P : (1, 1) বৃত্ত

$$x^2+y^2+4x+6y-12=0$$

এর উপর অবস্থিত ; P গামী ব্যাসটির অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

8. দেখাও যে $(-9, 3)$, $(3, -1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখা বৃত্ত $x^2+y^2-12x-6y=0$ দ্বারা 3 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত হয়।

9. বৃত্ত $x^2+y^2-5x-7y+6=0$ x-অক্ষকে A, B এবং y-অক্ষকে C, D তে ছেদ করে ; O কেন্দ্র হইলে বিশ্লেষণ জ্যামিতির সাহায্যে দেখাও যে

$$\overline{OA}.\overline{OB}=\overline{OC}.\overline{OD}=6.$$

10. একটি বৃত্তের কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং বৃত্তটি মূলবিন্দু এবং (a, b) বিন্দু দিয়া গমন করে ; বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

11. $2x-3y+21=0$, $3x-2y-6=0$ এবং $2x+3y+9=0$ রেখাগুলির দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

12. $x-y+2=0$, $2x+3y-1=0$ এবং $4x-y-17=0$ রেখাত্রয়ের দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

[A]

1. $\frac{3}{5}\sqrt{1600-c^2}$. 2. $x^2+y^2=9$. 3. $x^2+y^2-6x+2y=15$; $(3, 1)$; 5.

6. $x^2+y^2-6x-8y=0$. 7. $y+3x=0$ হইল কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক রেখা।

8. $x^2+y^2-4x-5y+4=0$. 12. $x^2+y^2-2x-2y-3=0$; ছেদিতাংশ $=4$.

[B]

1. $x^2+y^2=k^2-a^2$. 2. $x^2+y^2-4x-6y-12=0$

3. $x^2+y^2-10x\pm 26y+25=0$. 4. $2x^2+2y^2-16x-11y+24=0$

6. $x^2+y^2-8y-12x+34=0$. 7. (*i*) $\overline{CP_1}>\sqrt{g^2+f^2-c}$; (*ii*) $\overline{CP_1}<\sqrt{g^2+f^2-c}$

(*iii*) $\overline{CP_1}=\sqrt{g^2+f^2-c}$, যেখানে C বৃত্তটির কেন্দ্র।

[C]

1. $x^2+y^2+8x-4y+4=0$ 3. (*i*) $\{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c\}^{1/2}$; (*ii*) 5.

4. $x^2+y^2-8x-2y+7=0$; $x^2+y^2-3x-7y+12=0$.

5. $x^2+y^2-14x-10y+49=0$; $x^2+y^2-2x+6y-15=0$.

6. $(x-2)^2+(y-8)^2=25$; $(x-\frac{6}{5})^2+(y-\frac{12}{5})^2=1$.

7. $(x-2)^2+(y+2)^2=8$; $(x+4)^2+(y-6)^2=18$. 8. $x^2+y^2-4x+6y=12$.

9. $17(x^2+y^2)+44x+125y+595=0$; $17(x^2+y^2)+92x+215y+391=0$.

[D]

1. $x^2+y^2-3x+2=0$; $2(x^2+y^2)-5x-\sqrt{3}y+3=0$; $2(x^2+y^2)-7x-\sqrt{3}y+6=0$.

2. $x^2+y^2=a^2+b^2$: $x^2+y^2-2(a+b)x+2(a-b)y+a^2+b^2=0$.

3. $5x^2+5y^2-10x+30y+49=0$. 4. $(3, 4)$, $(-4, 3)$. 5. 5.

7. $(-5, -7)$. 10. $b(x^2+y^2)-(a^2+b^2)y=0$. 11. $x^2+y^2+2x-4y=8$.

12. $5(x^2+y^2)-32x-8y-34=0$

7

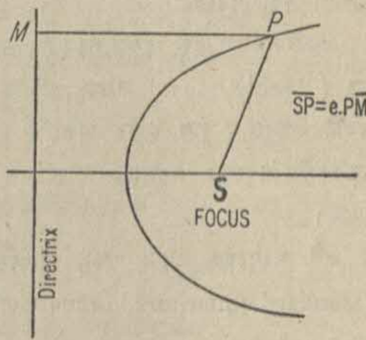
কনিক্ সেকসন্স বা কনিক্ (CONIC SECTIONS) : আদর্শ সমীকরণ (STANDARD EQUATIONS)

7·1. সূচনা : কনিক্ সেক্সন্স্-এর ধারণা

কনিক্ সেক্সন্স্-এর সংজ্ঞা দিয়া সূচনা করা হইল :

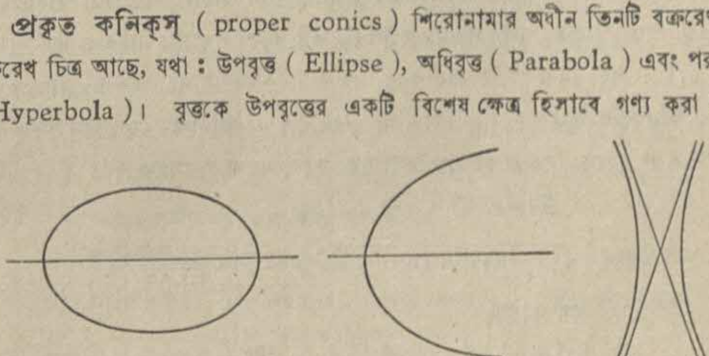
কোন সমতলে একটি বিন্দু যদি এইরূপভাবে সঞ্চার করে যে ঐ সমতলস্থ একটি স্থির বিন্দু হইতে উহার দূরত্ব, ঐ সমতলস্থ একটি স্থির সরলরেখা হইতে উহার দূরত্বের সহিত ধ্রুবক অনুপাতে থাকে তবে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথকে একটি **কনিক্ সেক্সন্** বা কেবলমাত্র **কনিক্** (Conic) বলা হয়।

স্থির বিন্দুটিকে কনিক্টির **নাভি** (focus), স্থির সরলরেখাটিকে উহার **নিয়ামক (directrix)** এবং ধ্রুবক অনুপাতটিকে উহার **উৎকেন্দ্রতা** **(eccentricity)** e বলা হয়। (চিত্র 7.1)



চিত্র 7.1

প্রকৃত কনিক্স্ (proper conics) শিরোনামার অধীন তিনটি বক্ররেখা বা বক্ররেখ চিত্র আছে, যথা : উপবৃত্ত (Ellipse), অধিবৃত্ত (Parabola) এবং পরাবৃত্ত (Hyperbola)। বৃত্তকে উপবৃত্তের একটি বিশেষ ক্ষেত্র হিসাবে গণ্য করা হয়।



চিত্র 7.2(a) চিত্র 7.2(b) চিত্র 7.2(c)

ছাত্রছাত্রীরা চিত্র 7.2 হইতে এই বক্ররেখাগুলির আকৃতি সম্পর্কে একটি ধারণা করিতে পারিবে।

অধিকন্তু, একটি সরলরেখা-যুগল (a pair of straight lines) কে একটি **অপ্রকৃত কনিক্** (improper conic) বা **অপজাত কনিক্** (a degenerate conic) রূপে বিবেচনা করা হয়। বর্তমান অধ্যায়ে **কেবল প্রকৃত কনিক্‌স্ সম্পর্কে** আলোচনা করা হইবে।

কোন কনিক্ সেক্‌সন্ একটি অধিবৃত্ত, একটি উপবৃত্ত অথবা একটি পরাবৃত্ত হইবে যদি উৎকেন্দ্রতা e যথাক্রমে এক (unity) এর সমান, এক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অথবা এক অপেক্ষা বৃহত্তর হয়। দুইটি দূরত্বের অনুপাত হওয়ায় কনিকের উৎকেন্দ্রতা মূলত ধনাত্মক। বৃত্তের উৎকেন্দ্রতা **শূন্য বলিয়া স্বীকার করিয়া লওয়া হইল।** সুতরাং $e=0$: একটি বৃত্ত ; $e=1$: একটি অধিবৃত্ত ; $0<e<1$: একটি উপবৃত্ত ; $e>1$: একটি পরাবৃত্ত।

একটি সমতল এবং একটি শঙ্কুর (cone) [সুবিধার্থে একটি লম্ব বৃত্তাকার দ্বিগুণ-শঙ্কু (double cone) লওয়া যাইতে পারে] ছেদ (section) একটি অধিবৃত্ত, একটি উপবৃত্ত (বৃত্ত ইহার অন্তর্ভুক্ত) অথবা একটি পরাবৃত্ত হইতে পারে ছেদী সমতলটির অবস্থান অনুসারে। প্রত্যেক ক্ষেত্র বিবেচনার সময় উপযুক্ত চিত্র প্রদত্ত হইবে।

এই অধ্যায়ের প্রধান লক্ষ্য, অধিবৃত্ত, উপবৃত্ত এবং পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ (standard equations) নিরূপণ করা।

7·2. কনিক্‌কে দ্বিতীয় ঘাতের সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা যায় (A conic can be represented by an equation of second degree)

এক প্রস্ত আয়ত অক্ষ লওয়া হইল। এই অক্ষ সম্পর্কে নাভি S এর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) এবং নিয়ামকটির সমীকরণ $ax+by+c=0$ ধরা হইল। আরও ধরা হইল e কনিকটির উৎকেন্দ্রতা। এখন যদি P : (x, y) কনিকের যে কোন বিন্দু হয় এবং $\overline{PM}$, P হইতে নিয়ামকের লম্ব-দৈর্ঘ্য হয়, তবে, সংজ্ঞা অনুসারে,

$$\overline{SP}=e.\overline{PM}$$

বা, $$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=e.\pm\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

∴ বর্গ করিয়া,

$$(a^2+b^2\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\}=e^2(ax+by+c)^2$$

বা, $$\{a^2(1-e^2)+b^2\}x^2+\{a^2+b^2(1-e^2)\}y^2-2e^2abxy$$
$$-2x[(a^2+b^2)x_1+ace^2]-2y[(a^2+b^2)y_1+bce^2]$$
$$+(x_1{}^2+y_1{}^2)(a^2+b^2)-e^2c^2=0,$$

এবং ইহা দ্বিতীয় ঘাতের সাধারণ সমীকরণ, যথা :

$$Ax^2+By^2+2Hxy+2Gx+2Fy+C=0$$

এর আকারে আছে।

টীকা। (*i*) উপযুক্ত অক্ষ-যুগল নির্বাচন দ্বারা এবং মূলবিন্দুর উপযুক্ত মনোনয়ন দ্বারা প্রাপ্ত আকারটিকে সরলতর আকারের সমীকরণে প্রকাশ করা যাইতে পারে।

(*ii*) এই অনুচ্ছেদের প্রতিপাদ্যটির বিপরীত প্রতিপাদ্য প্রমাণের জন্য অক্ষ-দ্বয়ের পরিবর্তন সম্পর্কে ধারণা থাকার প্রয়োজন ; পাঠ্যসূচীর অন্তর্গত নহে বলিয়া উহা পরিহার করা হইল। (Appendix I দ্রষ্টব্য)।

উদা. 1. কোন কনিকের নাভি $(2, -1)$ বিন্দু এবং উহার নিয়ামকের সমীকরণ $3x-4y+1=0$; যদি $e=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ হয়, তবে কনিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

উপরে প্রদত্ত প্রণালীতে অগ্রসর হইলে, কনিকটির সমীকরণ হইবে

$$(x-2)^2+(y+1)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{3x-4y+1}{5}\right)^2,$$

এবং সরল করিয়া পাওয়া যাইবে,

$$41x^2+34y^2+24xy-206x+108y+249=0.$$

অনুশীলনী

1. অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যখন

 (*i*) নাভি $(3, -4)$ এবং নিয়ামক $6x-7y+5=0$.

 (*ii*) নাভি $(1, -1)$ এবং নিয়ামক $x-y=0$.

 (*iii*) নাভি (a, b) এবং নিয়ামক $x/a+y/b=1$

2. উপবৃত্তের নাভি, নিয়ামক এবং উৎকেন্দ্রতা নিম্নে প্রদত্ত হইল ; উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর :

 (*i*) নাভি : $(1, 2)$; নিয়ামক : $x+y+1=0$, এবং $e=\frac{1}{2}$.

 (*ii*) নাভি : $(-1, 0)$; নিয়ামক : $x+2=0$, এবং $e=\frac{1}{2}$.

3. পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যদি উহার

 (*i*) নাভি হয় $(1, 2)$, নিয়ামক : $3x-4y+1=0$ এবং উৎকেন্দ্রতা $=5/2$.

 (*ii*) নাভি হয় $(1, 1)$, নিয়ামক : $x+2y=0$ এবং উৎকেন্দ্রতা $=4$.

[উঃ 1. (*i*) $(7x+6y)^2-570x+750y+2100=0$;
(*ii*) $x^2+2xy+y^2-4x+4y+4=0$;
(*iii*) $(ax-by)^2-2a^3x-2b^3y+a^4+a^2b^2+b^4=0$.
2. (*i*) $7x^2-2xy+7y^2-18x-34y+39=0$; (*ii*) $3x^2+4y^2+4x=0$
3. (*i*) $5x^2-24xy+12y^2+14x+8y-19=0$;
(*ii*) $11x^2+64xy+59y^2+10x+10y-10=0$

7·3. অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ (Standard Equation of a Parabola)

1. **সংজ্ঞা**। কোন বিন্দু P যদি এইরূপে বিচরণ করে যে একটি স্থির বিন্দু S হইতে উহার দূরত্ব, একটি স্থির সরলরেখা L হইতে উহার লম্ব-দূরত্বের সহিত সর্বদা সমান থাকে, তবে P এর সঞ্চারপথকে অধিবৃত্ত বলা হয়।

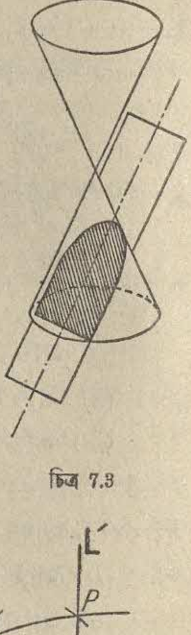
ইহা পরিষ্কার ধারণা করিতে হইবে যে

(*i*) P বিন্দু, L রেখা এবং S বিন্দুর ধারক সমতলে অবস্থিত

এবং (*ii*) S, রেখা L এর উপর অবস্থিত বিন্দু নহে।

স্থির বিন্দু S কে অধিবৃত্তটির **নাভি** এবং স্থির রেখা L কে উহার **নিয়ামক** বলা হয়।

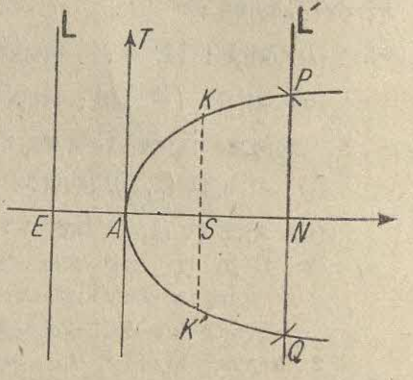
2. অধিবৃত্ত হইল একটি কনিক সেক্‌সন্ (a conic section), **অর্থাৎ** ইহাকে পাওয়া যায়, যদি কোন লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কুকে শঙ্কু-উৎপাদনকারী রেখার (generator of the cone) সমান্তরাল একটি সমতল দ্বারা ছেদ করা হয়—চিত্র 7.3 দ্রষ্টব্য।



চিত্র 7.3

3. বিন্দু S এবং একটি রেখা L প্রদত্ত আছে। যে অধিবৃত্তের নাভি S এবং নিয়ামক L, তাহার উপরস্থিত যতগুলি ইচ্ছা বিন্দু রুলার ও কম্পাস্ (ruler and compass) এর সাহায্যে নির্ণয় করিতে হইবে।

একটি বিন্দু হইল, S হইতে নিয়ামক L এর উপর অঙ্কিত লম্ব-দৈর্ঘ্য SE'র মধ্যবিন্দু A. যদি L এর সমান্তরাল $\overleftrightarrow{AT}$ অঙ্কিত হয়, তবে $\overleftrightarrow{AT}$'র উপরিস্থিত অপর কোন বিন্দু, অথবা, $\overleftrightarrow{AT}$'র বাম-পার্শ্বে অবস্থিত অন্য কোন বিন্দু অধিবৃত্তস্থ বিন্দু হইতে পারে না; কারণ, এইরূপ সমুদয় বিন্দু S বিন্দু অপেক্ষা L রেখার অধিকতর নিকটে অবস্থিত (চিত্র 7.4)।



চিত্র 7.4

$\overleftrightarrow{AT}$ রেখার দক্ষিণ পার্শ্বে L এর সমান্তরাল যে কোন রেখা L' অঙ্কন করা হইল, উহা $\overrightarrow{AS}$ কে কোন বিন্দু N এ ছেদ করিল (ধরা যাক্)। Sকে কেন্দ্র করিয়া এবং

$\overline{EN}$ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হইল, যাহা L' কে P এবং Q (ধরা যাক্) বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে P এবং Q উভয়েই অধিবৃত্তটির উপর অবস্থিত (যৌক্তিকতা বিচার কর)। এইভাবে অধিবৃত্তটির উপর যতগুলি ইচ্ছা যুগ্ম-বিন্দু (P, Q) প্রাপ্ত হওয়া যাইবে। তখন এই বিন্দুসমূহের মধ্য দিয়া একটি অপ্রতিহত মসৃণ বক্র রেখা অঙ্কন করা যাইবে।

সতর্কতার সহিত লক্ষ্য করিতে হইবে যে $\overleftrightarrow{AT}$ রেখা অধিবৃত্তটির একটি মাত্র সমাপতিত বিন্দু Aতে ছেদ করিয়াছে; অন্য কথায় $\overleftrightarrow{AT}$ হইল অধিবৃত্তটির A বিন্দুতে স্পর্শক।

সংজ্ঞা: বিন্দু A ($\overline{SE}$র মধ্য-বিন্দু) কে অধিবৃত্তটির **শীর্ষ (vertex)** এবং সমগ্র রেখা $\overleftrightarrow{AS}$ কে **অধিবৃত্তটির অক্ষ (axis of the parabola)** বলা হয়। অধিবৃত্তস্থ কোন বিন্দু P হইতে অক্ষটির উপর যদি $\overline{PN}$ লম্ব অঙ্কন করা হয়, তবে $\overline{PN}$ কে P বিন্দুর **কোটি (ordinate)** বলা হয়।

মনে করা যাক্, $\overline{PN}$ বর্ধিত হইয়া বক্ররেখাটিকে Q তে ছেদ করিল; তাহা হইলে $\overline{PNQ}$ কে P এর **দ্বিগুণ-কোটি (double ordinate)** বলা হয়; $\overline{AN}$ কে বলা হয় P বিন্দুর **ভুজ (abscissa)**।

নাভি S গামী দ্বিগুণ-কোটি $\overline{KK'}$ কে অধিবৃত্তটির **নাভি-লম্ব (latus rectum)** বলা হয়; সুতরাং নাভি-লম্ব হইল অক্ষের উপর লম্ব একটি নাভি-গামী জ্যা (focal chord)।

অনুশীলনী। বর্গাঙ্কিত একখণ্ড ছক কাগজ লইয়া উহার এক প্রান্তের নিকটবর্তী একটি উল্লম্ব রেখা বরাবর L রেখা চিহ্নিত কর। L রেখা হইতে 1 সে. মি. দূরবর্তী একটি বিন্দু S কে মনোনীত কর। এখন উল্লম্ব রেখাগুলির উপর অথবা উহাদের যতগুলি ইচ্ছা ততগুলির উপর (compass) এর সাহায্যে সঞ্চারপথটির বিন্দুগুলিকে ত্বরিতগতিতে চিহ্নিত করা যায়। একটি সুস্পষ্ট ও পরিষ্কার চিত্র অঙ্কন কর। নাভি-লম্বটির দৈর্ঘ্য কত?

4. অধিবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ নিরূপণ

ধরা যাক্, অধিবৃত্তটির নাভি S এবং নিয়ামক L (চিত্র 7.5) L এর উপর $\overline{SE}$ লম্ব অঙ্কন করা হইল। ধরা যাক, $\overline{SE}$'র মধ্য-বিন্দু A; তাহা হইলে A হইল শীর্ষবিন্দু এবং সমগ্র রেখা $\overleftrightarrow{SE}$ হইল অধিবৃত্তটির অক্ষ। ধরা যাক, শীর্ষ A দিয়া অক্ষের উপর লম্ব $\overleftrightarrow{AY}$ অঙ্কন করা হইল।

A কে মূলবিন্দু, অক্ষ $\overleftrightarrow{AS}$ কে x-অক্ষ এবং লম্ব-রেখা $\overleftrightarrow{AY}$ কে y-অক্ষ মনোনীত করা হইল। ধরা হইল $\overline{AS}=a$ $(a>0)$। তাহা হইলে,

(*i*) শীর্ষ A র স্থানাঙ্কদ্বয় $=(0, 0)$;

(*ii*) নাভি S র স্থানাঙ্কদ্বয় $=(a, 0)$;

(*iii*) অধিবৃত্তটির অক্ষের সমীকরণ : $y=0$;

(*iv*) শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকটির সমীকরণ : $x=0$;

(*v*) নিয়ামক L এর সমীকরণ : $x=-a$.

ধরা যাক্, P : (x, y) অধিবৃত্তস্থ যে কোন একটি বিন্দু। তাহা হইলে অধিবৃত্তের সংজ্ঞা অনুসারে,

$$|\overline{SP}| = |\overline{PM}|$$

যেখানে $\overline{PM}$ হইল P হইতে নিয়ামক L এর লম্ব-দূরত্ব।

$$\therefore \sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}=a+x$$

$[\because |\overline{MP}| = |\overline{EA}| + |\overline{AN}|$; (চিত্র 7.5 দ্রষ্টব্য)]

ইহা হইতে সরল করিয়া পাওয়া যায়, $(x-a)^2+y^2=(a+x)^2$

বা, $y^2=4ax$.

অধিবৃত্তটির প্রত্যেক বিন্দু P (এবং অন্য কোন বিন্দু নহে) $y^2=4ax$ এই সম্পর্ক বজায় রাখে, সুতরাং ইহাই অধিবৃত্তটির সমীকরণ।

জ্যামিতির ভাষায় $y^2=4ax$ কে এইভাবে ব্যাখ্যা করা যায়, যথা,

$$\overline{PN}^2=4\ \overline{AS}.\ \overline{AN}.$$

উদা. 2. যে অধিবৃত্তের নাভি $(3, 0)$ এবং নিয়ামক : $x=-3$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

ইহা স্পষ্ট যে এখানে $a=-3$; সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ :

$$y^2=12x$$

5. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের আকৃতি (shape)

প্রতিসাম্যের ধারণা (Notion of Symmetry) : একটি রেখা সম্পর্কে প্রতিসাম্য।

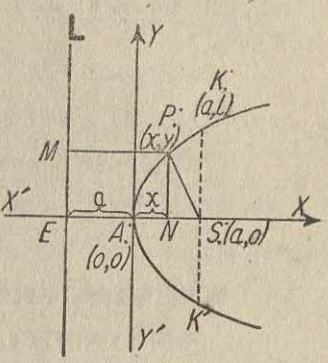
কোন রেখা L সম্পর্কে দুইটি বিন্দু P_1 এবং P_2 কে প্রতিসম বলা হয়, যদি রেখাটি $\overline{P_1P_2}$ রেখাংশের লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক হয় ; রেখা L কে প্রতিসাম্য-রেখা (line of symmetry) বলা হয়। P_2 কে বলা হয় P_1 এর **প্রতিফলন বিন্দু**

(reflection) বা **প্রতিবিম্ব** (image) এবং অপরপক্ষে P_1 হইল P_2 এর **প্রতিফলন বিন্দু বা প্রতিবিম্ব।**

কোন সমতলে অবস্থিত একটি বক্ররেখ চিত্রকে কোন রেখা L সম্পর্কে প্রতিসম বলা হয়, যদি বক্ররেখাটির প্রত্যেক বিন্দু P_1 এর L সম্পর্কে প্রতিবিম্ব বিন্দু P_2 ও ঐ বক্ররেখার উপর অবস্থিত হয়। ইহা হইতে পাওয়া যায় যে

বিন্দুদ্বয় (x, y) এবং $(x, -y)$ x-অক্ষ সম্পর্কে প্রতিসম ;

বিন্দুদ্বয় (x, y) এবং $(-x, y)$ y-অক্ষ সম্পর্কে প্রতিসম।



চিত্র 7.5

একটি বিন্দু সম্পর্কে প্রতিসাম্য

কোন বিন্দু C সম্পর্কে P_1 এবং P_2 বিন্দু দুইটিকে **প্রতিসম** বলা হয়, যদি C রেখাংশ $\overline{P_1P_2}$ এর মধ্যবিন্দু হয়।

সমতলস্থ কোন বক্ররেখাকে কোন বিন্দু C সম্পর্কে বলা হয় **প্রতিসম**, যদি বক্ররেখাটির প্রত্যেক বিন্দু P_1 এর জন্য বক্ররেখাটির অপর একটি এমন বিন্দু P_2 বিদ্যমান থাকে, যেন $\overline{P_1P_2}$ এর মধ্যবিন্দু C হয়।

ইহা হইতে বলা যায় যে কোন বক্ররেখা মূলবিন্দু সম্পর্কে প্রতিসম হইবে, যদি বক্ররেখাটির প্রত্যেক বিন্দু $P_1(x, y)$ এর জন্য বক্ররেখাটির উপর অপর একটি বিন্দু $P_2(-x, -y)$ বিদ্যমান থাকে। এক্ষেত্রে মূলবিন্দু বক্ররেখাটির জ্যা $\overline{P_1P_2}$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

এই পরিপ্রেক্ষিতে বক্ররেখা $y^2=4ax(a>0)$ এর আকৃতি সম্পর্কে আলোচনা করা হইবে :

(i) যদি (x, y) বিন্দু বক্ররেখাটির উপর অবস্থিত হয়, তবে $(x, -y)$ বিন্দুও উহার উপর অবস্থিত ; সুতরাং বক্ররেখাটি x-অক্ষ সম্পর্কে প্রতিসম। অন্য কথায়, **অধিবৃত্ত উহার অক্ষ সম্পর্কে প্রতিসম।**

(ii) যদি $x<0$ হয়, তবে y এর এমন কোন বাস্তব মান নাই যাহাতে $y^2=4ax$ সিদ্ধ হয়। ইহার অর্থ, বক্ররেখাটির কোন বিন্দু y-অক্ষের বাম পার্শ্বে অবস্থিত নহে।

কিন্তু x এর যে কোন ধনাত্মক মানের জন্য, তা সেইমান যত বৃহৎই হউক না কেন, y এর দুইটি সমান এবং বিপরীত মান বর্তমান। সুতরাং বক্ররেখাটি y-অক্ষের দক্ষিণ পার্শ্বে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।

(*iii*) যখন $x=0, y^2=0$; বক্ররেখাটি মূলবিন্দু (অর্থাৎ শীর্ষ) দিয়া যায়। ইহার একটি মাত্র বিন্দু $(0,0)$; $x=0$ রেখার সহিত সমাপতিত, অর্থাৎ y-অক্ষ উহার শীর্ষতে স্পর্শক।

(*iv*) ধরা যাক K র স্থানাঙ্ক (a, l) [চিত্র 7.5]। যেহেতু K বক্ররেখাটির একটি বিন্দু,

$\therefore\ l^2=4a.a=4a^2$.

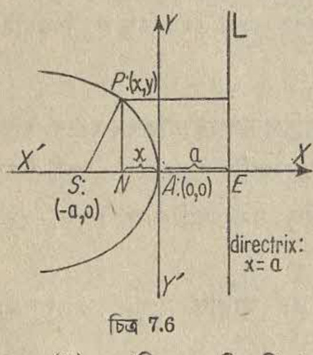
$\therefore$ দৈর্ঘ্য $\overline{SK}=2a$, সুতরাং নাভি-লম্বের দৈর্ঘ্য $=4a$

$=(y^2=4ax)$ এর প্রথম-ঘাতবিশিষ্ট পদের সহগ

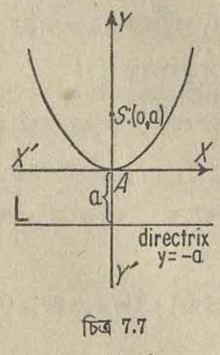
এই আলোচনাসমূহ বক্ররেখা $y^2=4ax$ (একটি অধিবৃত্ত) কে অঙ্কন করিতে সাহায্য করিবে।

6. অধিবৃত্তের সমীকরণের বিভিন্ন আকার

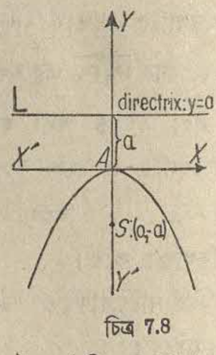
(*i*) **আদর্শ আকার :** $y^2=4ax$ $(a>0)$ একটি অধিবৃত্তকে প্রকাশ করে, যাহার শীর্ষ $(0, 0)$; নাভি $(a, 0)$; অক্ষ : $y=0$; শীর্ষে স্পর্শক : $x=0$; নিয়ামক : $x=-a$ এবং নাভি-লম্বের দৈর্ঘ্য $=4a$ (প্রথম ঘাত বিশিষ্ট পদের সহগ) (চিত্র 7.5)।



চিত্র 7.6



চিত্র 7.7



চিত্র 7.8

(*ii*) নাভিকে যদি নিয়ামকের বাম পার্শ্বে লওয়া হইত (চিত্র 7.6), তবে অধিবৃত্তটির সমীকরণ হইত : $y^2=-4ax$ $(a>0)$.

এস্থলে শীর্ষ $(0, 0)$; নাভি $(-a, 0)$; অক্ষ : $y=0$; শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক : $x=0$; নিয়ামক : $x=a$; এবং নাভি-লম্বের দৈর্ঘ্য তখনও $4a$.

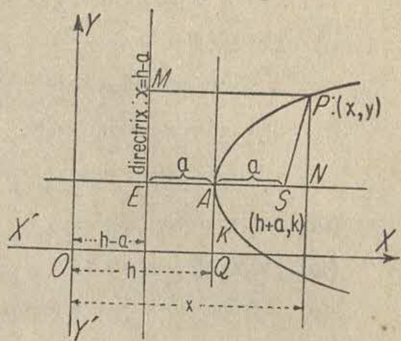
(*iii*) যদি নাভি y-অক্ষের উপর অবস্থিত হইত, তবে সমীকরণটির আকার হইত $(a>0)$:

$$x^2=4ay\ ;\quad x^2=-4ay.$$

চিত্র 7.7 এবং চিত্র 7.8 দ্রষ্টব্য। লক্ষ্য করিতে হইবে যে এই দুই ক্ষেত্রে নিয়ামকের সমীকরণ হইল যথাক্রমে $y=-a$ এবং $y=a$.

(*iv*) এখন এইরূপ একটি অধিবৃত্ত সম্পর্কে বিবেচনা করা যাক্, যাহার শীর্ষ (h, k) বিন্দুতে অবস্থিত, অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল এবং নাভি শীর্ষের দক্ষিণ পার্শ্বে $a(a>0)$ দূরত্বে অবস্থিত (চিত্র 7.9)। তাহা হইলে নিয়ামক y-অক্ষের সমান্তরাল এবং নাভির বাম-পার্শ্বে $2a$ দূরত্বে অবস্থিত ; সুতরাং নিয়ামকের সমীকরণ :

$$x=h-a.$$



চিত্র 7.9

অধিবৃত্তটির উপর যে কোন বিন্দু P : (x, y) লইয়া সংজ্ঞার সাহায্য লইয়া পাওয়া যায়

$$|\overline{SP}| = |\overline{PM}|$$

বা, $\sqrt{(x-h-a)^2+(y-k)^2} = x-(h-a)$

বা, $(y-k)^2=4a(x-h), \ (a>0)$

অন্যান্য আকার এখন ইহা হইতে সহজেই নিরূপণ করা যায়, যথা :

$$(y-k)^2=-4a(x-h) ;$$
$$(x-h)^2=4a(y-k) ;$$
$$(x-h)^2=-4a(y-k).$$

ইহাদের বিস্তৃতি হইতে নিম্ন আকারের সমীকরণ পাওয়া যায়, যথা

$$x=ay^2+by+c,$$

অথবা, $y=ax^2+bx+c.$

উদা. 3. নিম্নলিখিত অধিবৃত্তটির শীর্ষ, নাভি এবং নিয়ামক নির্ণয় কর :

$$y^2+4x+2y-8=0.$$

অধিবৃত্তটির অক্ষ এবং শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণও নির্ণয় কর ; নাভি-লম্বটির দৈর্ঘ কত ?

প্রদত্ত সমীকরণটিকে নিম্নপ্রকারে লেখা হইল, যেমন

$$(y^2+2y+1)+4x-9=0$$

অর্থাৎ, $(y+1)^2=-4(x-9/4).$

ইহাকে এই আকারে লেখা যায়, যথা : $Y^2=-4X$, যেখানে

$$Y=y+1 \text{ এবং } X=x-9/4.$$

(*i*) ইহা একটি অধিবৃত্ত, যাহার শীর্ষ এমন বিন্দু যেখানে $X=0$ এবং $Y=0$.

$\therefore$ শীর্ষটি হইল $(9/4, -1)$.

(*ii*) নাভি হইল সেই বিন্দু যেখানে $X=-1$, $Y=0$

$\therefore$ নাভিটি হইল $(\frac{5}{4}, -1)$.

(*iii*) নাভি-লম্বটির দৈর্ঘ্য $=4$

(*iv*) অধিবৃত্তটির অক্ষের সমীকরণ : $Y=0$, অর্থাৎ $y=-1$.

(*v*) শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :

$$X=0, \text{ অর্থাৎ } x=9/4.$$

(*vi*) যেহেতু সমীকরণটির আকার এইরূপ, যথা $Y^2=-4X$,

$\therefore$ নিয়ামকটির সমীকরণ হইল

$$X=1, \text{ অর্থাৎ } x-9/4=1$$

বা, $4x-13=0$

উদা. 4. কোন অধিবৃত্তের শীর্ষ : $(3, 2)$ এবং নাভি : $(5, 2)$; অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

এখানে, অধিবৃত্তটির অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল। (যুক্তি দাও।)

নাভি শীর্ষের দক্ষিণ পার্শ্বে অবস্থিত এবং উভয়ের মধ্যে দূরত্ব $=2$.

$\therefore$ শীর্ষ ও নিয়ামকের মধ্যে দূরত্ব $=2$

$\therefore$ নিয়ামকের সমীকরণ : $x=3-2=1$

সুতরাং অধিবৃত্তটির সমীকরণ হইল

$$(x-5)^2+(y-2)^2=(x-1)^2$$

(নাভি হইতে দূরত্ব)^2 = (নিয়ামক হইতে দূরত্ব)^2

বা, $y^2-4y-8x+28=0$.

অনুশীলনী

1. $y^2=4ax$ অধিবৃত্ত $(9, -12)$ বিন্দুগামী হইলে a'র মান নির্ণয় কর।

2. $y^2=18x$ অধিবৃত্তের কোন্ বিন্দুর কোটি উহার ভুজের তিনগুণের সমান ?

3. নিম্নলিখিত অধিবৃত্তগুলির নাভি-লম্বসমূহের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর :

(*i*) $3y^2=8x$; (*ii*) $(y+2)^2+4(x+3)=0$;

(*iii*) $(y-2)^2=8(x+1)$; (*iv*) $y^2-4x+2y-3=0$.

4. শীর্ষ ও নিয়ামক নিয়ে প্রদত্ত হইল ; অধিবৃত্তগুলির সমীকরণ নিরূপণ কর :

(i) শীর্ষ (1, 2) ; নিয়ামক $x+1=0$.

(ii) শীর্ষ (2, 1) ; নিয়ামক $y+3=0$.

5. নিম্নলিখিত অধিবৃত্তগুলির প্রত্যেকের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) নাভি (3, 0) বিন্দুতে এবং নিয়ামক হইল $x+3=0$.

(ii) নাভি (0, 6) বিন্দুতে এবং নিয়ামক হইল x-অক্ষ।

(iii) শীর্ষ (0, 0) বিন্দুতে, অক্ষ x-অক্ষ বরাবর এবং $(-3, 6)$ বিন্দুগামী।

6. নাভি এবং শীর্ষ প্রদত্ত হইল ; অধিবৃত্তগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) নাভি (3, 2), শীর্ষ (1, 2) ;

(ii) নাভি (2, 1), শীর্ষ (1, 1) ;

(iii) নাভি (0, 0), শীর্ষ $(-3, 0)$;

(iv) নাভি (0, 0), শীর্ষ (3, 0) ;

(v) নাভি (1, 3), শীর্ষ $(-2, 3)$.

7. নিম্নলিখিত অধিবৃত্তগুলির নাভি, শীর্ষ, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $x^2=8y$; (ii) $3y^2+4x=0$;

(iii) $y^2-4y+6x-8=0$; (iv) $3x^2-9x-5y-2=0$;

(v) $y^2-4y-6x+13=0$; (vi) $(y-3)^2+2(x-2)=0$;

(vii) $y^2+2gx+2fy+c=0$; $(g, f, c>0)$

(viii) $x^2+4x-3y=0$.

8. যে অধিবৃত্তের নাভি $(-2, -1)$ বিন্দুতে এবং যাহার নাভিলম্ব হইল $(-2, 2)$ এবং $(-2, -4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. যে অধিবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর, যদি উহা বিন্দুত্রয়

$$(3, 3), (6, 5) \text{ এবং } (6, -3)$$

এর মধ্য দিয়া গমন করে।

10. (4, 5), $(-2, 11)$ এবং $(-4, 21)$ বিন্দুগামী যে অধিবৃত্তের অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

11. কোন অধিবৃত্তের শীর্ষ $2y-3x=0$ রেখার উপর অবস্থিত, উহার অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল এবং উহা $(3, 5)$ ও $(6, -1)$ বিন্দুদ্বয় দিয়া যায়; অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

12. প্রমাণ কর যে সমীকরণ

$$y^2+2Ax+2By+C=0$$

একটি অধিবৃত্তকে প্রকাশ করে, যাহার অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল; অধিবৃত্তটির শীর্ষের স্থানাঙ্ক এবং নাভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

13. প্রমাণ কর যে অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর যে জ্যাগুলি উহার শীর্ষগামী, তাহাদের মধ্যবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ হইল অধিবৃত্ত $y^2=2ax$.

14. প্রমাণ কর, যে বৃত্ত x-অক্ষ হইতে $2a$ দৈর্ঘ্যের জ্যা ছিন্ন করে এবং মূলবিন্দু হইতে b দূরত্বে y-অক্ষের উপর অবস্থিত একটি প্রদত্ত বিন্দু দিয়া যায়, তাহার কেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি অধিবৃত্ত; এই অধিবৃত্তের সমীকরণও নির্ণয় কর।

15. অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর একটি দ্বিগুণ-কোটি (double ordinate)র দৈর্ঘ্য $8a$; প্রমাণ কর যে শীর্ষ হইতে ইহার প্রান্তদ্বয় পর্যন্ত অঙ্কিত রেখা দুইটি পরস্পর সমকোণে অবস্থিত।

16. একটি বিন্দু এমনভাবে বিচরণ করিতেছে যে $S : (2, 2)$ এবং $S' : (-2, 2)$ হইতে উহার দূরত্বদ্বয়ের সমষ্টি সর্বদাই $2\sqrt{5}$; এইরূপ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

17. $a+b\neq 0$ হইলে $y^2=2mx$ অধিবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর, যদি উহা নিম্নের রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়া যায়, যথা

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \text{এবং} \quad \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1.$$

18. একটি অধিবৃত্ত y-অক্ষের ধনাত্মক অভিমুখে বিস্তৃত; y-অক্ষ হইল অধিবৃত্তটির অক্ষ; উহার নাভি হইল $(0, 3)$ এবং নাভিলম্ব 12; অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

19. একটি অধিবৃত্তাকার (parabolic) খিলানের (arch) উচ্চতা 25 মিটার এবং উহার দুই প্রান্তস্থ পিলার মধ্যবর্তী দূরত্ব (span) 40 মিটার। উহার মধ্যবর্তী অবস্থান হইতে প্রত্যেক পার্শ্বে 8 মিটার দূরে খিলানটির উচ্চতা কত ?

20. ধর $x=u\cos\alpha.t$

$$y=u\sin\alpha.t-\tfrac{1}{2}gt^2 \ (g=\text{ধ্রুবক})$$

t অপনয়ন কর এবং দেখাও যে (x, y) বিন্দু একটি অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত; অধিবৃত্তটির শীর্ষ এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। নাভির স্থানাঙ্কদ্বয় কত ? প্রমাণ কর যে নিয়ামক মূলবিন্দু হইতে $u^2/2g$ উচ্চতায় অবস্থিত।

উত্তরমালা

1. $a=4$. 2. $(2, 6)$. 3. (i) $8/3$; (ii) 4 ; (iii) 8 ; (iv) 4.

4. (i) $y^2-8x-4y+12=0$; (ii) $x^2-4x-16y+20=0$.

5. (i) $y^2-12x=0$; (ii) $x^2-12y+36=0$; (iii) $y^2+12x=0$

6. (i) $y^2-8x-4y+12=0$; (ii) $y^2-4x-2y+5=0$;

(ii) $y^2-12x-36=0$; (iv) $y^2+12x-36=0$;

(v) $y^2-6y-12x-15=0$. 7. (i) $(0, 2)$; $(0, 0)$; 8 ; $y+2=0$

(ii) $(-\frac{1}{3}, 0)$; $(0, 0)$; $4/3$; $3x-1=0$ (iii) $(1/2, 2)$; $(2, 2)$; 6 ; $2x-7=0$.

(iv) $(3/2, -4/3)$; $(3/2, -7/4)$; $5/3$; $6y+13=0$.

(v) $(3, 2)$; $(3/2, 2)$; 6 ; $x=0$ (vi) $(3/2, 3)$; $(2, 3)$; 2 ; $2x-5=0$.

(vii) $\left(\frac{c-f^2-g^2}{2g}, -f\right)$; $\left(\frac{c-f^2}{2g}, -f\right)$; $2g$; $2gx=c-f^2+g^2$.

(viii) $(-2, -7/12)$; $(-2, -4/3)$; 3 ; $12y+25=0$.

8. $y^2+2y-6x-20=0$, $y^2+2y+6x+4=0$.

9. $y^2-2y-4x+9=0$. 10. $x^2-4x-2y+10=0$.

11. $y^2-6y-4x+17=0$, $11y^2-98y-108x+539=0$.

12. $\left(\frac{B^2-C}{2A}, -B\right)$; $2Ax=B^2-A^2-C$. 14. $x^2-2yb=a^2-b^2$.

16. $x^2+5y^2-20y+15=0$. 17. $\left(\frac{ab}{4(a+b)}, 0\right)$.

18. $x^2=12y$. 19. 21 মিটার।

20. $\left(\frac{u^2 \sin 2\alpha}{2g}, \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}\right)$; $\frac{2u^2 \cos^2\alpha}{g}$; $\left(\frac{u^2 \sin 2\alpha}{2g}, \frac{-u^2 \cos 2\alpha}{2g}\right)$.

শীর্ষ নাভিলম্ব নাভি

কনিক্ সেক্সন্স্—অধিবৃত্ত

(সংক্ষিপ্তসার)

(Summary)

সংজ্ঞা। যে বিন্দু এইভাবে বিচরণ করে যে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু S (নাভি) হইতে উহার দূরত্ব, একটি স্থির সরলরেখা L (নিয়ামক) হইতে উহার দূরত্বের সহিত ধ্রুবক অনুপাতে (উৎকেন্দ্রতা e) থাকে, তাহার সঞ্চারপথকে একটি কনিক্ সেক্সন্ (বা একটি কনিক্) বলে।

তিন প্রকার কনিক্। অধিবৃত্ত : $e=1$

উপবৃত্ত : $0<e<1$ } ··· কেন্দ্রবিশিষ্ট কনিক্

পরাবৃত্ত : $e>1$ } (central conics)

অধিবৃত্ত

1. ইহা একটি স্থির বিন্দু S (নাভি) এবং একটি স্থির রেখা L (নিয়ামক) হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ। S এর মধ্য দিয়া অঙ্কিত L এর উপর লম্ব রেখা হইল **অধিবৃত্তটির অক্ষ**। নাভি ও নিয়ামকের সংযোজক রেখার মধ্যবিন্দুকে শীর্ষ বলা হয়।

নাভি, $=(h, k)$, **নিয়ামক** : $ax+by+c=0$,

সমীকরণ : $$(x-h)^2+(y-k)^2=\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$$

2. **আদর্শ সমীকরণ**। $y^2=4ax(a>0)$ [$\overline{PN}^2=4\overline{AS}.\ \overline{AN}$]

শীর্ষ A = মূলবিন্দু (0, 0)—অধিবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষ

নাভি S $=(a, 0)$, নিয়ামক L হইল $x+a=0$.

বক্ররেখাটির এমন কোন বিন্দু বিদ্যমান নহে যাহার ক্ষেত্রে $x<0$.

প্রত্যেক $x>0$র জন্য y এর দুইটি সমান ও বিপরীত চিহ্নের মান আছে; বক্ররেখাটি x-অক্ষ সম্পর্কে প্রতিসম।

বক্ররেখাটি ধনাত্মক x-অক্ষ অভিমুখে বিস্তৃত।

নাভিগামী দ্বিগুণ-কোটি = নাভিলম্ব $=4a$.

3. **অন্যান্য আদর্শ সমীকরণ**

(i) $y^2=-4ax(a>0)$

শীর্ষ A(0, 0)—অক্ষ x-অক্ষ। নাভি $=(-a, 0)$. নিয়ামক হইল $x=a$.

বক্ররেখা ঋণাত্মক x-অক্ষ অভিমুখে বিস্তৃত। নাভিলম্ব $=4a$.

(ii) $x^2 = 4ay\ (a>0)$
শীর্ষ A $(0,0)$—অক্ষ y-অক্ষ। নাভি$=(0, a)$; নিয়ামক হইল $y = -a$;
বক্ররেখা ধনাত্মক y-অক্ষ অভিমুখে বিস্তৃত। নাভিলম্ব$=4a$.

(iii) $x^2 = -4ay\ (a>0)$
শীর্ষ A $(0,0)$—অক্ষ y-অক্ষ। নাভি$=(0, -a)$, নিয়ামক হইল $y = +a$;
বক্ররেখা ঋণাত্মক y-অক্ষ অভিমুখে বিস্তৃত। নাভিলম্ব$=4a$.

(iv) $(y+k)^2 = 4a(x-h)\ (a>0)$.
শীর্ষ A (h, k)—অধিবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল (যাহার সমীকরণ $y=k$),
নাভি $(h+a, k)$; নিয়ামক $x = h - a$.
বক্ররেখা ধনাত্মক x-অক্ষ অভিমুখে বিস্তৃত। নাভিলম্ব$=4a$.

(v) $(y-k)^2 = -4a(x-h)\ (a>0)$
শীর্ষ A (h, k) বিন্দুতে—অধিবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল ($y=k$ হইল উহার সমীকরণ)।
নাভি$=(h-a, k)$; নিয়ামক হইল $x = h + a$.
বক্ররেখাটি ঋণাত্মক x-অক্ষ অভিমুখে বিস্তৃত। নাভিলম্ব$=4a$.

(vi) $(x-h)^2 = 4a\ (y-k)\ (a>0)$
বক্ররেখা ধনাত্মক y-অক্ষ অভিমুখে বিস্তৃত।
অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল ($x=h$ হইল উহার সমীকরণ)।
শীর্ষ A$=(h, k)$। নাভি$=(h, k+a)$. নিয়ামক হইল $y = k - a$.

(vii) $(x-h)^2 = -4a(y-k)\ (a>0)$
বক্ররেখা ঋণাত্মক y-অক্ষ অভিমুখে বিস্তৃত।
অক্ষ হইল $x = h$; শীর্ষ A$=(h, k)$; নাভি$=(h, k-a)$.
নিয়ামক হইল $y = k + a$.

7·4. উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

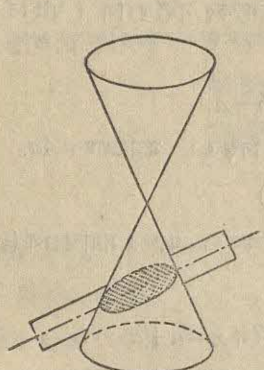
1. সংজ্ঞা। উপবৃত্ত হইল একটি বিন্দু Pর সঞ্চারপথ, যে P বিন্দু এমনভাবে বিচরণ করে যে একটি স্থির বিন্দু S হইতে উহার দূরত্ব, একটি স্থির রেখা L হইতে উহার লম্ব-দূরত্বের সহিত নিয়ত একটি ধ্রুবক অনুপাত $e\ (0<e<1)$ তে থাকে। ইহা স্পষ্টভাবে প্রকাশ থাকে যে

(*i*) P বিন্দু L রেখা এবং S বিন্দুর ধারক সমতলে অবস্থিত এবং

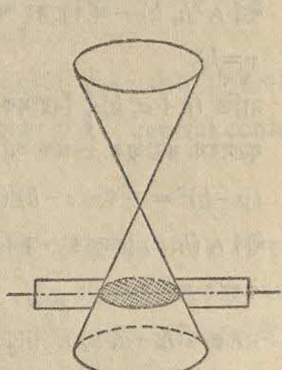
(*ii*) S বিন্দু L রেখার উপর অবস্থিত নহে।

নির্দিষ্ট বিন্দু S কে বলা হয় উপবৃত্তটির **নাভি**, নির্দিষ্ট রেখা L কে S এর অনুরূপ **নিয়ামক** এবং ধ্রুবক অনুপাত e $(0<e<1)$ কে উপবৃত্তটির **উৎকেন্দ্রতা** বলে।

2. উপবৃত্ত একটি কনিক্ সেক্সন্; অর্থাৎ, একটি লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কুকে ঐ শঙ্কু উৎপাদক রেখার (generator of the cone) সহিত কোন কোণে নত (**উহার**



চিত্র 7.10



চিত্র 7.11

সহিত সমান্তরাল নহে) সমতল দ্বারা ছেদের ফলে ছেদ-তলে ইহা পাওয়া যায়। কিন্তু যদি ছেদক তলটি শঙ্কুর অক্ষের সহিত লম্বভাবে অবস্থিত হয়, তবে প্রাপ্ত সেক্সন্ একটি **বৃত্ত**—যাহা উপবৃত্তের একটি সীমাস্থ অবস্থা। চিত্র 7.10 (উপবৃত্ত) এবং চিত্র 7.11 (বৃত্ত) দ্রষ্টব্য।

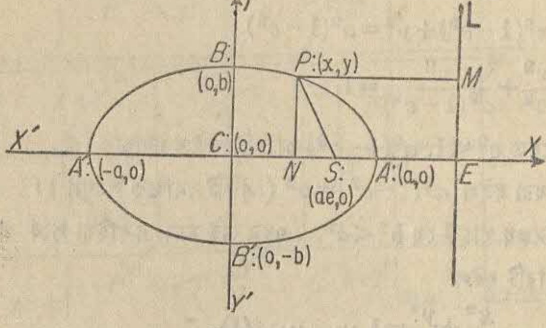
3. উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ নিরূপণ

ধরা যাক্, কোন উপবৃত্তের S নাভি এবং রেখা L অনুরূপ নিয়ামক। S বিন্দুর মধ্য দিয়া L রেখার উপর $\overline{SE}$ লম্ব অঙ্কন করা হইল [চিত্র 7.12]। $\overleftrightarrow{SE}$ রেখার উপর A এবং A′ এইরূপ দুইটি বিন্দু লওয়া হইল যেন উহারা $\overline{SE}$ রেখাংশকে $e:1$ অনুপাতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করে, যেখানে e হইল উপবৃত্তটির প্রদত্ত উৎকেন্দ্রতা $(0<e<1)$। তাহা হইলে সংজ্ঞা অনুসারে A এবং A′ উপবৃত্তস্থ বিন্দু $(\because\ \overline{SA}=e.\overline{AE}$ এবং $\overline{A'S}=e.\overline{A'E})$.

ধরা যাক্, $\overline{AA'}$ এর মধ্যবিন্দু C.

এখন এক প্রস্ত আয়ত অক্ষ নিম্ন প্রকারে নির্বাচন করা হইল :

C কে মূলবিন্দু (0, 0), $\overleftrightarrow{CE}$ রেখাকে x-অক্ষ, Cর মধ্য দিয়া $\overleftrightarrow{CE}$র উপর অঙ্কিত লম্ব রেখা $\overleftrightarrow{CY}$ কে y-অক্ষ লওয়া হইল।



চিত্র 7.12

প্রথমত দুইটি গুরুত্বপূর্ণ সম্বন্ধ নিরূপণ করা হইবে, যথা :

(i) $\overline{CS}=e.\overline{CA}$ এবং (ii) $\overline{CA}=e.\overline{CE}$.

অনুসৃত অঙ্কনকার্য হইতে ইহা পাওয়া যায় যে

$$\overline{SA}=e.\overline{AE}\ ;\ \overline{A'S}=e.\overline{A'E}$$

$$\therefore\ \overline{A'A}=\overline{A'S}+\overline{SA}=e.(\overline{A'E}+\overline{AE})=e.(\overline{A'C}+\overline{CE}+\overline{CE}-\overline{CA})$$

$$=2e.\overline{CE}\quad (\because\ \overline{A'C}-\overline{CA}=0),$$

সুতরাং $\overline{CA}=e.\overline{CE}$ .... অর্থাৎ (ii) সম্পর্কটি প্রমাণিত হইল।

আবার, $2\overline{CS}=\overline{A'S}-\overline{SA}$ $(\because\ \overline{A'S}=\overline{A'C}+\overline{CS}$ এবং $\overline{SA}=\overline{CA}-\overline{CS})$

$$=e.(\overline{A'E}-\overline{AE})=e.\overline{A'A}=2e.\overline{CA},$$

সুতরাং $\overline{CS}=e.\overline{CA}$... ...অর্থাৎ সম্পর্ক (i) প্রমাণিত হইল।

ধরা যাক্ $\overline{CA}=a$; তাহা হইলে (i) ও (ii) হইতে

$\overline{CS}=ae$ এবং $\overline{CE}=a/e$.

তাহা হইলে

S এর স্থানাঙ্ক হইল $(ae, 0)$,

A'র স্থানাঙ্ক হইল $(a, 0)$,

এবং নিয়ামক L এর সমীকরণ হইল $x=a/e$.

ধরা যাক্, P : (x, y) উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু। নিয়ামক L এর উপর $\overline{PM}$ লম্বপাত করা হইল। এখন উপবৃত্তের সংজ্ঞা অনুসারে লেখা যায়,

$$\overline{SP} = e.\overline{PM}\;;\quad বা,\quad |\overline{SP}|^2 = e^2.|\overline{PM}|^2$$

$$\therefore\ (x-ae)^2 + y^2 = e^2(a/e - x)^2 \quad [\because\ \overline{PM} = \overline{NE} = \overline{CE} - \overline{CN}]$$

অর্থাৎ, $x^2 - 2x.ae + a^2e^2 + y^2 = a^2 + e^2x^2 - 2a.xe.$

বা, $x^2(1-e^2) + y^2 = a^2(1-e^2).$

অর্থাৎ, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1.$

এখন, যেহেতু $e^2 < 1$, $a^2(1-e^2)$ রাশিটি স্পষ্টত ধনাত্মক ;

সুতরাং ধরা হইল $a^2(1-e^2) = b^2$ (একটি ধনাত্মক সংখ্যা)।

প্রসঙ্গত উল্লেখ থাকে যে $b^2 < a^2$. এখন এই মান বসাইয়া পূর্বে প্রাপ্ত সম্পর্কটির সরলতর আকারটি হইল

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots \quad \cdots \quad \text{(I)}$$

যেখানে $b^2 = a^2(1-e^2)$ এবং $b^2 < a^2$.

উপবৃত্তের যে কোন বিন্দু P : (x, y) এর ক্ষেত্রে (এবং অপর কোন বিন্দুর জন্য নহে) এই সম্পর্ক বজায় থাকে, সুতরাং ইহাই উপবৃত্তটির সমীকরণ।

টীকা। (*i*) উপবৃত্তটি x-অক্ষকে A : $(a, 0)$ এবং A$'$: $(-a, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে [(I) এ $y=0$ বসাইলে $x = \pm a$ পাওয়া যায়]। এই বিন্দু দুইটিকে উপবৃত্তটির শীর্ষদ্বয় বলা হয়।

(*ii*) উপবৃত্তটি Y-অক্ষকে B : $(0, b)$ এবং B$'$: $(0, -b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

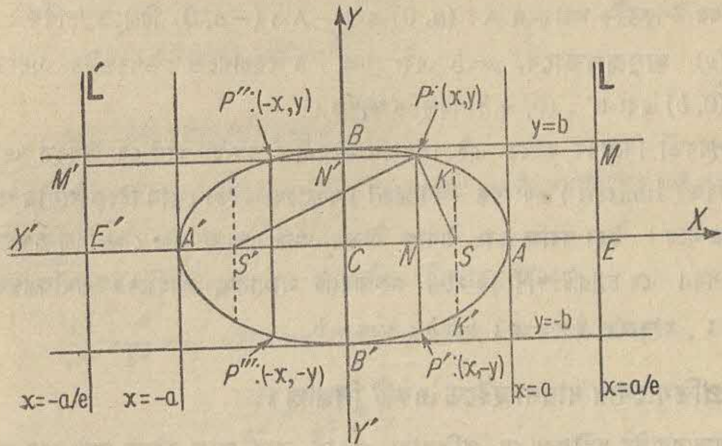
সংজ্ঞা। রেখাংশ $\overline{A'A}$কে উপবৃত্তটির **পরাক্ষ** (**major axis**) এবং রেখাংশ $\overline{B'B}$ কে উহার **উপাক্ষ** (**minor axis**) বলা হয় ($b^2 < a^2$ বলিয়া ইহাকে উপাক্ষ বলা হয়)। $\overline{A'A}$'র মধ্যবিন্দুকে, অর্থাৎ, C বিন্দুকে উপবৃত্তটির কেন্দ্র (centre) বলা হয়। স্পষ্টত,

$$\overline{A'A} = 2a \quad এবং \quad \overline{B'B} = 2b$$

টীকা। কখনও কখনও সমগ্র রেখা $\overleftrightarrow{A'A}$ (অর্থাৎ উভয় পার্শ্বে বর্ধিত $\overline{A'A}$ রেখাংশকে **পরাক্ষ রেখা** বলিয়া উল্লেখ করা হয় ; অনুরূপ $\overleftrightarrow{B'B}$কে **উপাক্ষ রেখা** বলা হইয়া থাকে। কিন্তু প্রাসঙ্গিক বিষয় হইতে কেবল রেখাংশ অথবা সমগ্র রেখাটি সম্পর্কে বলা হইতেছে কিনা, তাহা স্পষ্ট বুঝা যাইবে।

4. $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ উপবৃত্তের আকৃতি

নিম্নলিখিত আলোচনাসমূহের জন্য চিত্র 7.13 এর প্রতি দৃষ্টি আকর্ষণ করা হইতেছে :



চিত্র 7.13

(*i*) ইহা সহজেই যাচাই করিয়া দেখা যাইবে যে, যদি P : (x, y) উপবৃত্তের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু হয়, তবে বিন্দুদ্বয় P′ এবং P″, যাহাদের স্থানাঙ্কগুলি হইল যথাক্রমে $(x, -y)$ এবং $(-x, y)$, উপবৃত্তটির উপর অবস্থিত হইবে।

সিদ্ধান্ত : উপবৃত্তটি x-অক্ষ ও y-অক্ষ অর্থাৎ উভয় অক্ষ সম্পর্কেই প্রতিসম।

আবার P (x, y) উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু হইলে P‴ : $(-x, -y)$ এর স্থানাঙ্কও সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। ইহার অর্থ হইল এই যে C বিন্দুগামী প্রত্যেক রেখা বক্ররেখাটিকে C হইতে সমদূরবর্তী দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে ; অর্থাৎ C বিন্দুগামী প্রত্যেক জ্যা C বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। উপবৃত্তটির কেন্দ্রের ইহা হইল একটি ধর্ম।

(*ii*) $\because\ y^2=b^2\,(1-x^2/a^2)$, সুতরাং যদি $x^2>a^2$ হয়, (অর্থাৎ, যদি $x>a$ বা $x<-a$ হয়), তবে y এর কোন বাস্তব মান পাওয়া যাইবে না।

সিদ্ধান্ত : $x=a$ রেখার দক্ষিণ পার্শ্বে, অথবা $x=-a$ রেখার বাম পার্শ্বে উপবৃত্তটির কোন বিন্দু অবস্থিত নহে।

(*iii*) $\because\ x^2=a^2\left(1-\dfrac{y^2}{b^2}\right)$ সুতরাং x এর কোন বাস্তব মান বিদ্যমান হইবে না, যদি $y^2>b^2$ হয়, (অর্থাৎ যদি $y>b$ বা $y<-b$ হয়)।

সিদ্ধান্ত : $y=b$ রেখার বাহিরে উপরের পার্শ্বে, অথবা $y=-b$ রেখার নিচে উপবৃত্তটির কোন বিন্দু অবস্থিত নহে।

(*iv*) যখন $x=+a$ বা $x=-a$, $y^2=0$; অর্থাৎ, $x=a$ এবং $x=-a$ রেখাদ্বয় উপবৃত্তটির যথাক্রমে A : $(a, 0)$ এবং $-$A' : $(-a, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শক।

(*v*) অনুরূপভাবে, $y=b$ এবং $y=-b$ রেখাদ্বয়ও উপবৃত্তটির যথাক্রমে B : $(0, b)$ এবং B' : $(0, -b)$ বিন্দুতে স্পর্শক।

পূর্ববর্তী বিশ্লেষণ হইতে এই সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় যে উপবৃত্ত একটি সীমাবদ্ধ (limited) এবং বদ্ধ (closed) বক্ররেখা—ইহা কোন দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত নহে। ইহা পরাক্ষ এবং উপাক্ষ উভয় অক্ষ সম্পর্কে এবং কেন্দ্রবিন্দু সম্পর্কেও প্রতিসম। যে চারিটি স্পর্শকের মধ্যে বক্ররেখাটি সীমাবদ্ধ, তাহাদের সমীকরণগুলি হইল : $x=a$; $x=-a$; $y=b$; $y=-b$.

প্রতিসাম্যের ধারণা হইতে একটি সিদ্ধান্ত :

বক্ররেখাটির সমীকরণ যে প্রতিসাম্য প্রকাশ করে তাহা হইতে দেখা যায় যে C হইতে S এর সমান দূরত্বে পরাক্ষের উপর একটি দ্বিতীয় নাভি S' অবশ্যই থাকিবে এবং এই নাভি S' এর অনুরূপ একটি দ্বিতীয় নিয়ামক L' ও অবশ্যই আছে, যাহা মূল নিয়ামক L এর সমান্তরাল এবং যাহা পরাক্ষকে এমন একটি E' বিন্দুতে ছেদ করে যে

$$|\overline{E'C}|=|\overline{CE}|=\frac{a}{e} \text{ হয়।}$$

$\therefore$ L' এর সমীকরণ হইবে $x=-a/e$; S' এর স্থানাঙ্ক হইবে $(-ae, 0)$।

(*vi*) উপবৃত্তস্থ কোন বিন্দু P হইতে যদি পরাক্ষের উপর $\overline{PN}$ লম্ব অঙ্কন করা হয়, এবং যদি ঐ রেখাংশকে বর্ধিত করা হয়, যাহাতে উহা বক্ররেখাটিকে পুনরায় P' বিন্দুতে ছেদ করে, তবে

$$\overline{NP}=\text{P এর কোটি}$$

$$\text{এবং } \overline{P'NP}=\text{P এর দ্বিগুণ-কোটি।}$$

বিশেষভাবে উল্লেখ্য যে, নাভীগামী দ্বিগুণ-কোটিকে উপবৃত্তটির নাভিলম্ব বলা হয়। উপবৃত্তের দুইটি নাভিলম্ব বর্তমান—চিত্রে ডট্ দ্বারা অংকিত সরলরেখাদ্বয় দ্রষ্টব্য।

এক্ষণে প্রমাণ করা হইবে যে প্রত্যেকটি নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য হইল $2b^2/a$

প্রমাণ। ধরা যাক নাভি S গামী নাভিলম্ব $\overline{KK'}$ এবং ধরা যাক, কোটি $\overline{SK}=l$; তাহা হইলে Kর স্থানাঙ্ক হইল (ae, l)। কিন্তু যেহেতু K উপবৃত্তস্থ বিন্দু, সুতরাং ইহার স্থানাঙ্ক উপবৃত্তটির সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে : সুতরাং

$$\frac{a^2e^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}=1,$$

অর্থাৎ $l^2=b^2(1-e^2)=b^2.\frac{b^2}{a^2}$ $[\because b^2=a^2(1-e^2)]$

$\therefore$ অর্ধ-নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{b^2}{a}$.

এবং **নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য** $=\frac{2b^2}{a}$.

(*vii*) বক্ররেখাটির সমীকরণ হইতে উপবৃত্তটির একটি জ্যামিতিক ধর্ম সহজেই পাওয়া যায় :

যদি P এর কোটি $\overline{PN}$ হয়, তবে উপবৃত্তটির সমীকরণ, যথা :

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, হইতে ইহা পাওয়া যায় যে (চিত্র 7.13 দ্রষ্টব্য)

$$\frac{\overline{CN}^2}{a^2}+\frac{\overline{PN}^2}{b^2}=1,$$

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{\overline{PN}^2}{b^2}=1-\frac{\overline{CN}^2}{a^2}=1-\frac{\overline{CN}^2}{\overline{CA}^2}=\frac{\overline{CA}^2-\overline{CN}^2}{\overline{CA}^2}$$

$$=\frac{(\overline{CA}+\overline{CN}).(\overline{CA}-\overline{CN})}{\overline{CA}^2}$$

$$=\frac{(\overline{A'C}+\overline{CN}).\overline{NA}}{\overline{CA}^2}=\frac{\overline{A'N}.\overline{NA}}{\overline{CA}^2}$$

$\therefore$ $\frac{\overline{PN}^2}{\overline{A'N}.\overline{NA}}=\frac{b^2}{\overline{CA}^2}=\frac{\overline{CB}^2}{\overline{CA}^2}=$ P এর সকল অবস্থানে ধ্রুবক।

ঠিক অনুরূপ পদ্ধতিতে ছাত্রছাত্রীরা প্রমাণ করিতে পারে যে

$$\frac{\overline{PN'}^2}{\overline{B'N'}.\overline{N'B'}}=\frac{\overline{CA}^2}{\overline{CB}^2}$$

(*viii*) **উপবৃত্তস্থ কোন বিন্দুর নাভি-দূরত্ব (Focal distance)**

উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু P-র দুইটি নাভি-দূরত্ব আছে, $\overline{SP}$ এবং $\overline{S'P}$; ইহাদের P-বিন্দুর নাভি-ব্যাসার্ধও (focal radii) বলা হয়। এখন প্রমাণ করা হইবে যে P-র যে কোন অবস্থানে ইহাদের সমষ্টি ধ্রুবক।

চিত্র 7.13 প্রসঙ্গে ইহা দেখা যায় যে

$$\overline{SP}=e.\,\overline{PM}=e\left(\frac{a}{e}-x\right)=a-ex$$

এবং $\overline{S'P} = e.\ \overline{PM'} = e\left(\dfrac{a}{e} + x\right) = a + ex$

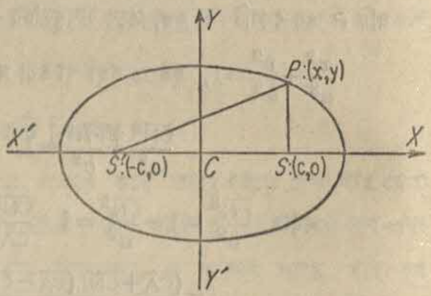
$\therefore\ \overline{SP} + \overline{S'P} = 2a =$ যে কোন বিন্দু P : (x, y) এর ক্ষেত্রে ধ্রুবক রাশি,

(∵ ইহা x-নিরপেক্ষ)।

5. উপরি-উক্ত ধর্মটিকে [অর্থাৎ, উপরের 4নং এর (viii)] উপবৃত্তের একটি বিকল্প সংজ্ঞা হিসাবে গ্রহণ করা যায়, যথা :

কোন বিন্দু কোন সমতলে যদি এইরূপভাবে বিচরণ করে যে ঐ সমতলস্থ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার দূরত্ব দুইটির সমষ্টি ধ্রুবক হয়, তবে ঐ গতিশীল বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি উপবৃত্ত। নির্দিষ্ট বিন্দু দুইটিকে তখন নাভি বলা হয়।

এই সংজ্ঞার সাহায্যে উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ নিরূপণ করা যায় —চিত্র 7.14 দ্রষ্টব্য।



চিত্র 7.14

S এবং S' এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(c, 0)$ এবং $(-c, 0)$ ধরা হইল, অর্থাৎ $\overline{SS'}$ এর মধ্যবিন্দু C কে মূলবিন্দু লওয়া হইল; রেখা $\overleftrightarrow{S'S}$ কে x-অক্ষ এবং C গামী ও $\overline{SS'}$ এর উপর লম্ব রেখাকে y-অক্ষ ধরা হইল।

তাহা হইলে, উপরে প্রদত্ত সংজ্ঞা অনুসারে

$\overline{SP} + \overline{S'P} =$ একটি ধ্রুবক ($=2a$, মনে করা যাক),

যেখানে P : (x, y) হইল উপবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু।

ধরা হইল, $a > c$

$\therefore\ \sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$

বা, $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$

বর্গ করিয়া এবং সরল করিয়া,

$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2$

বা, $cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

পুনরায় বর্গ করিয়া,

$c^2x^2 + a^4 - 2a^2cx = a^2\{(x-c)^2 + y^2\}$

বা, $x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$.

ধরা হইল, $a^2-c^2=b^2$ (একটি ধনসংখ্যা কারণ $a^2>c^2$) ;

সুতরাং $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

ইহাই হইল উপবৃত্তটির সমীকরণ।

দেখা গেল, বিকল্প সংজ্ঞাটি হইতেও একই সমীকরণে উপনীত হওয়া যায় ; উল্লেখ থাকে যে এখন ইহা প্রমাণ করা সম্ভব যে নাভি, ধরা যাক S, হইতে যে কোন বিন্দু P : (x, y) এর দূরত্ব, রেখা L : $x=a^2/c$ হইতে উহার দূরত্বের সহিত একটি ধ্রুবক অনুপাত c/a উৎপন্ন করে। সুতরাং এইক্ষেত্রে ধ্রুবক অনুপাত (উৎকেন্দ্রতা বলিয়া কথিত) $e=c/a$.

তাহা হইলে উপবৃত্তের সংজ্ঞা দুইটির মধ্যে তুল্যতা প্রমাণিত হইবে।

6. উপবৃত্তের সমীকরণের অন্যান্য আকার

(i) যদি নাভি S কে y-অক্ষের উপর এবং নিয়ামক L কে x-অক্ষের সমান্তরাল লওয়া হইত, তবে উপবৃত্তটির সমীকরণ নিরূপণ একই যুক্তি অনুসরণ করিয়া অগ্রসর হইত, কেবল এক্ষেত্রে x এবং y এর পরস্পর স্থান বিনিময়ের প্রয়োজন হইত। সুতরাং তখন সমীকরণটি হইত :

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a^2>b^2)$$

যাহা এমন উপবৃত্তকে প্রকাশ করে যাহার কেন্দ্র মূলবিন্দুতে, পরাক্ষ y-অক্ষ বরাবর এবং উপাক্ষ x-অক্ষ বরাবর থাকে।

নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ এক্ষেত্রে $y=\pm a/e$.

একটি কার্যকরী ইঙ্গিত :

সমীকরণটি এই আকারে লিখিত হইলে যথা :

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$$

যদি $A^2>B^2$ হয়, তবে পরাক্ষ x-অক্ষ বরাবর আছে ;

যদি $A^2<B^2$ হয়, তবে পরাক্ষ y-অক্ষ বরাবর আছে।

(ii) কেন্দ্র (h, k) বিন্দুতে থাকলে উপবৃত্তটির সমীকরণ হইবে

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad (a^2>b^2),$$

যেখানে পরাক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল।

(*iii*) কেন্দ্র (h, k) বিন্দুতে হইলে উপবৃত্তটির সমীকরণ হইবে

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \quad (a^2>b^2),$$

যেখানে পরাক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল।

(*ii*) এবং (*iii*) এর আকার অনুচ্ছেদ 7·3, নং 6 (*iv*) এর অনুরূপ।

উদা. 5. উপবৃত্ত $4x^2+3y^2=24$ এর পরাক্ষ ও উপাক্ষের দৈর্ঘ্য এবং নাভিলম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উহার উৎকেন্দ্রতা, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামক দুইটির সমীকরণও নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সমীকরণটিকে এই আকারে লেখা হইল, যথা :

$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{8}=1.$$

এখানে পরাক্ষ y-অক্ষ বরাবর এবং উপাক্ষ x-অক্ষ বরাবর আছে।

সুতরাং $a^2=8$, $b^2=6$; পরাক্ষ ও উপাক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য তাহা হইলে যথাক্রমে

$$2\sqrt{8} \text{ এবং } 2\sqrt{6}$$

এবং প্রত্যেক নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=2.\dfrac{6}{\sqrt{8}}=3\sqrt{2}.$

যদি e উৎকেন্দ্রতা হয়, তবে

$$b^2=a^2(1-e^2)$$

বা, $6=8(1-e^2)$, অর্থাৎ $e=\frac{1}{2}$.

[eর ঋণাত্মক মান গ্রহণীয় নহে, কারণ e মূলত ধনাত্মক।]

নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হইল $(0, \pm 2\sqrt{2}.\frac{1}{2})$, বা, $(0, \pm\sqrt{2})$.

নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ হইল

$$y=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{2\sqrt{2}}{1/2}=\pm 4\sqrt{2}.$$

উদা. 6. নিম্নে প্রদত্ত উপবৃত্তটির কেন্দ্র, উৎকেন্দ্রতা, নাভিদ্বয়, অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ এবং নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর :

$$2x^2+3y^2-4x+5y+4=0.$$

প্রদত্ত সমীকরণকে নিম্নপ্রকারে লেখা হইল, যথা :

$$2(x^2-2x+1)+3\left(y^2+\frac{5}{3}y+\frac{25}{36}\right)+4-2-\frac{25}{12}=0$$

বা, $2(x-1)^2+3\left(y+\dfrac{5}{6}\right)^2=\dfrac{1}{12}$

বা, $\dfrac{(x-1)^2}{1/24}+\dfrac{(y+\frac{5}{6})^2}{1/36}=1.$

ইহাকে এই আকারে লেখা যায়, যেমন

$$\frac{X^2}{1/24}+\frac{Y^2}{1/36}=1,$$

যেখানে $X=x-1,\ Y=y+5/6.$

(*i*) এই আকারে, কেন্দ্র হইল $X=0,\ Y=0,$

অর্থাৎ, $x-1=0$ এবং $y+\frac{5}{6}=0$

∴ কেন্দ্রটির স্থানাঙ্ক হইল $(1, -5/6)$.

(*ii*) পরাক্ষ এবং উপাক্ষের সমীকরণ হইল যথাক্রমে

$Y=0$ এবং $X=0$

অর্থাৎ, $y=-5/6$ এবং $x=1$.

(*iii*) যদি a এবং b যথাক্রমে অর্ধ-পরাক্ষ এবং অর্ধ-উপাক্ষ হয়,

তাহা হইলে $a^2=1/24,\ b^2=1/36,$

এবং $b^2=a^2\,(1-e^2)$ হইতে পাওয়া যায়

$$1/36=1/24\,(1-e^2),$$

সুতরাং $e=1/\sqrt{3}$ (ঋণাত্মক মান বাতিল করিয়া)।

(*iv*) নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হইল $(X=\pm ae,\ Y=0)$

অর্থাৎ, $\left(1\pm\frac{\sqrt{2}}{12},\ -\frac{5}{6}\right)$

(*v*) নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ হইল

$X=\pm ae,$ অর্থাৎ, $x-1=\pm\frac{\sqrt{2}}{4},$

অর্থাৎ, $x=1\pm\frac{\sqrt{2}}{4}.$

(*vi*) নাভিলম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=2\cdot\frac{1}{36}\times\sqrt{24}$

$$=\frac{1}{18}\sqrt{24}.$$

অনুশীলনী

(এই পরিচ্ছেদের শেষে প্রদত্ত সংক্ষিপ্তসার দ্রষ্টব্য)

নিম্নে প্রদত্ত উপবৃত্তগুলির এই বিষয়গুলি নির্ণয় কর, যথা :

(*a*) অর্ধ-পরাক্ষের দৈর্ঘ্য ; (*b*) অর্ধ-উপাক্ষের দৈর্ঘ্য ;

(*c*) উৎকেন্দ্রতা ; (*d*) নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক ;

(*e*) নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ ; (*f*) প্রত্যেক নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য।

[প্রশ্ন 6 হইতে প্রশ্ন 10 এর ক্ষেত্রে কেন্দ্রের স্থানাঙ্কও নির্ণয় কর।]

1. $x^2+2y^2=2.$ 2. $3x^2+4y^2=48.$

3. $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1.$ 4. $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{12}=1.$

5. $225x^2+289y^2=65025.$ 6. $\dfrac{(x+1)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{5}=1.$

7. $\dfrac{(x+2)^2}{3}+\dfrac{(y-1)^2}{2}=1.$ 8. $x^2+2y^2-8y+6=0.$

9. $2x^2+3y^2-4x+12y+13=0.$

10. $5x^2+9y^2-30x-36y+36=0.$

11. p এর মান কত হইলে উপবৃত্ত $px^2+4y^2=1$ বিন্দুদ্বয় $(\pm 1, 0)$ এর মধ্য দিয়া গমন করিবে ? উপবৃত্তটির অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

12. উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ রেখাদ্বয় $7x+13y=87$ এবং $5x-8y+7=0$ এর ছেদবিন্দুর মধ্য দিয়া যায় এবং উহার নাভিলম্ব $\dfrac{32\sqrt{2}}{5}$; a এবং b নির্ণয় কর।

প্রশ্ন 13 হইতে প্রশ্ন 16এর ক্ষেত্রে ধরিয়া লও যে পরাক্ষ হইল x-অক্ষ এবং উপাক্ষ হইল y-অক্ষ। এখন নিম্নে প্রদত্ত ক্ষেত্রগুলিতে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যথা :

13. উপবৃত্তটির দুইটি বিন্দু হইল $(-3, 1)$ এবং $(2, -2)$.

14. উপবৃত্তটির একটি বিন্দু $(-3, 1)$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{\frac{2}{5}}$.

15. উৎকেন্দ্রতা $=4/5$ এবং প্রত্যেক নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=6$.

16. উৎকেন্দ্রতা $=1/3$ এবং নাভিদ্বয় হইল $(\pm 3, 0)$.

17(*a*). চিত্র 7.12 প্রসঙ্গে যাচাই করিয়া দেখাও যে.

$$\overline{CS}.\overline{CE}=\overline{CA}^2 \;;$$

ধরিয়া লও যে উপবৃত্তটির সমীকরণ হইল $x^2+2y^2=2.$

(ইহা উপবৃত্তের এক গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম।)

(b) দেখাও যে নাভি এবং পরাক্ষের যে কোন একটি প্রান্তবিন্দুর সংযোজক রেখাংশের দৈর্ঘ্য অর্ধ-পরাক্ষের সমান।

18. (a) নিম্নে প্রদত্ত উপবৃত্তস্থ বিন্দু $(4\sqrt{3}, 5)$ এর নাভি-ব্যাসার্ধদ্বয় (focal radii) এর দৈর্ঘ্য এবং **সমীকরণ** নির্ণয় কর :

$$25x^2+16y^2=1600.$$

(b) যদি S কোন উপবৃত্তের নাভি এবং P, Q, R উহার উপর তিনটি বিন্দু হয় এবং যদি এই বিন্দুত্রয়ের ভুজগুলি A.P. তে থাকে, তবে দেখাও যে $\overline{SP}$, $\overline{SQ}$, $\overline{SR}$ ও A.P. তে থাকিবে।

19. নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত (data) হইতে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 4 এবং 6 ; পরাক্ষের সমীকরণ $y=2$ এবং উপাক্ষের সমীকরণ $x=3$.

(ii) নাভিদ্বয় $(-1, 1)$ এবং $(3, 1)$; উৎকেন্দ্রতা $=2/3$.

(iii) পরাক্ষের প্রান্তবিন্দুদ্বয় $(-1, 1)$, $(3, 1)$ এবং উৎকেন্দ্রতা $=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

20. কোন উপবৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে, উহার একটি নাভি $(0, 3)$ এবং পরাক্ষের দৈর্ঘ্য 5 হইলে উহার সমীকরণ নিরূপণ কর।

21. একটি বিন্দু এইরূপে সঞ্চার করে যে $(4, 0)$ বিন্দু হইতে উহার দূরত্ব, $x=16$ রেখা হইতে উহার দূরত্বের সর্বদা অর্ধেক ; প্রমাণ কর যে বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল একটি উপবৃত্ত, যাহার উৎকেন্দ্রতা 1/2.

22. একটি বিন্দু (x, y) এইরূপে গতিশীল যে $(4, 2)$ এবং $(-2, 2)$ বিন্দুদ্বয় হইতে উহার দূরত্ব দুইটির সমষ্টি 8 হয়। উহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নিরূপণ কর।

23. কেন্দ্র, অর্ধ-অক্ষদ্বয়, শীর্ষদ্বয়, নাভিদ্বয়, নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ এবং অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর, যদি উপবৃত্তের সমীকরণ হয়

(i) $4x^2+9y^2-48x+72y+144=0.$

(ii) $9x^2+16y^2-36x+96y+36=0.$

24. অর্ধ-উপবৃত্তাকার এক খিলানের দুই **প্রান্তস্থ** পিলারদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব (span) হইল 150 মিটার এবং উহার সর্বাধিক উচ্চতা 45 মিটার। মধ্য-অবস্থানের উভয় পার্শ্বে ঐ স্থান হইতে প্রতিটি 25 মিটার দূরে দুইটি উলম্ব ধারক-স্তম্ভ আছে। এই স্তম্ভ দুইটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

25. যে উপবৃত্তের কেন্দ্র $(1, 2)$ বিন্দুতে ও একটি নাভি $(6, 2)$ বিন্দুতে অবস্থিত, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর, যদি উহা $(4, 6)$ বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়।

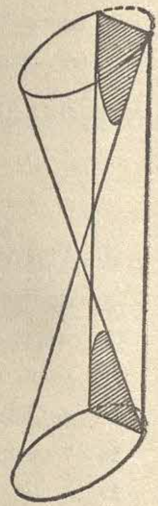
7·5. পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ

1. সংজ্ঞা। কোন বিন্দু যদি এইরূপে গতিশীল থাকে যে কোন স্থির বিন্দু S হইতে উহার দূরত্ব, একটি স্থির রেখা L হইতে উহার লম্ব দূরত্বের সহিত সর্বদা ধ্রুবক অনুপাত $e(e>1)$ রক্ষা করিয়া চলে, তবে উহার সঞ্চারপথ হইল একটি পরাবৃত্ত। ইহা মনে রাখা প্রয়োজন যে

(*i*) P বিন্দু সর্বদা রেখা L এবং বিন্দু S এর ধারক সমতলে অবস্থিত এবং (*ii*) S বিন্দু L-রেখার উপরে অবস্থিত নহে।

স্থির বিন্দুটিকে পরাবৃত্তটির একটি **নাভি** ও স্থির রেখা L কে উহার **অনুরূপ নিয়ামক** বলে এবং ধ্রুবক অনুপাত $e(e>1)$ কে উহার **উৎকেন্দ্রতা** বলা হয়।

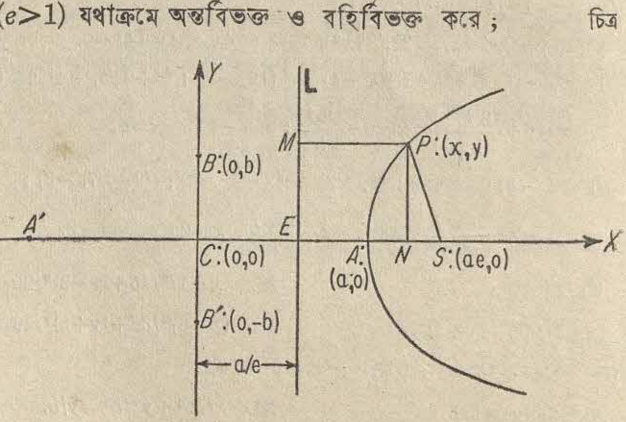
2. পরাবৃত্ত একটি কনিক্ সেক্সন্ ; অর্থাৎ উহা লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু ও একটি সমতলের এইপ্রকার ছেদের ফলে ছেদ তলে উৎপন্ন হয়, যথা শঙ্কুটি দ্বিগুণ-শঙ্কু (double-cone) হইবে এবং সমতলটি এমনভাবে নত হইবে যে উহা শঙ্কুটির উভয় অংশকে ছেদ করিবে কিন্তু শঙ্কুর শীর্ষের মধ্য দিয়া যাইবে না। (চিত্র 7.15 দ্রষ্টব্য।)



চিত্র 7.15

3. পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ নিরূপণ

ধরা যাক, কোন পরাবৃত্তের নাভি S এবং উহার অনুরূপ নিয়ামক রেখা L ; S এর মধ্য দিয়া রেখা L এর উপর $\overline{SE}$ লম্ব অঙ্কন করা হইল (চিত্র 7.16)। $\overrightarrow{SE}$ রেখার উপর এইরূপ দুইটি বিন্দু A এবং A′ লওয়া হইল যেন উহারা রেখাংশ $\overline{SE}$ কে $e:1$ অনুপাতে $(e>1)$ যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করে ;



চিত্র 7.16

এখানে e হইল পরাবৃত্তটির প্রদত্ত উৎকেন্দ্রতা। তাহা হইলে সংজ্ঞানুসারে, A ও A' পরাবৃত্তস্থ বিন্দু।

$$(\because \overline{AS}=e.\overline{EA} \text{ এবং } \overline{A'S}=e.\overline{A'E}.)$$

ধরা যাক, $\overline{A'A}$ এর মধ্যবিন্দু C.

এখন নিম্নে প্রদত্ত প্রকারে একপ্রস্ত আয়ত অক্ষ মনোনীত করা হইল, যথা :

C হইবে মূলবিন্দু (0, 0) ; রেখা $\overleftrightarrow{CE}$ x-অক্ষ ; C বিন্দু-গামী এবং $\overleftrightarrow{CE}$ রেখার উপর লম্ব $\overleftrightarrow{CY}$ রেখা y-অক্ষ।

এখন নিম্নলিখিত দুইটি গুরুত্বপূর্ণ সম্বন্ধ প্রমাণ করা হইবে, যথা :

$$(i)\ \overline{CS}=e.\overline{CA}\ ;\quad (ii)\ \overline{CA}=e.\overline{CE}.$$

অঙ্কন অনুসারে,

$$\overline{AS}=e.\overline{EA} \quad \text{এবং} \quad \overline{A'S}=e.\overline{A'E}$$

$\therefore$ বিয়োগ দ্বারা,

$$\overline{A'S}-\overline{AS}=\overline{A'A}$$

$$\therefore\ \overline{A'A}=e.(\overline{A'E}-\overline{EA})=e.(\overline{A'C}+\overline{CE}-\overline{CA}+\overline{CE})$$

অর্থাৎ, $2\overline{CA}=2e.\overline{CE}$

$\therefore\ \overline{CA}=e.\overline{CE}$ ··· ··· ··· সম্পর্ক (ii) প্রমাণিত হইল।

পুনরায় যোগ করিয়া,

$$\overline{A'S}+\overline{AS}=\overline{A'C}+\overline{CS}+\overline{CS}-\overline{CA}=2\overline{CS}$$

$$\therefore\ 2\overline{CS}=\overline{A'S}+\overline{AS}=e.(\overline{A'E}+\overline{EA})=e.\overline{A'A}$$

$\therefore\ \overline{CS}=e.\overline{CA}$ ··· ··· ··· সম্পর্ক (i) প্রমাণিত হইল

ধরা যাক $\overline{CA}=a$; তাহা হইলে (i) ও (ii) হইতে

$$\overline{CS}=ae \quad \text{এবং} \quad \overline{CE}=a/e.$$

সুতরাং S এর স্থানাঙ্ক$=(ae, 0)$, A র স্থানাঙ্ক$=(a, 0)$

এবং নিয়ামক L এর সমীকরণ হইল $x=a/e$.

ধরা যাক, P : (x, y) পরাবৃত্তটির উপর যে কোন একটি বিন্দু। নিয়ামক L এর উপর $\overline{PM}$ লম্ব অঙ্কন করা হইল। তাহা হইলে পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে লেখা যায়,

$$\overline{SP}=e.\overline{PM}$$

$$\text{বা, } |\overline{SP}|^2=e^2.|\overline{PM}|^2$$

$$\therefore\ (x-ae)^2+(y-0)^2=e^2\left(x-\frac{a}{e}\right)^2$$

$$[\because \overline{MP}=\overline{EN}=\overline{CN}-\overline{CE}=x-a/e]$$

বা, $x^2-2x.ae+a^2e^2+y^2=e^2x^2-2ex.a+a^2$

বা, $x^2(e^2-1)-y^2=a^2(e^2-1)$

অর্থাৎ, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1.$

এখন, যেহেতু $e^2>1$, $a^2(e^2-1)$ রাশিটি স্পষ্টত ধনাত্মক ;

সুতরাং ধরা যাইতে পারে, $a^2(e^2-1)=b^2$(যেখানে b^2 একটি ধনসংখ্যা)।

টীকা। এই ক্ষেত্রে $b^2>,=,$ বা $<a^2$ হইতে পারে, এবং ইহা হইবে যখন e^2 যথাক্রমে $>,=,$ বা <2 হইবে।

পূর্বের সম্পর্কটিতে এই মান বসাইলে উহা নিম্নের আকারপ্রাপ্ত হয় :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(I)}$$

ইহা পরাবৃত্তটির যে কোন বিন্দু P : (x, y) এর ক্ষেত্রে সত্য ; অপরপক্ষে পরাবৃত্তের উপরে অবস্থিত নয় এমন বিন্দুর ক্ষেত্রে এই সম্পর্কটি সত্য নহে। সুতরাং ইহাই পরাবৃত্তটির সমীকরণ।

টীকা। (*i*) পরাবৃত্তটি x-অক্ষকে (অর্থাৎ, $y=0$ রেখাকে) দুইটি বিন্দু A : $(a, 0)$ এবং A$'$: $(-a, 0)$ এ ছেদ করে। এই বিন্দু দুইটিকে **পরাবৃত্তটির শীর্ষ বিন্দুদ্বয় বলা হয়।**

(*i*) y-অক্ষ (অর্থাৎ, $x=0$ রেখা) বক্ররেখাটিকে আদৌ ছেদ করে না, কারণ যদি (I) এ $x=0$ ধরা হয়, তবে y এর কোন বাস্তব মান পাওয়া যায় না।

y-অক্ষের উপর এইরূপ দুইটি বিন্দু B এবং B$'$ লওয়া হয় যেন $\overline{\text{OB}}=b$ এবং $\overline{\text{OB}'}=-b$ হয়, **অর্থাৎ** B এবং B$'$ এর স্থানাঙ্ক যেন যথাক্রমে $(0, b)$ এবং $(0, -b)$ হয়। এক্ষেত্রে স্পষ্ট উল্লেখ থাকে যে B **এবং** B$'$ **পরাবৃত্তস্থ বিন্দু নহে।**

সংজ্ঞা। রেখাংশ $\overline{\text{A}'\text{A}}$ (শীর্ষদ্বয়ের সংযোজক) কে পরাবৃত্তটির **তির্যক অক্ষ (Transverse axis)** বলা হয়।

রেখাংশ $\overline{\text{B}'\text{B}}$ (যেখানে B, B$'$ হইল, উপরের টীকায় বর্ণনামত y-অক্ষের উপর দুইটি বিন্দু) কে পরাবৃত্তটির **অনুবন্ধী বা প্রতিযোগী অক্ষ (conjugate axis)** বলা হয়।

বিন্দু C কে (চিত্র 7.16) বলা হয় পরাবৃত্তটির কেন্দ্র।

অনেক ক্ষেত্রে সমগ্র রেখা $\overleftrightarrow{\text{A}'\text{A}}$ কে এবং সমগ্র রেখা $\overleftrightarrow{\text{B}'\text{B}}$ কে যথাক্রমে তির্যক অক্ষ এবং অনুবন্ধী অক্ষ বলিয়া উল্লেখ করা হইয়া থাকে—প্রসঙ্গ হইতে তখন উহার প্রকৃত অর্থ স্পষ্ট হইবে।

মনে রাখিতে হইবে যে,

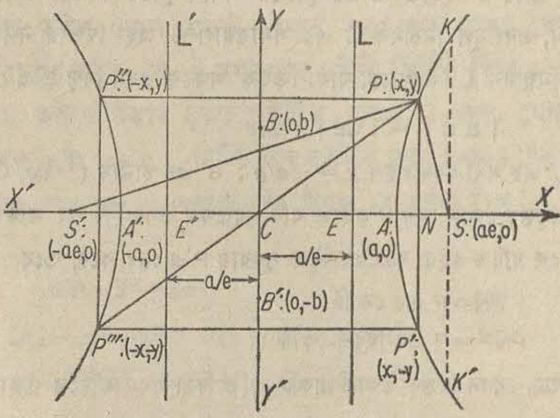
$$\text{তির্যক অক্ষের দৈর্ঘ্য} = \overline{A'A} = 2a$$

$$\text{অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য} = \overline{B'B} = 2b.$$

4. পরাবৃত্ত $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ এর আকৃতি

চিত্র 7.17এর প্রতি দৃষ্টি আকর্ষণ করা যাইতেছে।

(*i*) যদি P : (x, y) পরাবৃত্ত $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ এর উপর যে কোন বিন্দু হয়, তবে ইহা সহজেই যাচাই করিয়া দেখা যায় যে P′ : $(x, -y)$, P″ : $(-x, y)$, P‴ : $(-x, -y)$ বিন্দু তিনটিও বক্ররেখাটির উপর অবস্থিত।



চিত্র 7.17

সিদ্ধান্ত : বক্ররেখাটি, x-অক্ষ ও y-অক্ষ, এই উভয় অক্ষ সম্পর্কেই প্রতিসম। অধিকন্তু C বিন্দুর মধ্য দিয়া অঙ্কিত প্রত্যেক রেখা (অনুবন্ধী অক্ষ বা y-অক্ষ ব্যতীত) বক্ররেখাটিকে C হইতে সমদূরবর্তী দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে ; অর্থাৎ বক্ররেখাটির C বিন্দুগামী জ্যাগুলি C বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। এই C বিন্দুই হইল পরাবৃত্তটির **কেন্দ্র**।

(*ii*) সমীকরণে $y = 0$ বসাইয়া দেখা যায় $x = \pm a$; সুতরাং বক্ররেখা x-অক্ষকে যে দুই বিন্দু A ও A′এ ছেদ করে তাহারা কেন্দ্র হইতে a দূরত্বে অবস্থিত।

(*iii*) সমীকরণে $x = 0$ বসাইয়া দেখা যায় $y^2 = -b^2$; সুতরাং ঐ বক্ররেখা y-অক্ষকে আদৌ ছেদ করে না।

(*iv*) $-a$ এবং $+a$র মধ্যবর্তী x এর যে কোন মান y^2 কে ঋণাত্মক করে, সুতরাং ঐ বক্ররেখার কোন অংশ A′ এবং A এর মধ্যে অবস্থিত নহে। কিন্তু লক্ষ্য করা যায় যে x এর a অপেক্ষা বৃহত্তর যে কোন সাংখ্যমান (অর্থাৎ $x > a$ বা $x < -a$) হইতে পারে। সুতরাং বক্ররেখাটি উভয় অভিমুখে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত, এবং উহা দুইটি শাখা (two branches) লইয়া গঠিত।

পূর্ববর্তী বিশ্লেষণ হইতে এই সিদ্ধান্ত করা যায় যে পরাবৃত্ত কোন বদ্ধ বক্ররেখা নহে—ইহা অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত দুইটি শাখা লইয়া গঠিত। প্রত্যেক শাখা x-অক্ষ সম্পর্কে প্রতিসম। উহার C গামী যে কোন জ্যা C বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। y-অক্ষ বরাবর যদি কোন দর্পণ স্থাপন করা হয়, তবে উহার একটি শাখা, অপরটির প্রতিবিম্ব হইবে। কিন্তু শীর্ষদ্বয় A′ এবং A এর মধ্যে বক্ররেখাটির কোন বিন্দু অবস্থিত নহে।

প্রতিসাম্যের ধারণা হইতে একটি সিদ্ধান্ত

বক্ররেখাটির সমীকরণ যে প্রতিসাম্য প্রদর্শন করে তাহা হইতে দেখা যায় যে তির্যক অক্ষের উপর C হইতে S এর দূরত্বের সমান দূরত্বে দ্বিতীয় একটি নাভি S′ অবশ্যই বর্তমান, এবং মূল নিয়ামক L এর সমান্তরাল ও এই দ্বিতীয় নাভির অনুরূপ একটি দ্বিতীয় নিয়ামক L′ ও আছে, যাহা তির্যক অক্ষকে এমন বিন্দু E′এ ছেদ করে যে

$$|\overline{E'C}| = |\overline{CE}| = a/e$$

সুতরাং L′ এর সমীকরণ হইল $x = -a/e$; S′ এর স্থানাঙ্ক $(-ae, 0)$।

(v) পরাবৃত্তস্থ কোন বিন্দু P হইতে যদি পরাক্ষের উপর $\overline{PN}$ লম্ব অঙ্কিত হয়, এবং যদি এই রেখাংশ বর্ধিত হইয়া বক্ররেখাটিকে পুনরায় P′এ ছেদ করে, তবে

$\overline{PN}$ = P এর কোটি

$\overline{PNP'}$ = P এর দ্বিগুণ-কোটি।

বিশেষক্ষেত্রে, কোন দ্বিগুণ কোটি একটি নাভি দিয়া গমন করিলে উহাকে **নাভি-লম্ব** বলে। উপবৃত্তের ক্ষেত্রের ন্যায় এখানেও প্রমাণ করা যায় যে

নাভি-লম্ব দুইটির প্রত্যেকের দৈর্ঘ্য হইল $2b^2/a$; ইহার প্রমাণ ছাত্রছাত্রীদের অনুশীলনী হিসাবে রাখিয়া দেওয়া হইল।

[**ইঙ্গিত :** ধর $k : (ae, l)$ এবং এই স্থানাঙ্কদ্বয় পরাবৃত্তটির সমীকরণে বসাও।]

(vi) বক্ররেখাটির সমীকরণ হইতে পরাবৃত্তের একটি জ্যামিতিক ধর্ম পাওয়া যায়, যথা :

যদি পরাবৃত্তস্থ বিন্দু P এর কোটি $\overline{PN}$ হয়, তবে

$$\frac{\overline{PN}^2}{\overline{A'N}.\overline{AN}} = \frac{\overline{CB}^2}{\overline{CA}^2} = \frac{b^2}{a^2}$$ যাহা P এর সকল অবস্থানে ধ্রুবক।

[উপবৃত্তের ক্ষেত্রের ন্যায় এখানেও এই সম্পর্কটি প্রমাণ করা যাইতে পারে। ইহা ছাত্রছাত্রীদের অনুশীলনের জন্য রাখিয়া দেওয়া হইল।]

(vii) কোন বিন্দুর নাভি-দূরত্ব (focal distance)

পরাবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দুর ক্ষেত্রে $\overline{S'P}$ এবং $\overline{SP}$ এই নাভি-দূরত্বদ্বয়ের **অন্তর** তির্যক অক্ষের দৈর্ঘ্যের সমান : কারণ

চিত্র 7.17তে রেখাংশ $\overline{PP''}$ যেখানে নিয়ামকদ্বয় L এবং L′ কে ছেদ করিয়াছে সেই বিন্দু দুইটিকে যথাক্রমে M এবং M′ ধরিলে পাওয়া যায়,

$$\overline{SP}=e.\ \overline{PM}=e\left(x-\tfrac{a}{e}\right)=ex-a$$

$$\overline{S'P}=e.\ \overline{PM'}=e\left(\tfrac{a}{e}+x\right)=a+ex$$

$\therefore$ $\overline{S'P}-\overline{SP}=2a$ যাহা P এর সকল অবস্থানে একটি ধ্রুবক রাশি।

$\overline{SP}$ এবং $\overline{S'P}$ এই দূরত্বকে প্রায়ই নাভি-ব্যাসার্ধদ্বয় (focal radii) বলিয়া উল্লেখ করা হয়।

5. শেষের ধর্মটিকে পরাবৃত্তের সংজ্ঞারূপেও গ্রহণ করা যায় :

পরাবৃত্ত হইল এমন একটি বিন্দুর সঞ্চারপথ যাহা কোন সমতলে এইরূপে বিচরণ করে যে ঐ সমতলস্থ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু S : $(c, 0)$ এবং S′ : $(-c, 0)$ হইতে উহার দূরত্ব দুইটির অন্তর $2a$ হয়, যেখানে a হইল একটি ধ্রুবক এবং $a<c$. নির্দিষ্ট বিন্দু দুইটিকে তখন উহার নাভি বলা হয়।

ধরা যাক, P : (x, y) সঞ্চারপথটির উপর যে কোন বিন্দু। পূর্ববর্তী সংজ্ঞা অনুসারে

$$S'P-\overline{SP}=2a$$

বা, $\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$

বা $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

বর্গ করিয়া ও সরল করিয়া পাওয়া যায়,

$$xc-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$

পুনরায় বর্গ ও সরল করিয়া,

$$(c^2-a^2)\,x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2),$$

বা, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{(c^2-a^2)}=1.$

যেহেতু $c>a$, সুতরাং $c^2-a^2=$ধনাত্মক$=b^2$ (ধরা যাক)। তাহা হইলে সমীকরণটির আকার হইল

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

ইহা পরাবৃত্তটির পূর্বে বর্ণিত আদর্শ সমীকরণ, (যদি ধরা যায় $c/a=e$)।

6. পরাবৃত্তের সমীকরণের অন্যান্য আকার

(*i*) নাভিদ্বয়কে y-অক্ষের উপর যদি লওয়া হয় এবং যদি নিয়ামকদ্বয় x-অক্ষের সমান্তরাল হয়, তাহা হইলে পরাবৃত্তটির সমীকরণ নিরূপণ (পূর্ববর্তী 3নং)

পূর্বের অনুরূপ প্রণালীতে করা যায়, কেবল এক্ষেত্রে x এবং y এর মধ্যে স্থান বিনিময় হইবে। সুতরাং সমীকরণ

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

এমন একটি পরাবৃত্তকে প্রকাশ করে, যাহার তির্যক-অক্ষ y-অক্ষ বরাবর অবস্থিত।

পরাবৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং নাভিদ্বয় স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের একটির উপর অবস্থিত হইলে উহার সমীকরণের সাধারণ আকার হইবে

$$Ax^2-By^2=\pm 1, \ (A, B>0)$$

যেখানে ধনাত্মক চিহ্নটি আসিবে, যখন নাভিদ্বয় x-অক্ষের উপর থাকিবে।

(ii) কিন্তু যদি পরাবৃত্তের কেন্দ্র (h, k) বিন্দুতে অবস্থিত হয় এবং তির্যক অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল হয়, তবে পরাবৃত্তটির সমীকরণের আকার হইবে

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

যদি তির্যক অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল হয়, তবে ঐ সমীকরণ হইবে

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1.$$

টীকা। সর্বক্ষেত্রেই লওয়া হইয়াছে যে

তির্যক-অক্ষের দৈর্ঘ্য $=2a$

অনুবন্ধী-অক্ষের দৈর্ঘ্য $=2b$.

7. যে পরাবৃত্তের অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য সমান তাহাকে **সমপরাবৃত্ত** (**an equilateral or a rectangular hyperbola**) বলা হয়। তখন সমীকরণটির আকার হয়

$$x^2-y^2=\pm a^2,$$

এবং এইরূপ পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা $=\sqrt{2}$.

*8 পরাবৃত্তের অসীমপথ (Asymptotes)

প্রদত্ত : পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ, যথা

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

* এই অনুচ্ছেদটি বাদ দেওয়া যাইতে পারে, কারণ অসীমপথ বিষয়ক ধারণা উচ্চ মাধ্যমিক পাঠ্যক্রমের অন্তর্ভুক্ত নহে। এখানে অবশ্য অনুচ্ছেদটি সংযোজিত হইল এই কারণে যে আমরা মনে করি, পরাবৃত্তকে উহার অসীমপথের সহিত যুক্তভাবে কল্পনা করিলেই উহার আকৃতি সম্পর্কে সর্বোৎকৃষ্ট ধারণা করা সম্ভব। সাধারণভাবে অসীমপথ নির্ণয়ের জন্য উচ্চতর কলন (Advanced Calculus) বিষয়ে জ্ঞানের প্রয়োজন।

ইহাকে এই প্রকারে লেখা যায়, যেমন : $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

বা, $(bx-ay)(bx+ay)=a^2b^2$

যখন এই বক্ররেখা, এবং সরলরেখা,

$$bx-ay=0$$

কে একই স্থানাঙ্ক অক্ষ সম্পর্কে অঙ্কন করা হয়, তখন চিত্রটি হইতে দেখা যায় যে কেন্দ্র হইতে দূরত্ব যতই বৃদ্ধি পায় (**অর্থাৎ**, x যতই বৃদ্ধি পায়), পরাবৃত্তটি ততই সরলরেখাটির নিকটবর্তী হইতে থাকে, কিন্তু উহা কখনই রেখাটি পর্যন্ত পৌঁছায় না।

ধরা যাক্, P : (x_1, y_1) পরাবৃত্তটির উপর প্রথম অথবা তৃতীয় পাদতে অবস্থিত একটি বিন্দু। রেখা $bx-ay=0$ হইতে P এর দূরত্ব হইল

$$d=\left|\frac{bx_1-ay_1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

যেহেতু P বক্ররেখাটির উপর অবস্থিত, সুতরাং ইহার স্থানাঙ্ক বক্ররেখার সমীকরণটিকে অবশ্যই সিদ্ধ করিবে,

অর্থাৎ, $b^2x_1^2-a^2y_1^2=a^2b^2$

বা, $bx_1-ay_1=\dfrac{a^2b^2}{bx_1+ay_1}$

$$\therefore\quad d=\left|\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{bx_1+ay_1}\right|$$

ইহা সুস্পষ্ট যে d কখনই শূন্য হইতে পারে না; P যতই কেন্দ্র হইতে দূরে যায়, যাহার ফলে x_1 এবং y_1 উভয়েই অনির্দিষ্ট ভাবে বৃদ্ধি পায়, তখন $d\to 0$.

অনুরূপে একই ফল পাওয়া যায়, যদি রেখা

$$bx+ay=0$$

লওয়া হয়।

এইরূপ ক্ষেত্রে বলা হইয়া থাকে যে,

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

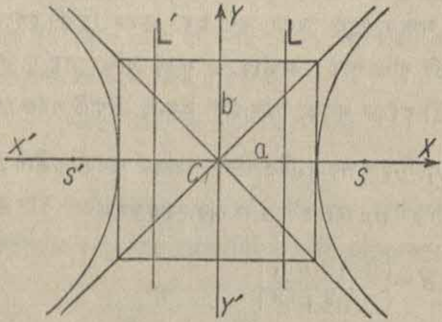
হইল পরাবৃত্ত

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

এর অসীমপথ (Asymptotes).

এ সম্পর্কে একটি কার্যকরী সূত্র হইল এই যে :

পরাবৃত্তের অসীমপথ হইল একটি আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় বরাবর রেখা দুইটি, যে আয়তক্ষেত্রের কেন্দ্র হইল পরাবৃত্তটির কেন্দ্র এবং যাহার বাহুগুলি পরাবৃত্তটির অক্ষদ্বয়ের সহিত সমান ও সমান্তরাল (চিত্র 7.18)।



চিত্র 7.18

সমপরাবৃত্তের (rectangular hyperbola) অসীমপথ দুইটি পরস্পর সমকোণে অবস্থিত হয় ; **rectangular** নামটির যৌক্তিকতা এইখানেই।

উদা 7. নিম্নে প্রদত্ত পরাবৃত্তটির শীর্ষদ্বয় এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ, নাভি-লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর :

$$9x^2-16y^2=144.$$

প্রদত্ত সমীকরণটিকে নিম্নের আকারে লেখা হইল, যথা :

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

তাহা হইলে, অর্ধ-তির্যক অক্ষ $=a=4$

অর্ধ-অনুবন্ধী অক্ষ $=b=3$

$\because\ b^2=a^2(e^2-1),\ \therefore\ e^2-1=\dfrac{9}{16}$, বা $e=\dfrac{5}{4}$.

$ae=4\cdot\frac{5}{4}=5$; $\dfrac{a}{e}=\dfrac{4}{5/4}=\dfrac{16}{5}$.

$\therefore$ শীর্ষদ্বয় হইল $(\pm a, 0)=(\pm 4, 0)$

নাভিদ্বয় হইল $(\pm ae, 0)=(\pm 5, 0)$

নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ হইল $x=\pm a/e=\pm 16/5$

নাভি-লম্বের দৈর্ঘ্য $=2\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{18}{4}=\dfrac{9}{2}$.

উদা. 8. কোন পরাবৃত্তের নাভিদ্বয় (0, ±3) বিন্দুতে অবস্থিত হইলে এবং অনুবন্ধী অক্ষ 5 হইলে উহার সমীকরণ নিরূপণ কর।

এখানে, $b=5/2$, $ae=3$; যেহেতু $b^2=a^2e^2-a^2$,

$$\therefore\ a^2=a^2e^2-b^2=9-\tfrac{25}{4}=\tfrac{11}{4}.$$

যেহেতু নাভিদ্বয় y-অক্ষের উপরে অবস্থিত, সুতরাং সমীকরণটি হইল

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1.$$

বা, $$\frac{y^2}{11/4}-\frac{x^2}{25/4}=1$$

বা, $$100y^2-44x^2=275.$$

উদা. 9. নিম্নে প্রদত্ত পরাবৃত্তের কেন্দ্র এবং তির্যক অক্ষের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর :

$$x^2-2y^2-2x+8y-1=0.$$

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে,

$$(x^2-2x+1)-2(y^2-4y+4)=-8+2=-6.$$

বা, $$2(y-2)^2-(x-1)^2=6.$$

বা, $$\frac{(y-2)^2}{3}-\frac{(x-1)^2}{6}=1.$$

∴ কেন্দ্র (1, 2) বিন্দুতে অবস্থিত এবং y-অক্ষের সমান্তরাল তির্যক অক্ষের দৈর্ঘ্য হইল $2\sqrt{3}$.

অনুশীলনী

1. p এর মান নির্ণয় কর, যদি পরাবৃত্ত $px^2-4y^2=1$ বিন্দুদ্বয় $(\pm1, 0)$ এর মধ্য দিয়া যায়। তির্যক এবং অনুবন্ধী অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য এবং উৎকেন্দ্রতাও নির্ণয় কর।

2. পরাবৃত্ত $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ রেখাদ্বয় $7x+13y-87=0$ এবং $5x-8y+7=0$ এর ছেদবিন্দুগামী এবং ইহার নাভি-লম্বের দৈর্ঘ্য হইল $\frac{32\sqrt{2}}{5}$; প্রমাণ কর যে পরাবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা হইল $\frac{1}{5}\sqrt{57}$.

3. নিম্নে প্রদত্ত পরাবৃত্তগুলির উৎকেন্দ্রতা, নাভি-লম্বের দৈর্ঘ্য, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $4x^2-9y^2=36$; (ii) $x^2-2y^2=2$;

(iii) $8x^2-y^2=2$; (iv) $9x^2-16y^2=36$.

4. স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়কে পরাবৃত্তের অক্ষ ধরিয়া উহার সমীকরণ নির্ণয় কর, যখন

(*i*) উহার তির্যক অক্ষ 3 এবং অনুবন্ধী অক্ষ 4.

(*ii*) উহার অনুবন্ধী অক্ষ 5 এবং নাভিদ্বয়ের দূরত্ব 13.

(*iii*) উহার অনুবন্ধী অক্ষ 7 এবং উহা (3, −2) বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়।

(*iv*) উহার নাভিদ্বয়ের দূরত্ব 16 এবং উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{2}$.

5. যে পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা 5/4, নাভি $(a, 0)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $4x-3y=a$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। উহার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং অপর নিয়ামকের সমীকরণও নির্ণয় কর।

6. কোন পরাবৃত্তের শীর্ষ উহার কেন্দ্র এবং নাভির অন্তর্বর্তী দূরত্বকে সমদ্বিখণ্ডিত করে; তির্যক অক্ষের নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য প্রদত্ত আছে। পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. কোন পরাবৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং তির্যক-অক্ষ y-অক্ষ বরাবর অবস্থিত; পরাবৃত্তটি (4, 6) এবং (−1, −3) বিন্দুগামী হইলে উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. একটি পরাবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের সহিত সমান্তরাল এবং কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত; যদি উহার নাভি-লম্ব 18 হয় এবং নাভিদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 12 হয়, তবে উহার সমীকরণ নিরূপণ কর।

9. নাভিদ্বয় (0, ±3) বিন্দুতে এবং অনুবন্ধী অক্ষ 5 হইলে পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

10. যদি কোন পরাবৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে ও তির্যক-অক্ষ x-অক্ষের উপর অবস্থিত হয় এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{2}\sqrt{7}$ হয় ও নাভি-লম্বের দৈর্ঘ্য 6 হয়, তবে উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

11. একটি বিন্দু এইরূপে বিচরণ করিতেছে যে $4x-3y+11=0$ এবং $4x+3y+5=0$ রেখাদ্বয় হইতে উহার সাংখ্য-দূরত্ব দুইটির গুণফল 144/25 হয়। বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

12. একটি বিন্দু (x, y) এইভাবে গতিশীল যে (0, 4) হইতে উহার দূরত্ব, $4y-9=0$ রেখা হইতে উহার দূরত্বের 4/3; উহার সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

13. (*a*) কেন্দ্র, (*b*) শীর্ষদ্বয় (*c*) নাভিদ্বয়, (*d*) অসীমপথ ও নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং পরাবৃত্তটির একটি স্থূল চিত্র (rough diagram) অঙ্কন কর, যখন উহার সমীকরণ হইবে

(*i*) $9x^2-16y^2-18x-64y-199=0.$

(ii) $9x^2-16y^2-36x-32y-124=0.$

(iii) $3x^2-y^2+12x+2y-1=0.$

প্রত্যেক ক্ষেত্রে নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণও নির্ণয় কর।

14. দেখাও যে পরাবৃত্ত $9x^2-16y^2=144$ এর উপরিস্থিত বিন্দু $\left(6, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ হইতে নাভিদ্বয়ের দূরত্বের অন্তর তির্যক-অক্ষের দৈর্ঘ্যের সমান।

নিম্নলিখিত সংজ্ঞাটি স্মরণ রাখিবে ঃ

দুইটি পরাবৃত্তকে পরস্পর অনুবন্ধী বা প্রতিযোগী (conjugate) বলা হয়, যদি একটির তির্যক অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষ অন্যটির যথাক্রমে অনুবন্ধী ও তির্যক অক্ষের সমান হয়। যদি পরাবৃত্তের সমীকরণকে আদর্শ আকারে লেখা হয়, তবে উহার অনুবন্ধী-পরাবৃত্তের সমীকরণ পাওয়া যায়, প্রদত্ত সমীকরণে x^2 এবং y^2 এর সহগের চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া।

যেমন, $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ এবং $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ হইল পরস্পর অনুবন্ধী-পরাবৃত্ত।

15. $4x^2-9y^2=36$ পরাবৃত্তের অনুবন্ধী পরাবৃত্তটির সমীকরণটি লিখ। প্রত্যেকটির অসীমপথের সমীকরণও লিখ এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

16. যদি e এবং e' কোন পরাবৃত্তের ও উহার অনুবন্ধী পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e'^2}=1.$$

17. যে গতিশীল বিন্দুর $(-6,-4)$ এবং $(2,-4)$ হইতে দূরত্বদ্বয়ের অন্তর সর্বদা 6, তাহার সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

18. পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর যদি উহার কেন্দ্র $(-1, 3)$, নাভি $(2, 3)$ এবং উৎকেন্দ্রতা 3/2 হয়।

19. সেই পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যাহার নাভিদ্বয় $(-3,-1)$ এবং $(2,-1)$ ও তির্যক-অক্ষ একক দৈর্ঘ্যের।

20. একটি পরাবৃত্তের নাভিদ্বয় $(6, 2)$, $(-4, 2)$ এবং উৎকেন্দ্রতা 5/4 ; উহার সমীকরণ এবং উহার অসীমপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

পরাবৃত্তটির একটি স্থূল চিত্র অঙ্কন কর।

21. যে পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা 2, নাভি $(1, 2)$ এবং অনুরূপ নিয়ামক $x+2=0$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

22. কোন পরাবৃত্তের একটি নাভি (2, 3) বিন্দুতে অবস্থিত, অনুরূপ নিয়ামকটির সমীকরণ $x+2y=1$ এবং উহার উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{3}$; পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

1. $p=1$; 2 এবং 1 ; $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **3.** (*i*) $\frac{\sqrt{13}}{3}$; $8/3$; $(\pm\sqrt{13}, 0)$; $x=\pm\frac{9\sqrt{13}}{13}$.

(*ii*) $\sqrt{\frac{3}{2}}$; $\sqrt{2}$; $(\pm\sqrt{3}, 0)$, $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(*iii*) 3 ; 8 ; $(\pm 3/2, 0)$; $x=\pm 1/6$. (*iv*) $5/4$; $9/4$; $(\pm 5/2, 0)$, $x=\pm 8/5$.

4. (*i*) $16x^2-9y^2=36$; (*ii*) $25x^2-144y^2=900$;

(*iii*) $65x^2-36y^2=441$; (*iv*) $x^2-y^2=32$.

5. $7y^2+24xy-24ax-6ay+15a^2=0$; $(-a/3, a)$; $12x-9y+29a=0$.

6. $3x^2-y^2=3a^2$. **7.** $5y^2-9x^2=36$.

8. $3x^2-y^2=27$, $3y^2-x^2=27$. **9.** $100y^2-44x^2=275$.

10. $3x^2-4y^2=48$. **11.** $\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{16}=1$.

12. $y^2/9-x^2/7=1$. **13.** (*i*) $(1,-2)$; $(-3,-2)$, $(5,-2)$;

$(-4,-2)$, $(6,-2)$; $y+2=\pm\frac{3}{4}(x-1)$; নিয়ামকদ্বয় : $x=21/5$, $x=-11/5$.

(*ii*) $(2,-1)$; $(7,-1)$; $(-3,-1)$; $(6,-1)$, $(-2,-1)$; $y+1=\pm\frac{3}{4}(x-2)$;

নিয়ামকদ্বয় : $x=\frac{26}{5}$, $x=-\frac{6}{5}$.

(*iii*) $(-2, 1)$; $(0, 0)$, $(-4, 1)$; $(2, 1)$, $(-6, 1)$: $y-1=\pm\sqrt{3}(x+2)$;

নিয়ামকদ্বয় : $x+2=0$, $x+3=0$.

15. $9y^2-4x^2=36$; $y=\pm(2/3)x$ (উভয় ক্ষেত্রে) ;

$(\sqrt{13}, 0)$, $(-\sqrt{13}, 0)$ $(0, \sqrt{13})$ এবং $(0, -\sqrt{13})$.

17. $\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y+4)^2}{7}=1$. **18.** $\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{5}=1$.

19. $6(2x+1)^2-(y+1)^2=6$. **20.** $\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$; $3x+4y-11=0$ এবং $3x-4y+5=0$.

21. $\frac{(x+3)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{12}=1$. **22.** $2x^2-7y^2-12xy-14x-18y+62=0$.

উপবৃত্ত এবং পরাবৃত্তের সমীকরণ
(সংক্ষিপ্তসার)

	উপবৃত্ত	পরাবৃত্ত
নাভি-নিয়ামক সংজ্ঞা	প্রদত্ত একটি স্থির বিন্দু S (নাভি) এবং একটি স্থির রেখা L (নিয়ামক) $\overline{SP} : \overline{PM}$ = ধ্রুবক e $(0<e<1)$	প্রদত্ত একটি স্থির বিন্দু S (নাভি) এবং একটি স্থির রেখা L (নিয়ামক) $\overline{SP} : \overline{PM}$ = ধ্রুবক $e>1$.
কনিক্ সেক্সন্	শঙ্কু-উৎপাদক একটি রেখার (generator) সহিত কোন কোণে নত সমতল কর্তৃক লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কুর একটি মাত্র অংশকে (one nappe) ছেদের ফলে ছেদতলে উৎপন্ন হয়। উৎকেন্দ্রতা +(ve), কিন্তু <1	শঙ্কুর শীর্ষগামী নহে, অথচ লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কুর উভয় অংশকে (both nappes) ছেদ করে এইরূপভাবে আনত একটি সমতল কর্তৃক উক্ত শঙ্কুর ছেদের ফলে ছেদতলে উৎপন্ন হয়। উৎকেন্দ্রতা >1
সাধারণ সমীকরণ ঃ প্রদত্ত : নাভি (h, k) এবং নিয়ামক: $ax+by+c=0$	$(x-h)^2+(y-k)^2=e^2\dfrac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$ এখানে $e^2<1$	$(x-h)^2+(y-k)^2=e^2.\dfrac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$ এখানে $e^2>1$
কতিপয় সংজ্ঞা	S এর মধ্য দিয়া $\overline{SE} \perp$, L অঙ্কন কর ; A, A′ এইরূপে লও যেন উহারা $\overline{SE}$কে অন্তঃস্থ ও বহিস্থঃভাবে $e : 1$ $(0<e<1)$ অনুপাতে বিভক্ত করে। A, A′ **শীর্ষদ্বয়** $\overline{A'A}$ **পরাক্ষ** C = $\overline{A'A}$ এর মধ্যবিন্দু = কেন্দ্র	এখানে $\overline{A'A}$ কে **তির্যক অক্ষ** বলা হয়, অন্যান্যগুলি উপবৃত্তের অনুরূপ

	উপবৃত্ত	পরাবৃত্ত
মৌলিক সম্বন্ধ	$\overline{CS}=e.\overline{CA}$; $\overline{CA}=e.\overline{CE}$; $\overline{CS}.\overline{CE}=\overline{CA}^2$	উপবৃত্তের অনুরূপ, কেবল একমাত্র পার্থক্য হইল যে এখানে $e>1$
প্রধান অক্ষদ্বয় সম্পর্কে আদর্শ সমীকরণ	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a^2>b^2)$, যেখানে $b^2=a^2(1-e^2)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, যেখানে $b^2=a^2(e^2-1)$
মূলবিন্দু	কেন্দ্র C	কেন্দ্র C
x-অক্ষ	পরাক্ষ $\overleftrightarrow{A'A}$	তির্যক অক্ষ $\overleftrightarrow{A'A}$
অপর অক্ষ	$\overleftrightarrow{AA}$ এর উপর লম্ব এবং C বিন্দুগামী রেখা y-অক্ষ। দুইটি বিন্দু B ও B′ এইরূপে গৃহীত হয় যে $B=(0,b)$ এবং $B'=(0,-b)$ $\overline{B'B}$ = উপাক্ষ	উপবৃত্তের অনুরূপ অঙ্কন $\overline{B'B}$ = অনুবন্ধী অক্ষ
অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য	পরাক্ষ $=2a$ উপাক্ষ $=2b$	তির্যক অক্ষ $=2a$ অনুবন্ধী অক্ষ $=2b$
উৎকেন্দ্রতা e নির্ণয়	$b^2=a^2(1-e^2)$ এখানে $b^2<a^2$	$b^2=a^2(e^2-1)$ এখানে b^2 যে a^2 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে এমন কোন কথা নাই।

	উপবৃত্ত	পরাবৃত্ত
নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক	S : $(ae, 0)$ S′ : $(-ae, 0)$	S : $(ae, 0)$ S′ : $(-ae, 0)$
নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ	$x = \pm ae$	$x = \pm ae$
নাভিলম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্য এবং সমীকরণ	দৈর্ঘ্য $= 2b^2/a$	দৈর্ঘ্য $= 2b^2/a$
	$x = \pm ae$	$x = \pm ae$
প্রতিসাম্য	উভয় অক্ষ সম্পর্কে এবং কেন্দ্র সম্পর্কে	উভয় অক্ষ সম্পর্কে এবং কেন্দ্র সম্পর্কে
যে অঞ্চলে বক্ররেখাটির কোন বিন্দু বিদ্যমান নহে	$x > a$ এবং $x < -a$	$-a < x < a$
বক্ররেখাটির প্রকৃতি	সীমাবদ্ধ এবং বদ্ধ বক্ররেখা	দুইটি শাখা—অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত
অসীমপথ	নাই	দুইটি অসীমপথ : $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ এবং $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$
দুইটি বিশেষ ধর্ম	(i) $\frac{\overline{PN}^2}{\overline{A'N}.\overline{AN}} =$ ধ্রুবক $= \frac{b^2}{a^2}$	(i) $\frac{\overline{PN}^2}{\overline{A'N}.\overline{AN}} = \frac{b^2}{a^2}$
	(ii) $\overline{SP} + \overline{S'P} =$ ধ্রুবক $= 2a$	(ii) $\overline{S'P} - \overline{SP} =$ ধ্রুবক $= 2a$

	উপবৃত্ত	পরাবৃত্ত
অন্যান্য আকার	(i) $\frac{y^2}{A^2}+\frac{x^2}{B^2}=1\ (A^2>B^2)$ y-অক্ষ পরাক্ষ	(i) $\frac{y^2}{A^2}-\frac{x^2}{B^2}=1$ y-অক্ষ তির্যক অক্ষ
	(ii) $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1\ (a^2>b^2)$ কেন্দ্র (h, k) ; পরাক্ষ—x-অক্ষের সমান্তরাল এবং উপাক্ষ $-y$-অক্ষের সমান্তরাল কার্যকরী নিয়ম : ধর $x-h=X$, $y-k=Y$ উপবৃত্ত $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ সম্পর্কে আলোচনা কর। অবশেষে x এবং y এর মাধ্যমে উত্তরকে প্রকাশ কর, যেখানে $x=h+X,\ y=k+Y.$	(ii) $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ কেন্দ্র (h, k), তির্যক অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল এবং অনুবন্ধী অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল কার্যকরী নিয়ম : ধর $x-h=X$, $y-k=Y$ $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ সম্পর্কে আলোচনা কর। অবশেষে x এবং y এর মাধ্যমে ফলগুলি (উত্তর) প্রকাশ কর, যেখানে $x=h+X, y=k+Y.$
	(iii) $\frac{(x+h)^2}{B^2}+\frac{(y+k)^2}{A^2}=1\ (A^2>B^2)$ সমীকরণটির সরলতর আকার $\frac{X^2}{B^2}+\frac{Y^2}{A^2}=1\ (A^2>B^2)$ পরাক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল এখন; উপরের (ii) এর ন্যায়	(iii) $\frac{(y+k)^2}{A^2}-\frac{(x+h)^2}{B^2}=1$ সরলতর আকারে $\frac{Y^2}{A^2}-\frac{X^2}{B^2}=1$ তির্যক অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল

৪

স্পর্শক এবং অভিলম্ব
(TANGENTS AND NORMALS)

৪1. সূচনা

সরলরেখার প্রবণতা বিষয়ক ধারণার সহিত ছাত্রছাত্রীদের ইতিপূর্বে পরিচয় হইয়াছে। সরলরেখার যে কোন অংশের পক্ষে ঐ প্রবণতা ধ্রুবক। কিন্তু বক্র রেখার প্রবণতা রেখাটির বিভিন্ন বিন্দুতে বিভিন্ন। এই রেখার কোন বিন্দু Pতে একটি স্পর্শক রেখা অঙ্কিত হইলে স্পর্শক রেখাটির প্রবণতাই ঐ **বক্র রেখার P বিন্দুতে প্রবণতা**। সুতরাং মুখ্য প্রশ্ন হইল এই যে কোন বক্ররেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শক রেখার সংজ্ঞা কি হইবে। বর্তমান অধ্যায়ে বক্র রেখার কোন বিন্দুতে ঐ স্পর্শক রেখার **সঠিক** সংজ্ঞা নিরূপণ করা হইবে এবং পরে উহার সমীকরণ নির্ণয় করা হইবে। স্পর্শকের উপর স্পর্শবিন্দুটিতে অঙ্কিত লম্বরেখাটি অভিলম্ব বলিয়া পরিচিত। এই অভিলম্বের সমীকরণও এখানে নির্ণয় করা হইবে।

৪·2. স্পর্শক ও অভিলম্ব—সংজ্ঞা

1. ধরা যাক্, প্রদত্ত কোন বক্ররেখা C এর যে কোন অনির্দিষ্ট একটি বিন্দু P। বক্র রেখাটির উপর দ্বিতীয় একটি বিন্দু Q লওয়া হইল এবং ছেদক (secant) $\overleftrightarrow{PQ}$ অঙ্কিত হইল (চিত্র 8.1 দ্রষ্টব্য)। ধরা যাক্, P স্থির রহিল এবং Q বক্র রেখা বরাবর P অভিমুখে অগ্রসর হইতে লাগিল। ইহা সম্ভব যে Q যখন বক্র রেখা বরাবর P অভিমুখে অগ্রসর হইতে হইতে P এর দিকে ঝুঁকিবে (as Q tends to P), ছেদক $\overleftrightarrow{PQ}$ তখন একটি নির্দিষ্ট সীমাস্থ রেখা $\overleftrightarrow{PT}$র নিকট হইতে নিকটতর হইতে থাকিবে ($\overleftrightarrow{PQ}$ may approach a fixed limiting line $\overleftrightarrow{PT}$)। এইরূপ অবস্থায় বলা হইয়া থাকে যে ঐ সীমাস্থ রেখা $\overleftrightarrow{PT}$ হইল বক্র রেখাটির P বিন্দুতে স্পর্শক। P বিন্দুতে এই স্পর্শক রেখার প্রবণতাকেই **বক্র রেখাটির P বিন্দুতে প্রবণতা** বলা হয়।

2. কোন প্রদত্ত ক্ষেত্রে ছেদক $\overleftrightarrow{PQ}$ এর প্রবণতাসূচক রাশিটি নির্ণয় করা হয়। ইহার সীমাস্থ মান (যদি ইহা বিদ্যমান হয়) স্পর্শক রেখা $\overleftrightarrow{PT}$র প্রবণতা নির্ণয় করিবে।

এখন সরলরেখার বিন্দু-প্রবণতা আকারের সমীকরণের সাহায্যে স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় করা যাইবে।

3. $\overleftrightarrow{PT}$ স্পর্শক রেখার উপর লম্ব এবং P বিন্দুগামী সরলরেখা $\overleftrightarrow{PN}$কে **বক্র রেখাটির P বিন্দুতে অভিলম্ব** বলা হয়। যদি স্পর্শক রেখার প্রবণতা m হয়, তবে অভিলম্ব রেখাটির প্রবণতা হইবে $(-1/m)$; পুনরায় সরলরেখার সমীকরণের বিন্দু-প্রবণতা আকারের সাহায্যে P বিন্দুতে অভিলম্বটির সমীকরণ নির্ণয় করা যাইবে।

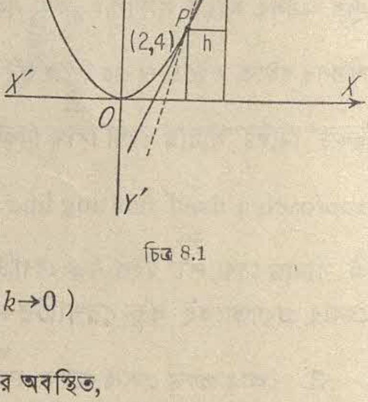
4. **স্পর্শক** $\overleftrightarrow{PT}$ সম্পর্কে P বিন্দুকে বলা হয় **স্পর্শবিন্দু (point of contact)**, কিন্তু অভিলম্ব $\overleftrightarrow{PN}$ সম্পর্কে ঐ একই বিন্দু Pকে অভিলম্বটির **পাদবিন্দু (the foot of the normal)** বলিয়া উল্লেখ করা হয়।

দৃষ্টান্ত ঃ বক্র রেখা $y=x^2$ এর (2, 4) বিন্দুতে স্পর্শকের এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

ছাত্রছাত্রীদের নিশ্চয়ই স্মরণ আছে যে $y=x^2$ সমীকরণ একটি অধিবৃত্তকে প্রকাশ করে, যে অধিবৃত্ত ধনাত্মক y-অক্ষ অভিমুখে বিস্তৃত এবং উহার নাভিলম্ব$=1$. কিন্তু বক্ররেখাটির প্রদত্ত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়ের পক্ষে এই তথ্য জানা **একান্ত আবশ্যক** নহে।

ধরা যাক প্রদত্ত বিন্দু P : (2, 4)

দ্বিতীয় একটি বিন্দু Q : $(2+h, 4+k)$ লওয়া হইল।



চিত্র 8.1

তাহা হইলে, $\overleftrightarrow{PQ}$ ছেদকের প্রবণতা

$$=\frac{4+k-4}{2+h-2}=\frac{k}{h}\ (h\neq 0)$$

$\overleftrightarrow{PT}$ স্পর্শকের প্রবণতা

$=\overleftrightarrow{PQ}$ এর প্রবণতার সীমাস্থ মান (limit), যখন $Q\to P$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{k}{h} \quad (\because \text{ যখন } Q\to P, \text{ তখন } h\to 0, k\to 0)$$

$$=\lim_{h\to 0}\ (4+h) \quad (\because Q \text{ বক্ররেখাটির উপর অবস্থিত, } \therefore 4+k=(2+h)^2, \text{ বা } k/h=4+h)$$

$=4$

টীকা : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{k}{h}$ নির্ণয় কালে দেখা যায় যে ভগ্নাংশটি $\frac{0}{0}$ আকারের ; কিন্তু এই অনির্ধারিত (indeterminate) আকার পরিহার করিয়া ভগ্নাংশটিকে এইরূপ পরিবর্তিত আকারে লইয়া আসা হইয়াছে যেন উহার সীমাস্থ মান নির্ণয় করা যায়। $(2+h,\ 4+k)$ বিন্দু যে বক্র রেখাটির উপর অবস্থিত এই তথ্যের সাহায্য লইয়া এবং $h\to 0$ এর অপরিহার্য অর্থ যে $h=0$ নহে এই মত অনুসরণে ঐরূপ পরিবর্তন করা হইয়াছে।

যেহেতু স্পর্শক $\overleftrightarrow{PT}$ (2, 4) বিন্দুগামী এবং উহার প্রবণতা 4,
সুতরাং উহার সমীকরণ হইল

$$y-4=4(x-2)$$

বা, $y=4x-4$

আবার, $\because$ স্পর্শকটির প্রবণতা $=4$

$\therefore$ অভিলম্বটির প্রবণতা $=-1/4$.

$\therefore$ (2, 4) বিন্দুতে অভিলম্বটির সমীকরণ হইল

$$y-4=-\tfrac{1}{4}(x-2),$$

বা, $4y+x=18$.

8·3. বিভিন্ন কনিকের স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ

A. বৃত্ত : $x^2+y^2=a^2$, প্রদত্ত বিন্দু P : (x_1, y_1).

স্পর্শকের সমীকরণ :

প্রথম পদ্ধতি। ধরা যাক্, Q : $(x_2,\ y_2)$ হইল বৃত্তটির দ্বিতীয় একটি বিন্দু।

তাহা হইলে $\overleftrightarrow{PQ}$ ছেদকের প্রবণতা

$$=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ (x_2\neq x_1)$$

[এখন 8·2 অনুচ্ছেদে প্রদত্ত টীকা দ্রষ্টব্য]

কিন্তু P : (x_1, y_1) এবং Q : (x_2, y_2) বিন্দু দুইটি বৃত্তস্থ,

$\therefore\ x_1{}^2+y_1{}^2=a^2$ এবং $x_2{}^2+y_2{}^2=a^2$,

বা, $y_2{}^2-y_1{}^2=-(x_2{}^2-x_1{}^2)$

বা, $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\dfrac{x_2+x_1}{y_2+y_1}$.

$\therefore$ স্পর্শক $\overleftrightarrow{PT}$র প্রবণতা

$$=\lim_{\substack{x_2\to x_1\\ y_2\to y_1}} \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\lim_{\substack{x_2\to x_1\\ y_2\to y_1}}\left(-\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}\right)=-\frac{2x_1}{2y_1}=-\frac{x_1}{y_1}$$

$\because$ স্পর্শক $\overleftrightarrow{PT}$ বিন্দু P : (x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং উহার প্রবণতা $(-x_1/y_1,)$

$\therefore$ উহার সমীকরণ হইল

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

বা, $yy_1+xx_1=y_1{}^2+x_1{}^2=a^2$

($\because$ P : (x_1, y_1) বৃত্তস্থ বিন্দু, $\therefore$ $x_1{}^2+y_1{}^2=a^2$)

$\therefore$ $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$xx_1+yy_1=a^2.$$

অভিলম্বের সমীকরণ

যেহেতু P : (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা $=-\frac{x_1}{y^1}$.

$\therefore$ P বিন্দুতে অভিলম্বের প্রবণতা $=\frac{y_1}{x_1}$.

$\therefore$ P : (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হইল

$$y-y_1=\frac{y_1}{x_1}(x-x_1).$$

বা, $\frac{y-y_1}{y_1}=\frac{x-x_1}{x_1}$.

বা, $\frac{y}{y_1}-\frac{x}{x_1}=-2.$

বা, $\frac{x}{x_1}-\frac{y}{y_1}=2.$

দ্বিতীয় পদ্ধতি। কলন বিষয়ের সহিত পরিচিত ছাত্রছাত্রীরা অন্তরকলন (Differential Calculus)এর নিম্নলিখিত গুরুত্বপূর্ণ প্রতিপাদ্যের সাহায্যে P : (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা সরাসরি নির্ণয় করিতে পারে :

বক্র রেখা $y=f(x)$ এর কোন বিন্দু (x_1, y_1)তে উহার প্রবণতা হইল, (x_1, y_1) বিন্দুতে x সম্পর্কে y এর 'ডেরিভেটিভ' বা লব্ধ মান (derivative of y w.r. t. x), যদি ঐ বিন্দুতে এই লব্ধমান বিদ্যমান হয় (provided that the derivative exists at that point)।

বর্তমান ক্ষেত্রে,

$$x^2+y^2=a^2$$

$$\therefore\ 2x+2y\frac{dy}{dx}=0. \quad (\text{ } x \text{ সম্পর্কে প্রতিটি রাশির লব্ধমান লইয়া })$$

$\therefore$ যে কোন বিন্দু (x, y)তে, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$.

$\therefore$ বক্র রেখাটির (x_1, y_1) বিন্দুতে প্রবণতা $=-\dfrac{x_1}{y_1}$.

এবং (x_1, y_1) বিন্দুতে ইহাই হইল স্পর্শক রেখাটির প্রবণতা।

এখন অবশিষ্টাংশ **প্রথম পদ্ধতির** অনুরূপ।

সাধারণভাবে, যে কোন বক্র রেখা $y=f(x)$ এর (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক রেখার সমীকরণ হইল

$$y-y_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=x_1\\y=y_1}}(x-x_1).$$

তৃতীয় পদ্ধতি। কেবল বৃত্তের ক্ষেত্রে এই পদ্ধতি প্রয়োগযোগ্য—অন্য কোন কনিক-এর ক্ষেত্রে নহে।

মৌলিক জ্যামিতিতে ইহা প্রমাণিত হইয়াছে যে বৃত্তের যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক ঐ স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।

বৃত্তের এই ধর্মের সাহায্যে উহার প্রদত্ত কোন বিন্দু, ধরা যাক্, (x_1, y_1) তে উহার স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করা যায়, যথা :

(x_1, y_1) বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের প্রবণতা $=\dfrac{y_1-0}{x_1-0}$.

[$\because$ $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র $(0, 0)$ বিন্দুতে অবস্থিত।]

$\therefore$ ব্যাসার্ধটির উপর লম্বরেখার প্রবণতা $=-\dfrac{x_1}{y_1}$.

এবং ইহাই হইল (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক রেখার প্রবণতা।

তাহা হইলে (প্রথম পদ্ধতির ন্যায়) স্পর্শক রেখাটির সমীকরণ হইল

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

বা, $\boldsymbol{yy_1+xx_1=x_1^2+y_1^2=a^2}$.

টীকা। (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক রেখার সমীকরণ নির্ণয়ের সময় পরোক্ষে ধরিয়া লওয়া হইয়াছে যে $y_1 \neq 0$, কারণ তাহা না হইলে স্পর্শক রেখাটির প্রবণতা নির্ণয়ের জন্য x_1 কে y_1 দ্বারা ভাগ করা যাইত না।

কিন্তু ইহা অবশ্যই স্মরণ রাখিতে হইবে যে $xx_1 + yy_1 = a^2$ এই চূড়ান্ত সূত্রটি সর্বদাই সত্য, এমন কি $y_1 = 0$ হইলেও। কারণ, যদি $y_1 = 0$ এবং $x_1 = a$ হয়, তাহা হইলে ঐ সূত্র হইতে $x = a$ পাওয়া যায় এবং ইহা হইল $(a, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ। অনুরূপে, যখন $y_1 = 0$ এবং $x_1 = -a$, তখন সূত্রটি হইতে পাওয়া যায় $x = -a$ এবং ইহা $(-a, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ। লক্ষ্য কর যে যখন $y_1 = 0$, তখন $x_1 =$ হয় a অথবা $-a$.

B. বৃত্ত : $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, প্রদত্ত বিন্দু $P : (x_1, y_1)$ স্পর্শকের সমীকরণ

প্রথম পদ্ধতি। ধরা যাক্, $Q : (x_2, y_2)$ বৃত্তটির উপর দ্বিতীয় একটি বিন্দু।

$$\overleftrightarrow{PQ} \text{ ছেদকের প্রবণতা} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (x_2 \neq x_1)$$

$\therefore$ P বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা

$= \overleftrightarrow{PQ}$ এর প্রবণতার সীমাস্থ মান, যখন বক্র রেখা বরাবর $Q \to P$.

$$= \lim_{\substack{x_2 \to x_1 \\ y_2 \to y_1}} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lim_{\substack{x_2 \to x_1 \\ y_2 \to y_1}} \left(-\frac{x_2 + x_1 + 2g}{y_2 + y_1 + 2f} \right) = -\frac{x_1 + g}{y_1 + f}.$$

[**আনুষঙ্গিক হিসাব :** যেহেতু $P : (x_1, y_1)$ এবং $Q : (x_2, y_2)$ বৃত্তস্থ বিন্দু,

স্বতরাং $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$

এবং $x_2^2 + y_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c = 0$.

$\therefore$ বিয়োগ করিয়া,

$$x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + 2g(x_2 - x_1) + 2f(y_2 - y_1) = 0$$

বা, $(y_2 - y_1)(y_1 + y_2 + 2f) = -(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 + 2g)$

বা, $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\dfrac{x_1 + x_2 + 2g}{y_1 + y_2 + 2f}$; 167 পৃষ্ঠার টীকাটি দ্রষ্টব্য]

এখন $P : (x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকটির সমীকরণ হইল

$$y - y_1 = -\frac{x_1 + g}{y_1 + f}(x - x_1)$$

বা, $yy_1 - y_1^2 + yf - y_1 f = -xx_1 - gx + x_1^2 + gx_1$

বা, $xx_1+yy_1+fy-fy_1+gx-gx_1=x_1^2+y_1^2$
$$=-2gx_1-2fy_1-c$$

[যেহেতু $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$,
সুতরাং ইহা লেখা যায় যে, $x_1^2+y_1^2=-2gx_1-2fy_1-c$]

সুতরাং সমীকরণটি অবশেষে হইল :

$$xx_1+yy_1+f(y+y_1)+g(x+x_1)+c=0$$

টীকা। যে কোন কনিকের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণের 'প্যাটার্ন' বা ছাঁচ (pattern) নিম্নের নিয়মগুলি অনুসরণ করে :

(*i*) কনিকের সমীকরণে x^2 এবং y^2 বিশিষ্ট পদগুলিতে x^2 এবং y^2 এর পরিবর্তে যথাক্রমে xx_1 এবং yy_1 লিখিতে হইবে।

(*ii*) x এবং y বিশিষ্ট পদগুলির ক্ষেত্রে $2x$ এবং $2y$ এর পরিবর্তে যথাক্রমে $x+x_1$ এবং $y+y_1$ লিখিতে হইবে।

(*iii*) যদি কনিকের সমীকরণে xy বিশিষ্ট পদ থাকে, তবে $2xy$ এর পরিবর্তে x_1y+xy_1 লিখিতে হইবে।

(*iv*) ধ্রুবক পদটিকে অপরিবর্তিত আকারে রাখিয়া দিতে হইবে।

এই নিয়মগুলির প্রয়োগ দ্বারা ছাত্রছাত্রীরা নিম্নের প্রদত্ত ফলগুলি যাচাই করিয়া দেখিতে পারে :

কনিকের সমীকরণ	**(x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ**
$y^2=4ax$	$yy_1=2a(x+x_1)$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$
$xy=c^2$	$xy_1+x_1y=2c^2$

দ্বিতীয় পদ্ধতি। $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ হইতে উভয়পক্ষকে x সম্পর্কে 'ডিফারেনশিয়েট' (differentiating with respect to x) করিয়া পাওয়া যায়,

$$2x+2y\frac{dy}{dx}+2g+2f\frac{dy}{dx}=0,$$

বা, যে কোন বিন্দু (x, y)তে, $\frac{dy}{dx}=-\frac{x+g}{y+f}$.

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকটির প্রবণতা $=(x_1, y_1)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}=-\frac{x_1+g}{y_1+f}$

এখন শেষাংশ প্রথম পদ্ধতির অনুরূপ।

তৃতীয় পদ্ধতি। যেহেতু

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

বা, $(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c,$

সুতরাং বৃত্তটির কেন্দ্র হইল $(-g, -f)$.

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের প্রবণতা $=\dfrac{y_1+f}{x_1+g}$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে এই বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব স্পর্শক রেখার প্রবণতা

$$=-\frac{x_1+g}{y_1+f}$$

এখন অবশিষ্ট অংশ **প্রথম** পদ্ধতির অনুরূপ।

[এই পদ্ধতি কেবল বৃত্তের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য, অন্য কোন কনিকের ক্ষেত্রে নহে ; কিন্তু প্রথম অথবা দ্বিতীয় পদ্ধতি যে কোন বক্র রেখার ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যায়।]

অভিলম্বের সমীকরণ

যেহেতু, (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা $=-\dfrac{x_1+g}{y_1+f}$

$\therefore$ ঐ বিন্দুতে অভিলম্বের প্রবণতা $=\dfrac{y_1+f}{x_1+g}$

সুতরাং (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বটির সমীকরণ হইল

$$y-y_1=\frac{y_1+f}{x_1+g}(x-x_1)$$

বা, $\dfrac{y-y_1}{y_1+f}=\dfrac{x-x_1}{x_1+g}.$

C. অধিবৃত্ত : $y^2=4ax$, প্রদত্ত বিন্দু P : (x_1, y_1)

স্পর্শকের সমীকরণ

ধরা যাক, অধিবৃত্তের দ্বিতীয় একটি বিন্দু $Q(x_2, y_2)$.

P : (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা

= ছেদক $\overleftrightarrow{PQ}$ এর প্রবণতার সীমাস্থ মান (limit) যখন বক্র রেখা বরাবর $Q\to P$.

$$=\lim_{\substack{x_2\to x_1\\ y_2\to y_1}}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\lim_{y_2\to y_1}\frac{4a}{y_2+y_1}=\frac{2a}{y_1}$$

[**আনুষঙ্গিক হিসাব :** যেহেতু P : (x_1, y_1) এবং Q : (x_2, y_2) অধিবৃত্তস্থ বিন্দু,

সুতরাং $y_1^2 = 4ax_1$ এবং $y_2^2 = 4ax_2$

বিয়োগ করিয়া, $y_2^2 - y_1^2 = 4a(x_2 - x_1)$

$$\therefore \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4a}{y_2 + y_1}$$; 167 পাতার টীকাটি দ্রষ্টব্য]

$\therefore$ P : (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$y - y_1 = \frac{2a}{y_1}(x - x_1)$$

বা, $yy_1 - y_1^2 = 2ax - 2ax_1$

বা, $yy_1 = 2ax - 2ax_1 + y_1^2$

$= 2ax - 2ax_1 + 4ax_1 \qquad (\because y_1^2 = 4ax_1)$

অর্থাৎ, $\mathbf{yy_1 = 2a(x + x_1)}$.

টীকা। Calculus (কলন) এর সাহায্যে (x_1, y_1) বিন্দুতে এইভাবে স্পর্শকের প্রবণতা পাওয়া যায়। যথা :

$$\because \quad y^2 = 4ax.$$

$\therefore$ x সম্পর্কে 'ডিফারেনশিয়েশন' দ্বারা (on differentiation w.r.t. x) পাওয়া যায়

যে কোন (x, y) বিন্দুতে, $2y\frac{dy}{dx} = 4a$, বা $\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$.

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকটির প্রবণতা $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} = \frac{2a}{y_1}$

এখন উপরে প্রদত্ত উপায়ে (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় করা যাইবে।

অভিলম্বের সমীকরণ

যেহেতু (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকটির প্রবণতা $= \frac{2a}{y_1}$,

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের প্রবণতা $= -\frac{y_1}{2a}$

এবং (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হইল

$$\boldsymbol{y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)}$$

সমীকরণটির বিকল্প রূপ :

ধরা যাক, $-\frac{y_1}{2a}=m$; তাহা হইলে $y_1=-2am$.

যেহেতু, $y_1{}^2=4ax_1$, সুতরাং $x_1=\frac{y_1{}^2}{4a}=\frac{4a^2m^2}{4a}=am^2$

সুতরাং, **যদি অভিলম্বটির প্রবণতা m ধরা হয়, তাহা হইলে উহার পাদবিন্দু হইল**

$$(am^2,\ -2am).$$

এবং এই ক্ষেত্রে অভিলম্বের সমীকরণটির আকার হইবে

$$y+2am=m(x-am^2)$$

বা, $\boldsymbol{y=mx-2am-am^3}$

D. **উপবৃত্ত :** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, **প্রদত্ত বিন্দু** (x_1, y_1)

ধরা যাক Q : (x_2, y_2) উপবৃত্তটির উপর দ্বিতীয় একটি বিন্দু।

P : (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা

= ছেদক $\overleftrightarrow{PQ}$ এর প্রবণতার সীমাস্থ মান (limit), যখন বক্র রেখা বরাবর Q→P.

$$=\lim_{x_2\to x_1}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\lim_{\substack{x_2\to x_1\\ y_2\to y_1}}\left(-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}\right)=-\frac{b^2}{a^2}.\frac{x_1}{y_1}$$

[**আনুষঙ্গিক হিসাব :** P : (x_1,y_1) এবং Q : (x_2,y_2) উপবৃত্তস্থ বিন্দু বলিয়া

$$\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}=1 \text{ এবং } \frac{x_2{}^2}{a^2}+\frac{y_2{}^2}{b^2}=1.$$

বিয়োগ দ্বারা, $\frac{1}{b^2}(y_2{}^2-y_1{}^2)=-\frac{1}{a^2}(x_2{}^2-x_1{}^2)$

$\therefore\ \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{b^2}{a^2},\ \frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}$; 167 পাতার টীকাটি দ্রষ্টব্য];

বিকল্প পদ্ধতি : Calculus এর প্রয়োগ :

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ হইতে

x সম্পর্কে 'ডিফারেনশিয়েট্' করিয়া পাওয়া যায়,

$$\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

বা, যে কোন বিন্দু (x_1, y_1)তে, $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকটির প্রবণতা $=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=x_1\\y=y_1}}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}$,

যেহেতু, (x_1,y_1) বিন্দুতে স্পর্শকটির প্রবণতা $=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}$,

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকটির সমীকরণ হইল

$$y-y_1=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

বা, $yy_1-y_1^2=-\frac{b^2}{a^2}(xx_1-x_1^2)$

বা, $\frac{yy_1}{b^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=-\frac{xx_1}{a^2}+\frac{x_1^2}{a^2}$

বা, $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$ [$\because$ (x_1, y_1) উপবৃত্তস্থ একটি বিন্দু]

অভিলম্বের সমীকরণ

যেহেতু (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা $=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের প্রবণতা $=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$

অতএব (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হইল

$$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1)$$

বা, $\frac{y-y_1}{y/b^2}=\frac{x-x_1}{x_1/a^2}$

E. **পরাবৃত্ত :** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; **প্রদত্ত বিন্দু** P : (x_1, y_1)

স্পর্শকের সমীকরণ

হুবহু উপবৃত্তের ক্ষেত্রের ন্যায় যুক্তি অনুসরণ করিয়া ছাত্রছাত্রীরা নিজেরাই প্রমাণ করিতে পারিবে যে

P : (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইবে

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

অভিলম্বের সমীকরণ

P : (x_1,y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হইবে

$$y-y_1=-\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1)$$

বা, $\frac{y-y_1}{y_1/b^2}+\frac{x-x_1}{x_1/a^2}=0.$

অনুশীলনী

1. নিম্নলিখিত বৃত্তগুলির প্রত্যেকটির প্রদত্ত বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর : [তিনটি পদ্ধতিই প্রয়োগ কর]

(i) $x^2+y^2=25$, $(3, 4)$ বিন্দুতে ;

(ii) $x^2+y^2-6x+8y-25=0$, $(-2, 1)$ বিন্দুতে ;

(iii) $2x^2+2y^2-3x+5y-2=0$, $(2, 0)$ বিন্দুতে ;

(iv) $(x-1)^2+(y+2)^2=5$, $(3, -3)$ বিন্দুতে।

2. নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$ উপবৃত্তের $(-3, 2)$ বিন্দুতে ;

(ii) $x^2=4y$ অধিবৃত্তের $(2, 1)$ বিন্দুতে ;

(iii) $9x^2-4y^2=36$ পরাবৃত্তের $\left(3, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ বিন্দুতে ;

(iv) $y^2=4(x-1)$ অধিবৃত্তের $(5, 4)$ বিন্দুতে ;

(v) $\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1$ উপবৃত্তের $(2, -2)$ বিন্দুতে ;

(vi) $3x^2+4y^2-6x+8y-45=0$ উপবৃত্তের $(-3, -2)$ বিন্দুতে ;

(vii) $x^2-2xy-y^2-2x+4y+4=0$ পরাবৃত্তের $(2, -2)$ বিন্দুতে।

3. $(-2, -1)$ বিন্দুগামী যে রেখাগুলি $5x^2+y^2=5$ উপবৃত্তের স্পর্শক, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[**সমাধান :** ধরা যাক, $P(x_1, y_1)$ স্পর্শবিন্দু।

(x_1, y_1) বিন্দুতে প্রদত্ত উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$5xx_1+yy_1=5.$$

$(-2, -1)$ বিন্দু এই স্পর্শকের উপর অবস্থিত হইবে, যদি

$$5(-2)x_1+(-1)y_1=5 \text{ হয়}$$

অর্থাৎ, যদি $-10x_1-y_1=5$ হয় ... ... (i)

(x_1, y_1) বিন্দুটি উপবৃত্তটির উপর অবস্থিত ; সুতরাং

$$5x_1^2+y_1^2=5 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$$

(i) ও (ii) সহ-সমীকরণ দুইটি সমাধান করিলে পাওয়া যায়

$x_1 = -2/3,\ y_1 = 5/3$; অথবা, $x_1 = -2/7,\ y_1 = -15/7$.

অর্থাৎ, দুইটি স্পর্শ বিন্দু আছে, যথা :

$(-2/3, 5/3)$ এবং $(-2/7, -15/7)$

এই মানগুলি $5xx_1 + yy_1 = 5$ এ বসাইয়া ঐ স্পর্শ বিন্দু দুইটিতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল :

$$2x - y + 3 = 0\ ; \quad 2x + 3y + 7 = 0.$$

4. $(1, 2)$ বিন্দু হইতে $x^2 + 2y^2 = 6$ উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. পরাবৃত্ত $x^2 - 4y^2 = 12$ এর যে স্পর্শকগুলি $(3, 0)$ বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

6. $(5, 6)$ বিন্দুগামী যে রেখাগুলি $y^2 = 4x$ অধিবৃত্তের স্পর্শক, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

1. (i) $3x+4y=25$; $4x-3y=0$. (ii) $y=x+3$; $x+y+1=0$.
   (iii) $x+y-2=0$; $x-y-2=0$. (iv) $2x-y-9=0$; $2y+x+3=0$.

2. স্পর্শক : (i) $x-y+5=0$. (ii) $x-y-1=0$ (iii) $9x-2\sqrt{5}y=12$.
   (iv) $2y-x-3=0$. (v) $2x-y-6=0$. (vi) $3x+y+11=0$
   (vii) $3x+2y-2=0$.

   অভিলম্ব : (i) $y+x+1=0$. (ii) $y+x=3$. (iii) $18y+4\sqrt{5}x=39\sqrt{5}$.
   (iv) $y+2x-14=0$. (v) $2y+x+2=0$. (vi) $x-3y-3=0$
   (vii) $2x-3y-10=0$.

4. $y+x-3=0$; $5y-x-9=0$. 5. $x-y=3$; $x+y=3$.

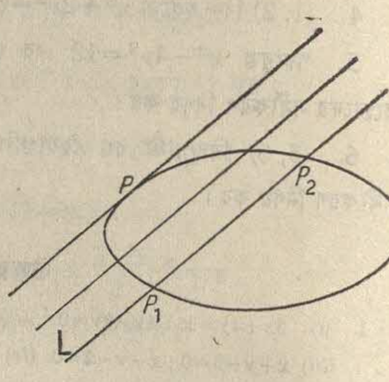
6. $x-y+1=0$; $x-5y+25=0$.

8·4. প্রদত্ত প্রবণতা m-সহ স্পর্শক

প্রাথমিক বীজগণিত হইতে জানা যায় যে সহসমীকরণ হিসাবে x এবং y এর একটি প্রথম-ঘাতের সমীকরণ ও একটি দ্বিতীয়-ঘাতের সমীকরণ যদি সমাধান করা যায়, তাহা হইলে দুই জোড়া সমাধান—ধরা যাক্, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) পাওয়া যায়, যাহারা বাস্তব অথবা জটিল রাশি। দুই মাত্রার বিশ্লেষণ জ্যামিতিতে একটি প্রথম-ঘাতের সমীকরণ একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে, এবং একটি দ্বিতীয়-ঘাতের সমীকরণ একটি কনিককে প্রকাশ করে, তা সে প্রকৃত কনিক অথবা অপ্রকৃত কনিক

যাহাই হউক। সুতরাং একটি সরলরেখা একটি কনিককে আদৌ ছেদ না করিতে পারে—ইহা ঘটে যখন যুগ্ম সমাধান (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) এর উভয়েই জটিল রাশি। কিন্তু যখন কোন সরলরেখা কোন কনিককে ছেদ করে, তখন সাধারণত দুইটি বিন্দুতে এই ছেদ হয়। **যখন এই দুইটি ছেদ-বিন্দু একটিমাত্র বিন্দুতে পরস্পর মিলিত হইতে অগ্রসর হয়, তখন ঐ সরলরেখার সীমাস্থ অবস্থানে উহা কনিকটির স্পর্শক হয়।**

সংজ্ঞা। কোন রেখা L কোন কনিককে ছেদ করিলে যে দুইটি ছেদবিন্দু, P_1 এবং P_2 উৎপন্ন হয় তাহারা যখন কোন একটিমাত্র বিন্দু Pতে পরস্পর মিলিত হইতে অগ্রসর হয় (রেখা Lকে নিজ অবস্থানের সহিত সমান্তরাল-ভাবে P অভিমুখে গতিশীল করার ফলে), তখন L রেখার সীমাস্থ অবস্থানে উহাকে কনিকটির স্পর্শক বলা হয়। (চিত্র 8.2 দ্রষ্টব্য।) ইহা পূর্বে 8·2 (1) অনুচ্ছেদে প্রদত্ত সংজ্ঞারই সাধারণ রূপ।



চিত্র 8.2

এইস্থলে কিন্তু একটি বিষয়ে বিশেষ দৃষ্টি আকর্ষণ করা যাইতেছে, যে **কোন রেখা যদি কোন কনিককে একটিমাত্র বিন্দুতে ছেদ করে তাহা হইলেই উহাকে কনিকটির স্পর্শক বলা যায় না,** কারণ এইরূপ প্রকৃতির অনেক রেখা আছে, যেমন অধিবৃত্তের অক্ষের সহিত সমান্তরাল রেখাসমূহ, যাহারা কনিকটির স্পর্শক নহে। ছাত্রছাত্রীরা এখন লক্ষ্য করিবে, নিম্নের প্রশ্নটি সমাধানে উক্ত সংজ্ঞা কতদূর নিষ্ঠার সহিত অনুসরণ করা হইয়াছে।

প্রশ্ন 1. এইরূপ শর্ত নির্ণয় কর যেন প্রদত্ত প্রবণতা m-বিশিষ্ট কোন রেখা উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর স্পর্শক হইতে পারে।

এখানে ধরিয়া লওয়া হইল যে স্পর্শকটি বিদ্যমান এবং উহার প্রবণতা m ; ধরা যাক, P স্পর্শবিন্দু এবং স্পর্শক $\overleftrightarrow{PT}$র সমীকরণ $y=mx+c$ (এখানে স্মরণ রাখ যে m প্রদত্ত)।

$\overleftrightarrow{PT}$ রেখা উপবৃত্তকে যে P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে, তাহার স্থানাঙ্ক পাওয়া যাইবে নিম্নলিখিত সহসমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া, যথা :

$$y=mx+c \quad \cdots \quad \cdots \qquad (i)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots \quad \cdots \qquad (ii)$$

(i) প্রদত্ত y এর মান (ii)এ বসাইয়া,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1$$

বা, $$x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)+\frac{2mc}{b^2}x+\frac{c^2}{b^2}-1=0 \quad \cdots \qquad (iii)$$

$\overleftrightarrow{PT}$ রেখা সম্পর্কে বিশেষ লক্ষণীয় বিষয় হইল এই যে সাধারণ ক্ষেত্রে প্রত্যাশিত ছেদবিন্দু দুইটি এখানে একটিমাত্র বিন্দু P তে পরস্পর মিলিত হইতে যাইতেছে ; অর্থাৎ, দ্বিঘাত সমীকরণ (iii) এর বীজ দুইটি অবশ্যই সমান হইবে, কারণ উহারা উভয়েই সীমান্ত অবস্থায় P এর ভুজ হইবে।

দ্বিঘাত সমীকরণ (iii) এর বীজ দুইটি সমান হইবে, যদি সমীকরণটির নিরূপক শূন্য হয় ;

অর্থাৎ, যদি $\dfrac{4m^2c^2}{b^4}-4\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}\right)\left(\dfrac{c^2}{b^2}-1\right)=0$ হয় ;

ইহাকে আরও সরলীকরণের ফলে পাওয়া যায়,

$$c^2=a^2m^2+b^2$$

বা, $$c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2} \quad \cdots \qquad (iv)$$

তাহা হইলে (iv) সম্পর্কটিই হইল $y=mx+c$ এর **স্পর্শক হওয়ার নির্ণেয় শর্ত**।

সুতরাং যখন প্রবণতা m নির্দিষ্ট বা প্রদত্ত থাকে তখন উপবৃত্তটির দুইটি স্পর্শক :

$$y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}, \quad \cdots \qquad (v)$$

এবং $$y=mx-\sqrt{a^2m^2+b^2}, \quad \cdots \qquad (vi)$$

(iv) সমীকরণ হইতে প্রদত্ত c এর মান (iii) এ বসাইয়া পাওয়া যায়,

$$x^2\left(\frac{a^2m^2+b^2}{a^2b^2}\right) \pm \frac{2m\sqrt{a^2m^2+b^2}}{b^2}x+\frac{a^2m^2}{b^2}=0$$

বা, $\left(\sqrt{\frac{a^2m^2+b^2}{a^2b^2}}x \pm \frac{am}{b}\right)^2=0$

অর্থাৎ, $x=-\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$ বা, $+\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$.

$\therefore$ সমীকরণ (i) হইতে y এর অনুরূপ মান দুইটি হইল যথাক্রমে

$$\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}} \text{ এবং } \frac{-b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}.$$

$\therefore$ (v) এবং (vi) নির্দেশিত স্পর্শক দুইটির স্পর্শবিন্দুদ্বয় হইল যথাক্রমে

$$\left(-\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right) \text{ এবং}$$

$$\left(\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{-b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right).$$

বিকল্প পদ্ধতি

ধরা যাক, $P:(x_1, y_1)$ হইল স্পর্শবিন্দু।

তাহা হইলে উপবৃত্তটির P বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \qquad \cdots \quad (vii)$$

যদি $y=mx+c$ (যেখানে m প্রদত্ত) রেখা P বিন্দুতে স্পর্শক হয়, তাহা হইলে (vii) সমীকরণ এবং সমীকরণ

$$mx-y=-c \qquad \cdots \quad (viii)$$

একই রেখা নির্দেশ করে, সুতরাং x এবং y এর সহগগুলি অবশ্যই সমানুপাতিক হইবে।

$$\therefore \frac{x_1}{a^2m}=\frac{y_1}{-b^2}=\frac{1}{-c}$$

বা, $x_1=-\frac{a^2m}{c},\ y_1=\frac{b^2}{c}$.

পুনরায়, যেহেতু (x_1, y_1) বিন্দু উপবৃত্তটির উপর অবস্থিত

$$\therefore \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1.$$

বা, $\dfrac{a^4m^2}{a^2c^2}+\dfrac{b^4}{c^2b^2}=1$

বা, $a^2m^2+b^2=c^2$

$\therefore\ c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$

ইহাই স্পর্শক হওয়ার শর্ত। স্পর্শবিন্দু দুইটি পূর্বের ন্যায় এখন সহজেই নির্ণয় করা যাইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 1. b^2 এর পরিবর্তে a^2 ধরিয়া, অথবা পূর্বোক্ত পদ্ধতি হুবহু অনুসরণ করিয়া $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তকে $y=mx+c$ (m প্রদত্ত) রেখা যে শর্তে স্পর্শ করিবে তাহা নির্ণয় করা যায় ; ঐ শর্ত হইল :

$$c=\pm a\sqrt{m^2+1}.$$

এবং তখন স্পর্শক দুইটির সমীকরণ হইবে

$$y=mx+a\sqrt{m^2+1}.\quad \left[\text{স্পর্শবিন্দু : } \left(\frac{-am}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right)\right]$$

$$\text{এবং } y=mx-a\sqrt{m^2+1}.\quad \left[\text{স্পর্শবিন্দু : } \left(\frac{am}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{-a}{\sqrt{1+m^2}}\right)\right]$$

অনুসিদ্ধান্ত 2. অনুরূপভাবে পরাবৃত্ত $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ কে $y=mx+c$ রেখা যে শর্তে স্পর্শ করিবে তাহা হইল

$$c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}.$$

স্পর্শক দুইটি হইল

$$y=mx+\sqrt{a^2m^2-b^2}\ \left[\text{স্পর্শবিন্দু : } \left(-\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}, \frac{-b^2}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}\right)\right]$$

$$\text{এবং } y=mx-\sqrt{a^2m^2-b^2}\ \left[\text{স্পর্শবিন্দু : } \left(\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}\right)\right]$$

ছাত্রছাত্রীদের পক্ষে অনুসিদ্ধান্ত 1 এবং 2 এর ফলগুলি যাচাই করিয়া দেখা একান্ত আবশ্যক।

প্রশ্ন 2. $y=mx+c$ (m প্রদত্ত) রেখা যে শর্তে অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ কে স্পর্শ করিবে তাহা নির্ণয় কর।

ধরা যাক্, প্রদত্ত রেখা অধিবৃত্তকে যে বিন্দুতে স্পর্শ করে তাহা P ; P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয়ের জন্য নিম্নের সমীকরণ দুইটি সমাধান করিতে হইবে :

$$y=mx+c \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

$$\text{এবং}\quad y^2=4ax \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$$

(i) হইতে প্রাপ্ত y এর মান (ii) এ বসাইয়া পাওয়া যায়,,

$$(mx+c)^2=4ax$$

$$\text{বা,}\quad m^2x^2+2(mc-2a)x+c^2=0 \quad \cdots \quad (iii)$$

রেখাটি সাধারণ অবস্থায় অধিবৃত্তকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে ; কিন্তু যেহেতু উহা স্পর্শক, সুতরাং ছেদবিন্দু দুইটি একটি মাত্র বিন্দু P তে মিলিত হইতে পরস্পরের অভিমুখে অগ্রসর হইয়াছে ও নিকটবর্তী হইয়াছে। অর্থাৎ রেখাটির সীমাস্থ অবস্থায় দ্বিঘাত সমীকরণে (iii) এর বীজ দুইটি অবশ্যই সমান হইবে (যেহেতু উহারা উভয়েই P এর ভুজ)। বীজ দুইটি সমান হইবে যদি (iii) এর নিরূপক শূন্য হয় ; অর্থাৎ যদি

$$4(mc-2a)^2-4m^2c^2=0$$

$$\text{বা,}\quad \boldsymbol{c=a/m}$$

ইহাই স্পর্শক হওয়ার নির্ণেয় শর্ত।

সুতরাং $\boldsymbol{y=mx+\frac{a}{m}}$ সর্বদা (অর্থাৎ m এর যে কোন মানে) অধিবৃত্তটিকে স্পর্শ করে ; ইহা সহজেই নির্ণয় করা যায় যে স্পর্শবিন্দুটি হইল

$$\text{অর্থাৎ,}\quad \left(\frac{a}{m^2},\ \frac{2a}{m}\right).$$

বিকল্প পদ্ধতি

ধরা হইল, $y=mx+c$ রেখা অধিবৃত্তটিকে (x', y') বিন্দুতে স্পর্শ করে। তাহা হইলে নিম্নলিখিত সমীকরণ দুইটি, যথা

$$yy'=2a(x+x')$$

$$\text{এবং}\quad y=mx+c.$$

একই রেখা নির্দেশ করে ; সুতরাং উহাদের অনুরূপ সহগগুলি অবশ্যই সমানুপাতিক হইবে।

$$\therefore\quad \frac{y'}{1}=\frac{2a}{m}=\frac{2ax'}{c}$$

$$\text{অর্থাৎ,}\quad y'=\frac{2a}{m} \text{ এবং } x'=\frac{c}{m}$$

কিন্তু (x', y') বিন্দু অধিবৃত্তস্থ বলিয়া

$$y'^2=4ax'$$

বা, $\frac{4a^2}{m^2}=4a.\frac{c}{m}$

বা, $c=\frac{a}{m}$ (স্পর্শক হওয়ার নির্ণেয় শর্ত)

অর্থাৎ, m এর যে কোন মানে $y=mx+\frac{a}{m}$ রেখা অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ কে স্পর্শ করে। উপরে x' এর মানে $c=a/m$ বসাইলে স্পর্শ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক পাওয়া যাইবে $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$।

বিকল্প পদ্ধতিটি এই প্রকার প্রশ্ন সমাধানে সাহায্য করিবে, 'যেমন : **কোন রেখার সমীকরণ প্রদত্ত আছে; এইরূপ শর্ত নির্ণয় করিতে হইবে যেন উহা কোন বক্ররেখার স্পর্শক অথবা অভিলম্ব হইতে পারে।**

অনুশীলনী

1. প্রমাণ কর যে সরলরেখা $y=mx+c$ অধিবৃত্ত $y^2=4a(x+a)$ কে স্পর্শ করে, যদি $c=am+a/m$ হয়।

2. প্রমাণ কর যে $lx+my+n=0$ সরলরেখা অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ কে স্পর্শ করিবে, যদি $ln=am^2$ হয়।

3. প্রমাণ কর যে $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ উপবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণকে নিম্নের আকারে লেখা যায়, যথা

$$y=mx-\frac{(a^2-b^2)m}{\sqrt{a^2+b^2m^2}}.$$

4. প্রমাণ কর যে $lx+my=n$ রেখা উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর অভিলম্ব হইবে, যদি $a^2/l^2+b^2/m^2=(a^2-b^2)^2/n^2$ হয়।

[**ইঙ্গিত :** (x', y') বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হইল

$$y-y'=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x')$$

বা, $b^2x'y-a^2y'x=(b^2-a^2)x'y'$

এই সমীকরণকে এখন প্রদত্ত সমীকরণ

$$my+lx=n$$

এর সহিত তুলনার দ্বারা (x', y') নির্ণয় কর। ইহার পর (x', y') যে উপবৃত্তস্থ বিন্দু, এই তথ্যটির সাহায্য লও।]

5. (*i*) প্রমাণ কর যে $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ রেখা পরাবৃত্ত $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ কে স্পর্শ করে, যদি $p^2=a^2\cos^2\alpha-b^2\sin^2\alpha$ হয়।

(*ii*) অনুরূপ প্রশ্ন : রেখা $lx+my=n$ পরাবৃত্ত $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ কে স্পর্শ করিবে, যদি $a^2l^2-b^2m^2=n^2$ হয়।

6. উপরের 5নং প্রশ্নে পরাবৃত্তটির পরিবর্তে যদি উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ লওয়া হয়, তবে দেখাও যে (*i*) এর ক্ষেত্রে শর্তটি হইবে $p^2=a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha$;

এবং (*ii*) এর ক্ষেত্রে শর্তটি হইবে $a^2l^2+b^2m^2=n^2$.

7. অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ কর্তৃক $y=mx+c$ রেখার উপর ছিন্ন **জ্যা এর** দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[**ইঙ্গিত :** প্রদত্ত রেখা ও অধিবৃত্তের ছেদবিন্দু দুইটি নির্ণয়ের জন্য সমীকরণ দুইটি সমাধান কর। এই বিন্দু দুইটির ভুজদ্বয় x_1 এবং x_2 পাওয়া যায় সমীকরণ

$$m^2x^2+2x(mc-2a)+c^2=0,$$

হইতে এবং তখন

$$x_1+x_2=\frac{-2(mc-2a)}{m^2},\quad x_1x_2=\frac{c^2}{m^2}$$

$$\therefore\quad (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$

$$=\frac{4(mc-2a)^2}{m^4}-\frac{4c^2}{m^2}=\frac{16a(a-mc)}{m^4}$$

এবং $y_1-y_2=m(x_1-x_2)$, বিন্দু দুইটির কোটি y_1, y_2 ধরিয়া।

$$\therefore\quad \text{নির্ণেয় দৈর্ঘ্য}=\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2}=\sqrt{1+m^2}(x_1-x_2)$$

$$=\frac{4}{m^2}\sqrt{1+m^2}\sqrt{a(a-mc)}\ ]$$

8. প্রমাণ কর (উপরের প্রশ্ন 7 এর অনুরূপ) যে উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ (অথবা, পরাবৃত্ত $x^2/a^2-y^2/b^2=1$) কর্তৃক সরলরেখা $y=mx+c$ এর উপর ছিন্ন জ্যা এর দৈর্ঘ্য হইল

$$\frac{|2ab|\sqrt{1+m^2}\sqrt{a^2m^2+b^2-c^2}}{a^2m^2+b^2}$$

$$\left(\text{অথবা, } \frac{|2ab|\sqrt{1+m^2}\sqrt{a^2m^2-b^2-c^2}}{a^2m^2-b^2}\right)$$

দেখাও যে বৃত্ত $x^2+y^2=a^2$ এর ক্ষেত্রে জ্যাটির দৈর্ঘ্য হইবে

$$2\sqrt{\frac{a^2(1+m^2)-c^2}{1+m^2}}.$$

9. (*i*) প্রমাণ কর যে $y=x+c\sqrt{2}$ সরলরেখা $x^2+y^2=c^2$ বৃত্তটিকে $(-c/\sqrt{2},\ c/\sqrt{2})$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

(*ii*) $x+y=2+\sqrt{2}$ সরলরেখা $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে কিনা নির্ণয় কর।

(*iii*) এইরূপ শর্ত নির্ণয় কর যেন

(*a*) $3x+4y=k$ রেখা $x^2+y^2=10x$ বৃত্তকে স্পর্শ করে ;

(*b*) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ রেখা

$x^2+y^2-2ax\cos\alpha-2by\sin\alpha-a^2\sin^2\alpha=0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে।

[উঃ (*a*) $k=40$ বা -10 ; (*b*) $p=a\cos^2\alpha+b\sin^2\alpha\pm\sqrt{a^2+b^2\sin^2\alpha}$]

(*iv*) প্রমাণ কর যে $x+y=1$ রেখা অধিবৃত্ত $y=x-x^2$ কে স্পর্শ করে।

(*v*) প্রমাণ কর যে $y=x+\sqrt{7/12}$ রেখা উপবৃত্ত $3x^2+4y^2=1$ কে স্পর্শ করে।

(*vi*) দেখাও যে $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ রেখা অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ কে স্পর্শ করিবে যদি $p=-a\sin\alpha\tan\alpha$ হয়।]

10. (*i*) বৃত্ত $x^2+y^2-6x+4y=12$ এর যে স্পর্শকগুলি $4x+3y+5=0$ রেখার সমান্তরাল, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ইঙ্গিত : বৃত্তটির সমীকরণ হইল

$$(x-3)^2+(y+2)^2=5^2$$

$4x+3y+5=0$ রেখার সমান্তরাল যে কোন সরলরেখার আকার হইবে $4x+3y+c=0$ এবং ইহা বৃত্তটির স্পর্শক হইবে, যদি ইহার $(3,-2)$ হইতে দূরত্ব ± 5 এর সমান হয়।

$$\therefore\ \frac{4.3+3.(-2)+c}{\sqrt{4^2+3^2}}=\pm 5$$

অর্থাৎ, $c=19$, বা, -31

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শক দুইটি হইল $4x+3y+19=0$ বা, $4x+3y-31=0$.]

টীকা। এই পদ্ধতি কেবল বৃত্তের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য, অন্য কোন কনিকের ক্ষেত্রে নহে।

(*ii*) $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের সেই স্পর্শক বা স্পর্শকসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর যাহা বা যাহারা

(*a*) $y=mx+c$ রেখার সমান্তরাল ;

(*b*) $y=mx+c$ রেখার উপর লম্ব ;

(*c*) $(b, 0)$ বিন্দুগামী ;

(*d*) অক্ষদ্বয়ের সহিত এইরূপ একটি ত্রিভুজ উৎপন্ন করে যাহার ক্ষেত্রফল a^2.

(*iii*) একটি বৃত্ত $(-1, 1)$, $(0, 6)$ এবং $(5, 5)$ বিন্দুগামী। এই বৃত্তের যে বিন্দুসমূহে স্পর্শকগুলি বৃত্তটির কেন্দ্র ও মূলবিন্দুর সংযোজক রেখার সমান্তরাল, তাহাদের নির্ণয় কর।

[উঃ (i) $y=mx\pm a\sqrt{1+m^2}$; $my+x=\pm a\sqrt{1+m^2}$; $ax\pm y\sqrt{b^2-a^2}=ab$ $x+y=a\sqrt{2}$ (iii) $(-1, 5)$; $(5, 1)$]

11. (*i*) $2x+y=0$ রেখার সমান্তরাল যে রেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক তাহার সমীকরণ এবং স্পর্শবিন্দু নির্ণয় কর।

(*ii*) উপবৃত্ত $4x^2+3y^2=5$ এর যে স্পর্শকগুলি $y=3x+7$ রেখার সমান্তরাল তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

যে স্পর্শকগুলি x অক্ষের সহিত 60° কোণে নত তাহাদের স্পর্শ বিন্দুসমূহ নির্ণয় কর।

(*iii*) পরাবৃত্ত $4x^2-9y^2=1$ এর যে স্পর্শক $4y=5x+7$ রেখার সমান্তরাল তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[উঃ (*i*) $4x+2y+a=0$; $(a/4, -a)$. (*ii*) $y=3x\pm\frac{1}{6}\sqrt{155/3}$ $\left(\pm\frac{3\sqrt{65}}{26}, \pm\frac{2\sqrt{195}}{39}\right)$. (*iii*) $24y-30x=\pm\sqrt{161}$]

8·5. প্রদত্ত একটি বিন্দু দিয়া দুইটি স্পর্শক গমন করে

প্রতিপাদ্য। প্রমাণ করিতে হইবে যে প্রদত্ত একটি বিন্দু (x_1, y_1) দিয়া সাধারণভাবে কোন কনিকের দুইটি স্পর্শক গমন করে।

উপবৃত্তের ক্ষেত্রে বিষয়টি এখানে আলোচনা করা হইল ; ছাত্রছাত্রীরা অনুরূপ পদ্ধতিতে অপর ক্ষেত্রগুলিতে প্রতিপাদ্যটি প্রমাণ করিতে পারিবে।

উপবৃত্ত : উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2} \quad \ldots \quad (i)$$

যদি ইহা নির্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) দিয়া গমন করে, তবে

$$y_1-mx_1=\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

বা, $m^2(x_1^2-a^2)-2mx_1y_1+(y_1^2-b^2)=0 \quad \cdots (ii)$

যদি (x_1, y_1) জানা থাকে, তবে সমীকরণ (ii) m এর দ্বিতীয় ঘাতের সমীকরণ হওয়ায় সাধারণভাবে m এর দুইটি মান দিবে—মান দুইটি বাস্তব অথবা কাল্পনিক যাহাই হউক না কেন।

m এর প্রত্যেক বাস্তব মানের জন্য (i) হইতে এক একটি স্পর্শক পাওয়া যায়।

(ii) সমীকরণে m এর বীজ দুইটি বাস্তব এবং ভিন্ন হয়, যদি

$(-2x_1y_1)^2-4(x_1^2-a^2)(y_1^2-b^2)$ ধনাত্মক হয়,

অর্থাৎ, যদি $b^2x_1^2+a^2y_1^2>a^2b^2$ হয়

অর্থাৎ, যদি $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}>1$ হয়।

ইহা ঘটে যখন (x_1, y_1) বিন্দু $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ দ্বারা **আবদ্ধ অঞ্চলের বাহিরে** অবস্থিত হয়।

আবার, বীজ দুইটি সমান হয় যদি

$b^2x_1^2+a^2y_1^2-a^2b^2=0$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$ হয় ;

ইহা ঘটে যখন বিন্দু (x_1, y_1) **উপবৃত্তের উপরে অবস্থিত হয়**।

পুনরায়, বীজদ্বয় কাল্পনিক হয়, যদি

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<1 \text{ হয় ;}$$

ইহা ঘটে যখন বিন্দু (x_1, y_1), $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর দ্বারা **আবদ্ধ অঞ্চলের** ভিতরে অবস্থিত হয়।

সিদ্ধান্ত 1. যদি প্রদত্ত বিন্দু বক্ররেখাটির বাহিরে অবস্থিত হয়, তবে ঐ বিন্দুগামী দুইটি পৃথক স্পর্শক থাকে।

2. যদি প্রদত্ত বিন্দু বক্ররেখাটির উপরে অবস্থিত হয়, তবে ঐ বিন্দু দিয়া যাইবে এমন একটি মাত্র স্পর্শক থাকে।

3. যদি প্রদত্ত বিন্দু বক্ররেখাটির ভিতরে অবস্থিত হয়, তবে কোন স্পর্শক ঐ বিন্দু দিয়া অঙ্কন করা যায় না।

একটি গুরুত্বপূর্ণ মন্তব্য

বৃত্ত এমন কি উপবৃত্তের ক্ষেত্রেও ইহা সম্ভবত সহজেই কল্পনা করা যায়, কখন প্রদত্ত বিন্দু **বক্ররেখাটির বাহিরে, উপরে** অথবা **ভিতরে** অবস্থিত হয়।

যেমন, P : (x_1, y_1) যদি প্রদত্ত বিন্দু হয় এবং কোন বৃত্তের কেন্দ্র Cও যদি প্রদত্ত হয়, তবে বলা যায় যে

P বক্ররেখাটির বাহিরে অবস্থিত যদি $\overline{CP}>$ব্যাসার্ধ হয় ;

P বক্ররেখাটির উপরে অবস্থিত যদি $\overline{CP}=$ব্যাসার্ধ হয় ;

P বক্ররেখাটির ভিতরে অবস্থিত যদি $\overline{CP}<$ব্যাসার্ধ হয়।

বিশ্লেষণ-জ্যামিতি অনুসারে, যদি বৃত্তের সমীকরণ হয়

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0,$$

তবে P বৃত্তটির ভিতরে, উপরে অথবা বাহিরে অবস্থিত হইবে,

যদি যথাক্রমে

$$(x_1+g)^2+(y_1+f)^2<,= \text{ অথবা, } >g^2+f^2-c \text{ হয় ;}$$

অর্থাৎ যদি যথাক্রমে

$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c<,= \text{ অথবা} >0 \text{ হয়।}$$

বিশ্লেষণ-জ্যামিতিগত এই ধর্মটিকে অপর বক্ররেখাসমূহের ক্ষেত্রেও **সংজ্ঞা** হিসাবে গ্রহণ করা হইবে : সুতরাং

(*i*) কোন বিন্দু P : (x_1, y_1) কে অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর ভিতরে, উপরে অথবা বাহিরে অবস্থিত **বলা হইবে**, যদি যথাক্রমে $y_1^2-4ax_1<,=,$ অথবা >0 হয়।

(*ii*) কোন বিন্দু P : (x_1, y_1) কে উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ (**অথবা পরাবৃত্ত** $x^2/a^2-y^2/b^2=1$) এর ভিতরে, উপরে অথবা বাহিরে অবস্থিত **বলা হইবে**, যদি যথাক্রমে

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1}{b^2}-1<,= \text{ বা, } >0 \text{ হয়}$$

$$\left(\text{বা, } \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}-1<,= \text{ বা, } >0 \text{ হয়}\right)।$$

8·6. পরস্পর লম্ব স্পর্শকদ্বয়ের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ

(A) অধিবৃত্ত : $y^2=4ax.$

এই অধিবৃত্তের যে কোন স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$y=mx+\frac{a}{m}, \text{ যেখানে } m \text{ এর যে কোন মান থাকিতে পারে।}$$

আবার ইহার উপর লম্ব-স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$y=-\frac{1}{m}x-am \quad (m \text{ এর পরিবর্তে } -1/m \text{ লিখিয়া })।$$

যদি (h, k) ইহাদের ছেদবিন্দু হয়, তবে

$$k=mh+\frac{a}{m} \text{ এবং } k=\frac{-h}{m}-am,$$

বা, $mh+\frac{a}{m}=-\frac{h}{m}-am$

বা, $h(m+1/m)=-a(m+1/m)$

অর্থাৎ, যদি m অপনয়ন করা হয়, তবে $h=-a$ হয়।

সুতরাং m এর সকল মানের ক্ষেত্রে এক প্রস্থ পরস্পর লম্ব-স্পর্শক এমন একটি বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে যাহার ভুজ সর্বদা $-a$; ইহার অর্থ, পরস্পর লম্ব-স্পর্শকদ্বয়ের ছেদ-বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল

$x=-a$ (hএর পরিবর্তে সাধারণ (current) স্থানাঙ্ক x বসাইয়া)।

ইহা অধিবৃত্তটির **নিয়ামকের সমীকরণ**। অর্থাৎ, অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে পরস্পর লম্ব-স্পর্শকদ্বয়ের ছেদ বিন্দুর সঞ্চারপথ হইল অধিবৃত্তের নিয়ামক রেখাটি।

(B) উপবৃত্ত : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

উপবৃত্তটির যে কোন স্পর্শক হইল

$y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$, যেখানে m যে কোন ধ্রুবক

এবং ইহার উপর লম্ব-স্পর্শক হইল

$$y=-\frac{1}{m}x+\sqrt{\frac{a^2}{m^2}+b^2} \quad (m \text{ এর পরিবর্তে } -1/m \text{ লিখিয়া })$$

যদি উহারা (h, k) বিন্দুতে ছেদ করে, তবে

$$k=mh+\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

$$mk=-h+\sqrt{a^2+b^2m^2}$$

m অপনয়নের জন্য নিম্নলিখিত পন্থা অবলম্বন করা হইল, যথা :

$$(k-mh)^2+(mk+h)^2=(\sqrt{a^2m^2+b^2})^2+(\sqrt{a^2+b^2m^2})^2$$

বা, $k^2(1+m^2)+h^2(1+m^2)=a^2(1+m^2)+b^2(1+m^2)$

অর্থাৎ, $h^2+k^2=a^2+b^2$

সাধারণ স্থানাঙ্ক (current co-ordinates) পরিবর্তন করিয়া সঞ্চারপথটির নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$x^2+y^2=a^2+b^2$$

অর্থাৎ, সঞ্চারপথটি হইল একটি বৃত্ত, যাহার কেন্দ্র (0, 0) এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{a^2+b^2}$ (অর্থাৎ, পরাক্ষ ও উপাক্ষদ্বয়ের দুইটি প্রান্তবিন্দুর সংযোজক রেখার দৈর্ঘ্য)। এই বৃত্তটি **নিয়ামক বৃত্ত (Director circle)** বলিয়া পরিচিত।

(C) পরাবৃত্ত : $x^2/a^2-y^2/b^2=1$; নিয়ামক বৃত্ত হইল $x^2+y^2=a^2-b^2$.

(D) বৃত্ত : $x^2+y^2=a^2$; নিয়ামক বৃত্ত হইল $x^2+y^2=2a^2$.

[এই ক্ষেত্র দুইটিতে নিয়ামক বৃত্ত নির্ণয় পূর্বের অনুরূপ পদ্ধতিতে হইবে ; সেইজন্য ছাত্রছাত্রীদের অনুশীলনের জন্য রাখিয়া দেওয়া হইল।]

টীকা। নিম্নের তারকা (*) চিহ্নিত অনুচ্ছেদটি কৌতূহলী ছাত্রছাত্রীদের উদ্দেশ্যে প্রদত্ত হইল।

*8·7. ব্যাসসমূহ

নিম্নলিখিত প্রশ্নটি দিয়া শুরু করা হইল, যথা :

$y^2=4ax$ অধিবৃত্তের যে জ্যা এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) তাহার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

পদ্ধতি 1. ধরা যাক্, জ্যাটি $y=mx+c$, যেখানে ইহা প্রদত্ত যে

$$c=y_1-mx_1.$$

জ্যাটি অধিবৃত্তকে যে বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে তাহাদের ভুজ পাওয়া যায় নিম্নের সমীকরণ হইতে,

$$(mx+c)^2=4ax$$

বা, $m^2x^2+2x(mc-2a)+c^2=0$

স্পষ্টত জ্যাটির মধ্য-বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক, যথা :

$$x_1=\frac{x\text{এর বীজ দুইটির সমষ্টি}}{2}=-\frac{(mc-2a)}{m^2}.$$

এখন, $y_1=\dfrac{2a}{m}$, এবং ইহা হইতে $m=\dfrac{2a}{y_1}$.

[$\because$ $y=mx+c$ এবং $y^2=4ax$ এর মধ্যে x অপনয়ন দ্বারা y এর এই দুই ঘাতের সমীকরণ পাওয়া যায় : $my^2-4ay+4ac=0$.

$$\therefore \quad \frac{y\text{এর বীজদ্বয়ের সমষ্টি}}{2}=\frac{2a}{m}\,]$$

যেহেতু $m=\dfrac{2a}{y_1}$, সুতরাং $c=y_1-mx_1=\dfrac{y_1^2-2ax_1}{y_1}$

$\therefore$ জ্যাটির সমীকরণ হইল : $y=\dfrac{2a}{y_1}x+\dfrac{y_1^2-2ax_1}{y_1}$

বা, $\mathbf{yy_1-2ax=y_1^2-2ax_1}$.

পদ্ধতি 2. (x_1, y_1) বিন্দুগামী যে রেখার নতি-কোণ θ তাহার সমীকরণকে নিম্নের আকারে লেখা যায়। যেমন

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r, \qquad \cdots \quad (i)$$

যেখানে r হইল (x_1, y_1) বিন্দু হইতে (x, y) বিন্দুর নিয়ন্ত্রিত দূরত্ব।

যেখানে রেখা (i) অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ কে ছেদ করে, সেখানে

$$(y_1+r\sin\theta)^2=4a(x_1+r\cos\theta)$$

অর্থাৎ, $r^2\sin^2\theta+2r(y_1\sin\theta-2a\cos\theta)+y_1^2-4ax_1=0$,

এবং এই সমীকরণের বীজগুলির মান সমান কিন্তু পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে যদি $\quad y_1\sin\theta-2a\cos\theta=0$ হয় ;

$\therefore$ (i) হইতে জ্যা-টির নির্ণেয় সমীকরণ

$y_1(y-y_1)-2a(x-x_1)=0$. ($\cdot(i)$এর সাহায্যে $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$কে অপনয়ন করিয়া)

বা, $\mathbf{yy_1-2ax=y_1^2-2ax_1}$.

টীকা। উপরে প্রদত্ত পদ্ধতি 2 সম্পূর্ণ সাধারণ পদ্ধতি এবং অপর কনিকগুলির ক্ষেত্রেও ইহা প্রয়োগ করা যায়।

ছাত্রছাত্রীদের এখন উচিত হইবে, নিম্নে প্রদত্ত ফলগুলি নিজের চেষ্টায় নির্ণয় করা :

1. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের যে জ্যা এর মধ্য-বিন্দু (x_1, y_1), তাহার সমীকরণ হইল

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}.$$

2. পরাবৃত্ত $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ এর যে জ্যা এর মধ্য বিন্দু (x_1, y_1) তাহার সমীকরণ হইল

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}.$$

পরবর্তী প্রশ্নটি হইল :

অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$ এর একপ্রস্ত সমান্তরাল জ্যা এর মধ্যবিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

ধরা যাক্, জ্যাগুলি অক্ষের সহিত যে কোণ করে তাহার ট্যানজেন্ট হইল m; ফলে সমান্তরাল রেখাগুলির সমীকরণ হইবে

$$y = mx + c,$$

যেখানে m নির্দিষ্ট ধ্রুবক, কিন্তু c অনির্দিষ্ট (arbitrary) ধ্রুবক। এই সরলরেখা ও অধিবৃত্তটির ছেদবিন্দুর কোটি পাওয়া যাইবে নিম্নের সমীকরণ হইতে, যথা

$$y^2 = 4a\left(\frac{y-c}{m}\right)$$

বা, $my^2 - 4ay + 4ac = 0.$

ধরা হইল, এই সমীকরণের বীজ দুইটি (অর্থাৎ, রেখা অধিবৃত্তকে যে বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে তাহাদের কোটি) y_1 এবং y_2 ; তাহা হইলে

$$y_1 + y_2 = \frac{4a}{m}.$$

ধরা হইল, জ্যা এর মধ্যবিন্দুর কোটি k ; তাহা হইলে

$$k = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2a}{m}.$$

ইহা c বর্জিত, সুতরাং সমুদয় সমান্তরাল জ্যাগুলির পক্ষে সত্য।

$\therefore$ ঐ সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল

$$y = \frac{2a}{m},$$

অর্থাৎ, সঞ্চারপথটি অধিবৃত্তটির অক্ষের সহিত সমান্তরাল একটি সরলরেখা। অতএব নিম্নের প্রতিপাদ্যটি পাওয়া যায়, যথা :

প্রতিপাদ্য। অধিবৃত্তের যে কোন একপ্রস্ত সমান্তরাল জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ হইল অধিবৃত্তটির অক্ষের সহিত সমান্তরাল একটি সরলরেখা।

যেহেতু $y = \frac{2a}{m}$ রেখা অধিবৃত্তকে $\left(\frac{2a}{m}, \frac{a}{m^2}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে ; এবং এই বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল $y = mx + a/m$, সুতরাং প্রতিপাদ্যটির সহিত ইহাও যোগ করা যায় যে :

সঞ্চারপথটি অধিবৃত্তকে যে বিন্দুতে ছেদ করে, সেই বিন্দুতে স্পর্শকটি প্রদত্ত জ্যাগুলির সহিত সমান্তরাল।

সংজ্ঞা। অধিবৃত্তের কোন একপ্রস্ত সমান্তরাল জ্যা এর মধ্যবিন্দুগুলির সঞ্চারপথকে **ঐ সমান্তরাল জ্যাগুলি সম্পর্কে অধিবৃত্তটির ব্যাস** বলা হয়। অধিবৃত্তের যে কোন ব্যাস তাহা হইলে উহার অক্ষের সহিত সমান্তরাল।

অনুরূপ পদ্ধতিতে উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ **এর কোন একপ্রস্ত সমান্তরাল জ্যা এর মধ্যবিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ নির্ণয় করা যায়।**

এখানে, প্রদত্ত সমান্তরাল জ্যাগুলির একটিকে লওয়া হইল,

$$y=mx+c,$$

যেখানে ঐ জ্যাগুলির যে কোন একটি সম্পর্কে m নির্দিষ্ট ধ্রুবক, কিন্তু c উহাদের প্রত্যেকের ক্ষেত্রে বিভিন্ন।

ধরা যাক্, জ্যাটির মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (h, k)।

এই রেখা ও উপবৃত্তটির ছেদবিন্দুর ভুজ পাওয়া যাইবে যে সমীকরণ হইতে তাহা হইল

$$x^2(a^2m^2+b^2)+2a^2mcx+a^2(c^2-b^2)=0$$

$$\text{সুতরাং}\quad h=\text{মধ্যবিন্দুর } x\text{-স্থানাঙ্ক}=-\frac{a^2mc}{a^2m^2+b^2} \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

পুনরায়, (h, k) বিন্দু $y=mx+c$ রেখার উপরও অবস্থিত,

$$\therefore\quad k=mh+c. \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$$

এখন (i) ও (ii) এর মধ্যে c অপনয়ন করিলে পাওয়া যায়:

$$h=-\frac{a^2mc}{a^2m^2+b^2}=-\frac{a^2m(k-mh)}{a^2m^2+b^2}$$

$$\text{অর্থাৎ,}\quad b^2h=-a^2mk.$$

$\therefore$ মধ্যবিন্দুগুলির সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল

$$y=-\frac{b^2}{a^2m}x.$$

অর্থাৎ, সঞ্চারপথটি হইল এমন একটি সরলরেখা $y=m_1x$, যেখানে

$$m_1=-\frac{b^2}{a^2m}\text{ ; বা, } mm_1=-\frac{b^2}{a^2}.$$

সংজ্ঞা। উপবৃত্তের কোন একপ্রস্ত সমান্তরাল জ্যা এর মধ্যবিন্দুগুলির সঞ্চারপথকে **ঐ সমান্তরাল জ্যাগুলি সম্পর্কে উপবৃত্তটির ব্যাস** বলা হয়। **এইরূপ যে কোন ব্যাস স্পষ্টতই উপবৃত্তটির কেন্দ্রগামী।**

আবার, $y=m_1x$ ব্যাস $y=mx$ এর সমান্তরাল সকল জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, যদি $mm_1=-b^2/a^2$ হয়। প্রতিসমতা ধর্ম বিচার করিয়া ইহাও বলা যায় যে $y=mx$ ব্যাস $y=m_1x$ এর সমান্তরাল সকল জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে যদি শর্তটি একই হয়, যথা $mm_1=-\dfrac{b^2}{a^2}$ হয়।

যেখানে এইরূপ ব্যাস-যুগলের প্রত্যেকে অপরটির সমান্তরাল জ্যাসমূহকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহাদের **অনুবদ্ধ বা প্রতিযোগী ব্যাস (Conjugate diameters)** বলা হয়।

অতএব দুইটি ব্যাস, যথা $y=mx$ এবং $y=m_1x$ পরস্পর প্রতিযোগী হয়, যদি

$$mm_1=-\frac{b^2}{a^2} \text{ হয়।}$$

পরাবৃত্ত $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ এর ক্ষেত্রেও হুবহু অনুরূপ যুক্তি অনুসরণযোগ্য।

পরাবৃত্তটির কোন একপ্রস্ত সমান্তরাল জ্যা এর মধ্য-বিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ হইল একটি রেখা (ঐ সমান্তরাল জ্যাগুলি সম্পর্কে ব্যাস বলিয়া কথিত), যাহা পরাবৃত্তটির কেন্দ্রগামী।

$y=mx$ ব্যাসের সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ হইল $y=m_1x$ ব্যাস, যেখানে $mm_1=b^2/a^2$।

পরস্পর প্রতিযোগী ব্যাস এর সংজ্ঞা এখন উপরে প্রদত্ত সংজ্ঞার অনুরূপ হইবে।

অনুশীলনী

1. নিম্নলিখিত বক্ররেখাগুলির জ্যাএর মধ্য-বিন্দু প্রদত্ত হইল, উহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $2y^2=3x$; $(2,-1)$. (ii) $3x^2+4y^2=12$; $(-1, 1)$.
(iii) $25x^2-16y^2=400$; $(5, 3)$.

[উঃ (i) $3x+4y=2$. (ii) $3x-4y+7=0$. (iii) $125x-48y=481$.]

2. $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের যে জ্যাগুলি $(c, 0)$ বিন্দুতে সমকোণ উৎপন্ন করে, তাহাদের মধ্য-বিন্দুর সঞ্চার-পথ নির্ণয় কর।

3. দেখাও যে অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর $x-y-2a=0$ জ্যা $2x-y-5a=0$ জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

4. নিম্নলিখিত বক্ররেখাগুলির যে ব্যাসসমূহ পার্শ্বে প্রদত্ত রেখাগুলির সমান্তরাল রেখাগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $y^2=2x, \quad 3x+4y+2=0.$ [উঃ $3y+4=0$]

(ii) $x^2+2y^2=1, \quad 2x-3y+1=0$ [উঃ $3x+4y=0$]

(iii) $3x^2+4y^2=2, \quad x+2y-3=0.$ [উঃ $3x-2y=0$]

(iv) $4x^2-3y^2=12, \quad 2x-3y-4=0.$ [উঃ $y-2x=0$]

5. $16x^2-9y^2=4$ পরাবৃত্তের যে ব্যাস $x=2y$ ব্যাসের প্রতিযোগী (conjugate) তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। [উঃ $9y-32x=0$]

6. দেখাও যে $y+3x=0$ এবং $4y-x=0$ হইল $3x^2+4y^2=5$ উপবৃত্তের পরস্পর প্রতিযোগী ব্যাসদ্বয়।

7. প্রমাণ কর যে $4x^2+9y^2=36$ উপবৃত্তের যে জ্যা এর মধ্য-বিন্দু $(2, -1)$ তাহার সমীকরণ হইল $8x-9y=25$.

8·8. স্থিতি-মাপ বা 'প্যারামিটার'গত রূপ (Parametric Representation)

সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল এমন একটি সম্পর্ক যাহা ঐ সঞ্চারপথের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু অবশ্যই বজায় রাখিয়া চলে। এইরূপ সম্পর্ককে অপর এক প্রকার সুবিধাজনক আকারে প্রকাশ করা যায়, যথা :

সঞ্চারপথটির যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) কে একটি তৃতীয় চলরাশি (ধরা যাক, t অথবা θ) র মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়, যে ক্ষেত্রে ঐ তৃতীয় চলরাশিটিকে বলা হয় **স্থিতি-মাপ বা 'প্যারামিটার' (parameter)**।

(A) অধিবৃত্ত বিষয়ক

1. $y^2=4ax$ সমীকরণে যদি y এর পরিবর্তে $2at$ ধরা হয়, তবে $x=at^2$ হয় ; সুতরাং $(at^2, 2at)$ বিন্দু t এর যে কোন মানে অধিবৃত্তটির উপর অবস্থিত হইবে এবং বিন্দুটিকে সংক্ষেপে "**t-বিন্দু**" বলিয়া উল্লেখ করা চলে।

তাহা হইলে লেখা যায়,

$$\left.\begin{aligned} x&=at^2 \\ y&=2at \end{aligned}\right\} ;$$

ইহাদের এই একত্র রূপকেই বলা হয় অধিবৃত্ত $y^2=4ax$-এর 'প্যারামিটার'গত রূপ (Parametric representation)। এখন ছাত্রছাত্রীদের নিম্নে প্রদত্ত ফলগুলির সত্যতা যাচাই করিয়া দেখিতে বলা যাইতেছে :

(i) t_1 এবং t_2 বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক জ্যা এর সমীকরণ হইল

$$y-2at_1=\frac{2}{t_2+t_1}(x-at_1^2).$$

(ii) যখন t_1 এবং t_2 বিন্দুদ্বয় একটিমাত্র বিন্দু t_1 এ পরস্পর মিলিত হওয়ার পথে অগ্রসর হয়, তখন t_1 বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$y-2at_1=\frac{1}{t_1}(x-at_1^2)$$

বা, $t_1y=x+at_1^2$.

(iii) t_1 এবং t_2 বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয়, যথা

$$t_1y=x+at_1^2$$

এবং $t_2y=x+at_2^2$

এর ছেদ-বিন্দুটি স্পষ্টত $\{at_1t_2, a(t_1+t_2)\}$.

(iv) t_1 বিন্দুতে অভিলম্বটির সমীকরণ হইল

$$y-2at_1=-t_1(x-at_1^2)$$

বা, $y=-t_1x+2at_1+at_1^3$.

এখন $t_1=-m$ ধরিয়া অভিলম্বের সমীকরণটিকে (অনুচ্ছেদ 8·3 (C) দ্রষ্টব্য ; পৃঃ 174) নিম্নের আকারে প্রকাশ করা যায়, যথা :

$$y=mx-2am-am^3$$

এবং অভিলম্বটির পাদবিন্দু তখন t_1 $(=-m)$ অর্থাৎ $(am^2, -2am)$.

টীকা। t-এর তাৎপর্য : লক্ষ্য করা যাইতে পারে যে

$1/t$ হইল $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা

বা, $-t$ হইল $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে অভিলম্বের প্রবণতা।

উদা. : বিন্দু t হইল অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর নাভিগামী একটি জ্যা এর একটি প্রান্তবিন্দু; প্রমাণ কর যে অপর প্রান্তবিন্দুটি $-1/t$-বিন্দু, এবং ইহা হইতে দেখাও যে অধিবৃত্তের নাভিগামী জ্যাগুলির মধ্য-বিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ হইল অপর একটি অধিবৃত্ত, যথা : $y^2=2a(x-a)$

নাভি $(a, 0)$ এবং বিন্দু $(at^2, 2at)$র যোজক নাভিগামী জ্যা এর প্রবণতা

$$=\frac{2at}{a(t^2-1)}=\frac{2t}{t^2-1}.$$

যদি অপর প্রান্তবিন্দু $(at_1^2, 2at_1)$ হয়, তবে ঐ একই নাভিগামী জ্যা এর প্রবণতাকে এইভাবে লেখা যায়, যেমন

$$\frac{2a(t_1-t)}{a(t_1^2-t^2)}=\frac{2}{t_1+t}$$

$$\therefore \frac{2t}{t^2-1}=\frac{2}{t_1+t},$$

অর্থাৎ, সরলীকরণ করিয়া পাওয়া যায়, $t_1=-\frac{1}{t}$.

সুতরাং জ্যাটির মধ্যবিন্দুতে

$$2x=at^2+\frac{a}{t^2}$$

এবং $2y=2at-\frac{2a}{t}$

সুতরাং $\frac{y}{a}=t-\frac{1}{t}$

বা, $\frac{y^2}{a^2}=t^2+\frac{1}{t^2}-2=\frac{2x}{a}-2.$

অর্থাৎ, নাভিগামী জ্যাসমূহের মধ্য-বিন্দুগুলির সঞ্চার-পথের সমীকরণ হইল

$$y^2=2a(x-a)$$

অর্থাৎ অপর একটি অধিবৃত্ত।

(B) উপবৃত্ত বিষয়ক

2. বিন্দু $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ θর যে কোন মানে উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর উপর অবস্থিত। বলা হয় যে

$$x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$$

একত্রে হইল উপবৃত্তটির 'প্যারামিটার'গত রূপ এবং বিন্দুটিকে θ বলিয়া উল্লেখ করা হয়।

যদি $\tan\theta/2$ এর পরিবর্তে t লেখা হয়, তবে t এর যে কোন মানে বিন্দু

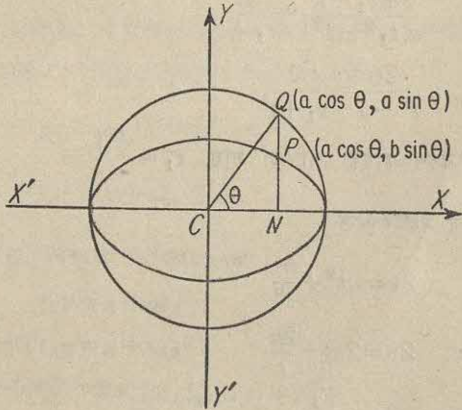
$$\left(a\frac{1-t^2}{1+t^2},\ b\frac{2t}{1+t^2}\right)$$

উপবৃত্তটির উপর অবস্থিত।

যদি উপবৃত্তস্থ বিন্দু P$(a\cos\theta, b\sin\theta)$ এর কোটি $\overline{\text{NP}}$ কে Q পর্যন্ত এইভাবে বর্ধিত করা হয় যে

$$\overline{\text{NQ}}:\overline{\text{NP}}=a:b \text{ হয়,}$$

তবে Q এর স্থানাঙ্ক হইবে ($a \cos \theta$, $a \sin \theta$), **অর্থাৎ** Q হইল $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের উপরিস্থিত বিন্দু। এই বৃত্তকে বলা হয় **সহবৃত্ত (Auxiliary circle)**



চিত্র 8.3

এবং Q এর ভেক্টরিয়াল কোণ (Vectorial angle) θ কে বলা হয় P র **উৎকেন্দ্র কোণ (Eccentric angle)**। নিম্নলিখিত বিষয়গুলি এখন যাচাই করা যাইতে পারে :

(*i*) যে বিন্দুদ্বয়ের উৎকেন্দ্র কোণ θ এবং ϕ, তাহাদের যোজক জ্যা এর সমীকরণ হইল

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta+\phi}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2}=\cos\frac{\theta-\phi}{2}.$$

(*ii*) θ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1.$$

(*iii*) θ এবং ϕ বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয়ের ছেদবিন্দুটি হইল

$$\left(\frac{a\cos\frac{\theta+\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}},\quad \frac{b\sin\frac{\theta+\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}}\right).$$

(*iv*) θ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হইল

$$ax\sec\theta-by\,\mathrm{cosec}\,\theta=a^2-b^2.$$

উদা. : দেখাও যে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের নাভিদ্বয় হইতে θ বিন্দুর দূরত্ব দুইটি হইল $a(1\pm e\cos\theta)$।

ধরা যাক্ P হইল বিন্দু θ বা $(a\cos\theta, b\sin\theta)$, S $(ae, 0)$ এবং S$'(-ae, 0)$ হইল নাভিদ্বয়, যেখানে e উৎকেন্দ্রতা। তাহা হইলে,

$$\overline{SP^2}=(a\cos\theta-ae)^2+b^2\sin^2\theta$$
$$=a^2\cos^2\theta-2a^2e\cos\theta+a^2e^2+b^2\sin^2\theta$$
$$=a^2\cos^2\theta-2a^2e\cos\theta+a^2-b^2+b^2\sin^2\theta$$
$$=a^2\cos^2\theta-2a^2e\cos\theta-b^2\cos^2\theta+a^2$$
$$=a^2e^2\cos^2\theta-2a^2e\cos\theta+a^2=a^2(1-e\cos\theta)^2$$

$\therefore\ \overline{SP}=a(1-e\cos\theta)$; তদ্রূপ $\overline{S'P}=a(1+e\cos\theta)$.

(C) পরাবৃত্ত বিষয়ক

3. বিন্দু $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ θ'র যে কোন মানে পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এর উপর অবস্থিত।

$\therefore$ সমীকরণদ্বয়, যথা : $\left.\begin{array}{l}x=a\sec\theta\\ y=b\tan\theta\end{array}\right\}$

অথবা, $\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{a(1+t^2)}{1-t^2}\\ y=b\dfrac{2t}{1-t^2}\end{array}\right\}$ যদি $t=\tan\theta/2$ হয়,

একত্রে হইল পরাবৃত্তটির 'প্যারামিটার'গত রূপ।

এখন নিম্নলিখিত তথ্যগুলি যাচাই করিয়া দেখা যাইতে পারে, যথা :

(i) θ এবং ϕ এর সংযোজক জ্যা এর সমীকরণ হইল

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\phi-\theta}{2}-\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2}=\cos\frac{\theta+\phi}{2}.$$

(ii) ϕ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\sin\phi=\cos\phi.$$

(iii) ϕ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ তাহা হইলে

$$ax\sin\phi+by=(a^2+b^2)\tan\phi.$$

(D) উপস্পর্শক (Subtangent) এবং উপাভিলম্ব (Subnormal) সম্বন্ধে সংক্ষিপ্ত বিবরণ

কোন বক্ররেখার (বিশেষত কোন কনিক সেক্‌সনের) যে কোন বন্দু Pতে অঙ্কিত স্পর্শক এবং অভিলম্ব যদি অক্ষকে যথাক্রমে T এবং G বিন্দুতে ছেদ করে এবং $\overline{NP}$ যদি P এর কোটি হয় (চিত্র 8.4 দ্রষ্টব্য), তবে

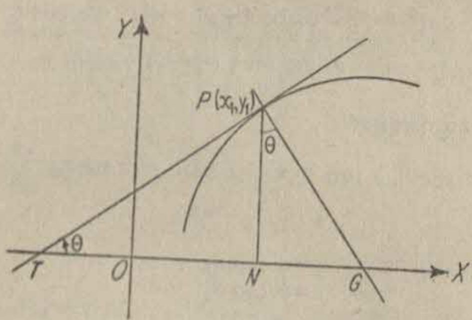
$\overline{PT}$ = P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য

$\overline{PG}$ = P বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বের দৈর্ঘ্য

$\overline{NT}$ = x-অক্ষের উপর $\overline{PT}$'র অভিক্ষেপ : ইহাকে P বিন্দুতে **উপ-স্পর্শক** বলা হয়।

$\overline{NG}$ = x-অক্ষের উপর $\overline{PG}$'র অভিক্ষেপ : ইহাকে P বিন্দুতে **উপাভিলম্ব** বলা হয়।

পরস্পরের বিপরীত দিকে উপ-স্পর্শক ও উপাভিলম্বের পরিমাপ করা হয়।



চিত্র 8.4

যদি P : (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা m হয়, তবে

উপ-স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= -\dfrac{y_1}{m}$

উপাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= y_1 m$.

$\Big[$ $\triangle PNT$ হইতে, $\cot\theta = \dfrac{\overline{TN}}{y_1} = -\dfrac{\overline{NT}}{y_1}$

$\triangle PNG$ হইতে, $\tan\theta = \dfrac{\overline{NG}}{y_1}$ $\Big]$

এখন সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় PNT এবং PNG এর সাহায্যে স্পর্শক ও অভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

উদা. : প্রমাণ কর যে অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$ এর যে কোন বিন্দু P : (x_1, y_1)তে উপ-স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= 2\,|\,x_1\,|$ এবং অধিবৃত্তটির সকল বিন্দুতে উপাভিলম্বের দৈর্ঘ্য ধ্রুবক ও উহা অর্ধ-নাভিলম্বের দৈর্ঘ্যের সমান।

P : (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা $= 2a/y_1$

$\therefore$ উপ-স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= |-y_1/m\,| = \left|\dfrac{-y_1^2}{2a}\right| = \left|\dfrac{-4ax_1}{2a}\right|$

$= 2\,|\,x_1\,|$

এবং উপাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= |y_1 m| = \left|y_1 \cdot \frac{2a}{y_1}\right| = 2a$

= যে কোন বিন্দু P এর ক্ষেত্রে ধ্রুবক, কারণ ইহা অর্ধ-নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য।

বিবিধ প্রশ্নমালা

অধিবৃত্ত বিষয়ক

1. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$ এর একটি দ্বিগুণ-কোটির দৈর্ঘ্য $8a$; প্রমাণ কর যে উহার প্রান্তবিন্দুদ্বয় এবং শীর্ষের সংযোজক রেখা দুইটি সমকোণে অবস্থিত।

3. P বিন্দু হইতে অঙ্কিত $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমকোণে অবস্থিত। Pএর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

4. প্রমাণ কর যে $y = mx + a/m$ রেখা $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক, তা mএর মান যাহাই হউক না কেন। স্পর্শ-বিন্দুর স্থানাঙ্কও নির্ণয় কর।

5. $y^2 = 12x$ অধিবৃত্তের একটি স্পর্শক অক্ষের সহিত 45° কোণে নত। উহার স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

6. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের $(at_1^2, 2at_1)$ এবং $(at_2^2, 2at_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

ইহা হইতে $(at_1^2, 2at_1)$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের $\overline{PQ}$ জ্যা এর P প্রান্তবিন্দুর কোটি Q এর কোটির দ্বিগুণ। দেখাও যে $\overline{PQ}$ এর মধ্যবিন্দু অধিবৃত্ত $5y^2 = 18ax$ এর উপর অবস্থিত।

8. প্রমাণ কর যে কোন অধিবৃত্তের এক প্রস্থ সমান্তরাল জ্যা এর মধ্যবিন্দুগুলি সবই অক্ষের সহিত সমান্তরাল একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত।

9. প্রমাণ কর যে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের জ্যা $y = mx + c$ এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক হইল $\left(\frac{2a - mc}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$.

10. অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$ এর উপর অবস্থিত বিন্দু P : $(at^2, 2at)$ এবং উহার নাভির যোজক রেখা অধিবৃত্তকে পুনরায় Q $(at_1^2, 2at_1)$ বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে $t_1 = -1/t$.

11. $y^2=8x$ অধিবৃত্তের যে স্পর্শক $y+3x=0$ রেখার সমান্তরাল তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

12. দেখাও যে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের P : $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে অভিলম্বকে $tx+y=at^3+2at$ আকারে প্রকাশ করা যায়। যদি এই অভিলম্ব অধিবৃত্তটির অক্ষকে G বিন্দুতে ছেদ করে এবং যদি GPকে P অভিমুখে Q পর্যন্ত এইরূপে বর্ধিত করা হয় যে $\overline{GP}=\overline{PQ}$ হয়, তবে দেখাও যে Q এর সঞ্চারপথ হইল অধিবৃত্ত $y^2=16a(x+2a)$.

13. বিন্দু $(at^2, 2at)$ হইল $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের নাভিগামী কোন জ্যা এর একটি প্রান্তবিন্দু; দেখাও যে জ্যাটির দৈর্ঘ্য হইল $a\,(t+t^{-1})^2$.

14. অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর একটি জ্যা $\overline{PQ}$ শীর্ষতে সমকোণ উৎপন্ন করে; দেখাও যে $\overline{PQ}$ এর মধ্যবিন্দু অধিবৃত্ত $y^2=2a(x-4a)$ এর উপর অবস্থিত।

15. কোন বক্ররেখার উপর অবস্থিত একটি গতিশীল বিন্দুর স্থানাঙ্ক এইরূপ, যথা : $x=at-bt^2$, $y=ct$; দেখাও যে বক্ররেখাটি একটি অধিবৃত্ত। উহার শীর্ষ ও নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

16. P, Q, R বিন্দুত্রয় অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর উপর অবস্থিত; $\overrightarrow{PQ}$ নাভিগামী, এবং $\overline{PR}$ অক্ষের উপর লম্ব; দেখাও যে অধিবৃত্তের উপর P এর সঞ্চার এর সঙ্গে সঙ্গে $\overline{QR}$ এর মধ্যবিন্দু অধিবৃত্ত $y^2=2a(x+a)$ এর উপর বিচরণ করে।

17. কোন অধিবৃত্তের P বিন্দুগামী স্পর্শক অক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করে; প্রমাণ কর যে শীর্ষবিন্দুগামী স্পর্শকটি $\overline{PT}$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

18. শীর্ষ A এবং নাভি S, এইরূপ একটি অধিবৃত্তের উপর P যে কোন বিন্দু; P এবং A গামী স্পর্শকদ্বয় Z বিন্দুতে ছেদ করে; প্রমাণ কর যে

$$\overline{SZ}^2=\overline{SA}.\ \overline{SP}.$$

19. প্রমাণ কর যে অধিবৃত্তের নাভিগামী যে কোন জ্যাএর প্রান্তবিন্দুগামী স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব এবং উহারা নিয়ামকের উপর পরস্পরকে ছেদ করে।

20. দেখাও যে $y^2=4x$ এই অধিবৃত্তস্থ বিন্দুদ্বয় $(1, 2)$ এবং $(9, -6)$ এর সংযোজক রেখা অধিবৃত্তটির প্রথমোক্ত বিন্দুতে অভিলম্ব।

21. $(at_1^2, 2at_1)$ বিন্দুতে অভিলম্ব অধিবৃত্তটিকে পুনরায় $(at_2^2, 2at_2)$ বিন্দুতে ছেদ করে; প্রমাণ কর যে

$$t_2=-t_1-\frac{2}{t_1}.$$

[**ইঙ্গিত :** t_1 বিন্দুতে অভিলম্বের প্রবণতা $=-t_1$;

t_1 এবং t_2 এর যোজক রেখার প্রবণতা $=\dfrac{2}{t_1+t_2}$.]

22. P এবং Q হইল $y^2=4ax$ এই অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত যথাক্রমে $(at_1{}^2, 2at_1)$ এবং $(at_2{}^2, 2at_2)$ বিন্দু ; P এবং Q বিন্দুতে অভিলম্বদ্বয় পরস্পরকে অধিবৃত্তের উপর ছেদ করে ; প্রমাণ কর যে $t_1t_2=2$.

23. প্রমাণ কর, অধিবৃত্তের যে বিন্দুর কোটি উহার ভুজের সমান, সেই বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব-জ্যা নাভিতে সমকোণ উৎপন্ন করে।

24. $\overline{PQ}$ হইল কোন অধিবৃত্তের নির্দিষ্ট অভিমুখে অঙ্কিত যে কোন একটি জ্যা। প্রমাণ কর যে P এবং Q বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বদ্বয়ের ছেদ-বিন্দুর সঞ্চারপথ হইল একটি সরলরেখা, যাহা নিজেও অধিবৃত্তটির একটি অভিলম্ব।

25. অধিবৃত্ত $y^2=4ax$ এর কোন নাভিগামী জ্যা এর অংশদ্বয় (segments) যদি l এবং l_1 হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{l_1}=\frac{1}{a}.$$

26. $y^2=8ax$ এই অধিবৃত্তের অক্ষস্থ যে বিন্দুর নাভি হইতে দূরত্ব $8a$, সেই বিন্দু হইতে অঙ্কিত অভিলম্বসমূহের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

27. $y^2=4ax$ এই অধিবৃত্তের কোন্ বিন্দুর ক্ষেত্রে (i) অভিলম্বের দৈর্ঘ্য, উপ-স্পর্শকের দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ ; (ii) অভিলম্বের দৈর্ঘ্য, উপ-স্পর্শক এবং উপাভিলম্বের দৈর্ঘ্যদ্বয়ের অন্তরফলের সমান ?

উত্তরমালা

1. $y=x+a$; $x+y+a=0$. 3. $x+1=0$; 5. $(3, 6)$. 11. $9x+3y+2=0$.
15. $\left(\frac{a^2}{4b}, \frac{ac}{2b}\right)$; $\frac{c^2}{b}$. 26. a ; $10a$. 27. $\left(\frac{\sqrt{17}+1}{8}a, \frac{a}{2}\sqrt{2\sqrt{17}+2}\right)$; $(3a, 2\sqrt{3}a.)$

উপবৃত্ত বিষয়ক

1. উপবৃত্ত $9x^2+25y^2=225$ এর নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক পরস্পরকে যে বিন্দুতে ছেদ করে, মূলবিন্দু হইতে তাহার দূরত্ব নির্ণয় কর।

2. $9x^2+16y^2=144$ এই উপবৃত্তের যে স্পর্শক ধনাত্মক x-অক্ষ ও ধনাত্মক y-অক্ষ হইতে সমান ছেদিতাংশ ছিন্ন করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

3. দেখাও যে $x-y=5$ এই রেখা নিম্নের উপবৃত্তকে স্পর্শ করে :

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1.$$

4. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ এই উপবৃত্তের যে কোন একটি নাভিলম্বের একটি প্রান্তবিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. দেখাও যে $x+y=3$ এই রেখাটির উপবৃত্ত $3x^2+6y^2=18$ এর স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুটি (2, 1)।

6. যদি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এই উপবৃত্তের কোন স্পর্শকের উপর নাভিদ্বয় হইতে অঙ্কিত লম্ব দুইটির দৈর্ঘ্য p এবং p_1 হয়, তবে দেখাও যে $pp_1=b^2$।

7. $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এই উপবৃত্তের একটি গতিশীল জ্যা $\overline{PQ}$ এর মধ্যবিন্দু M ; যদি C উপবৃত্তটির কেন্দ্র হয়, তবে দেখাও যে $\overline{CM}$ এবং $\overline{PQ}$ এর প্রবণতা দুইটির গুণফল ধ্রুবক।

[**ইঙ্গিত :** ধর, $P=(a\cos\theta, b\sin\theta)$, $Q=(a\cos\phi, b\sin\phi)$]

8. দেখাও যে e উৎকেন্দ্রতাবিশিষ্ট উপবৃত্ত, $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর উপর অবস্থিত বিন্দুদ্বয় θ ও ϕ একটি নাভিগামী জ্যা এর প্রান্তবিন্দু হইবে যদি

$$\tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\phi}{2}=\frac{e-1}{e+1}, \text{ বা, } \frac{e+1}{e-1} \text{ হয়।}$$

9. $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এই উপবৃত্তস্থ চলমান বিন্দুদ্বয় θ ও ϕ এর সংযোজক জ্যা শীর্ষ $(a, 0)$ বিন্দুতে সমকোণ ধারণ করে ; দেখাও যে

$$\tan\theta/2\tan\phi/2=-b^2/a^2.$$

10. যদি P, Q উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর উপর অবস্থিত বিন্দু θ, 2θ হয়, তবে দেখাও যে $\overline{PQ}$ জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ হইবে

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{4x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{b^2}-3\right)=\frac{x}{a}.$$

11. $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এই উপবৃত্তস্থ বিন্দু $(a, 0)$, $(0, b)$ গামী একটি বৃত্ত উপবৃত্তকে পুনরায় P, Q বিন্দুতে ছেদ করে ; দেখাও যে $\overline{PQ}$ এর মধ্যবিন্দু $x/a+y/b=0$ এই রেখার উপর অবস্থিত।

12. P, Q হইল উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর উপর অবস্থিত বিন্দু θ, ϕ ; $\overline{TP}$, $\overline{TQ}$ হইল স্পর্শক ; T এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং ইহা হইতে দেখাও যে, যদি P ও Q এইভাবে সঞ্চার করে যে $\theta-\phi=\pi/2$ হয়, তবে T এর সঞ্চারপথ হইবে নিম্নের উপবৃত্ত, যথা :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2.$$

13. উপবৃত্ত $x^2+2y^2=6$ এবং বৃত্ত $2x^2+2y^2=9$ এর সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[**ইঙ্গিত :** উপবৃত্তের স্পর্শক, যদি প্রবণতা m হয়

$$y=mx\pm\sqrt{6m^2+3}$$

বৃত্তের স্পর্শক, যেহেতু প্রবণতা m :

$$y=mx\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{1+m^2}$$

সর্তানুসারে, ইহারা একই রেখা—কখন ?]

14. S এবং S′ যে উপবৃত্তের নাভি, তাহার উপর অবস্থিত P যে কোন বিন্দু ; দেখাও যে $\overline{SP}$ এবং $\overline{S'P}$ উভয়ে P বিন্দুগামী স্পর্শকের উপর সমভাবে নত। [ধর, উপবৃত্তটি $x^2/a^2+y^2/b^2=1$].

15. উপবৃত্তস্থ বিন্দু P গামী স্পর্শক নিয়ামকের সহিত T বিন্দুতে মিলিত হয় ; দেখাও যে $\overline{PT}$ নাভিতে সমকোণ ধারণ করে।

16. P, Q হইল উপবৃত্তস্থ বিন্দু ; $\overline{TP}$ এবং $\overline{TQ}$ হইল স্পর্শক ; দেখাও যে T এবং $\overline{PQ}$ এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখা উপবৃত্তটির কেন্দ্র দিয়া গমন করে।

17. উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর নাভিগামী কোন জ্যাএর প্রান্তবিন্দু P ও Q তে $\overline{TP}$ ও $\overline{TQ}$ স্পর্শক ; দেখাও যে T নিয়ামকের উপর অবস্থিত।

18. দেখাও যে $lx+my=1$ এই রেখাটির উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর অভিলম্ব হইবার শর্ত হইল নিম্নরূপ, যথা :

$$\frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{m^2}=(a^2-b^2)^2.$$

[**অন্যতম পদ্ধতি :** $ax\sec\theta-by\operatorname{cosec}\theta=a^2-b^2$ এবং $lx+my=1$ হইল অভিন্ন রেখা ; সুতরাং x এবং y এর সহগগুলি তুলনা কর।]

19. দেখাও যে (x_1, y_1) বিন্দু হইতে অঙ্কিত উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর অভিলম্বসমূহের পাদবিন্দুগুলি নিম্নের বক্ররেখার উপর অবস্থিত, যথা :

$$(a^2-b^2)xy+b^2y_1x-a^2x_1y=0.$$

[ইঙ্গিত : (α, β) বিন্দুতে অভিলম্ব : $\frac{a^2x}{\alpha}-\frac{b^2y}{\beta}=a^2-b^2$; যদি ইহা (x_1, y_1) বিন্দুর মধ্য দিয়া গমন করে, তবে $\frac{a^2x_1}{\alpha}-\frac{b^2y_1}{\beta}=a^2-b^2$, অর্থাৎ, (α, β) বিন্দু এই বক্ররেখার উপর অবস্থিত, যথা :

$$\frac{a^2x_1}{x}-\frac{b^2y_1}{y}=a^2-b^2,$$ ইত্যাদি।]

20. যে শর্তে $lx+my=1$ এই রেখা উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর অভিলম্ব হইবে, তাহা নির্ণয় কর।

21. P হইল $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এই উপবৃত্তস্থ বিন্দু (x_1, y_1) ; P বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব x-অক্ষকে G বিন্দুতে ছেদ করে ; প্রমাণ কর যে G এর ভুজ হইল e^2x_1, যেখানে e হইল উৎকেন্দ্রতা।

22. দেখাও যে $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এই উপবৃত্তের যে জ্যা উপবৃত্তটির $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ বিন্দুতে অভিলম্ব, তাহার মধ্যবিন্দু এই রেখাটির উপর অবস্থিত, যথা :

$$\frac{x}{a^3}\cos\theta+\frac{y}{b^3}\sin\theta=0.$$

23. C কেন্দ্রবিশিষ্ট উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর উপর অবস্থিত θ এবং ϕ বিন্দু দুইটি হইল যথাক্রমে P এবং Q ; দেখাও যে $\overline{CA}$ এবং $\overline{CB}$ অনুবদ্ধ অর্ধ-ব্যাস হইবে, যদি $\theta\sim\phi=\pi/2$ হয়।

24. $\overline{PQ}$ হইল উপবৃত্তের ব্যাস ; দেখাও যে P এবং Q গামী স্পর্শকদ্বয় $\overline{PQ}$ এর অনুবদ্ধ ব্যাসের সহিত সমান্তরাল।

25. $\overline{CP}$, $\overline{CQ}$ হইল উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর অনুবদ্ধ অর্ধ-ব্যাস ; $\overline{CQ}$ হইতে P এর দূরত্ব যদি p হয়, তবে দেখাও যে

$$\overline{CQ}=\frac{ab}{p}.$$

26. দেখাও যে উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ এর অনুবদ্ধ ব্যাসদ্বয়ের প্রান্তবিন্দুগামী স্পর্শকসমূহ পরস্পরকে উপবৃত্ত $x^2/a^2+y^2/b^2=2$ এর উপর ছেদ করে।

উত্তরমালা

1. 25/4. 2. $x+y=5$. 4. $25x-15y=27$.

13. $y=x\pm3,\ y=-x\pm3$. 20. $\frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{m^2}=(a^2-b^2)^2$.

পরাবৃত্ত বিষয়ক

1. পরাবৃত্ত $x^2/4-y^2/2=1$ এবং বৃত্ত $x^2+y^2=1$ এর সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. দেখাও যে $y=x+\sqrt{5}$ রেখা পরাবৃত্ত $x^2/9-y^2/4=1$ এর স্পর্শক ; যাচাই করিয়া দেখাও যে স্পর্শবিন্দুটি $(-9/\sqrt{5}, -4/\sqrt{5})$।

3. পরাবৃত্ত $3x^2-y^2=3$ এর যে স্পর্শকগুলি $2x-y=1$ এই রেখার সহিত সমান্তরাল, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

4. $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ এই পরাবৃত্তের $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণটিকে নিম্নলিখিত আকারে নির্ণয় কর, যথা :

$$ax\tan\theta+by\sec\theta=(a^2+b^2)\sec\theta\tan\theta.$$

5. P $(a\sec\theta, a\tan\theta)$ হইল $x^2-y^2=a^2$ এই পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত একটি গতিশীল বিন্দু এবং A $(2a, 0)$ স্থির বিন্দু। দেখাও যে $\overline{AP}$র মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ হইল অপর একটি পরাবৃত্ত, যথা : $4(x-a)^2-4y^2=a^2$।

6. পরাবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু P গামী স্পর্শক নিয়ামকের সহিত T বিন্দুতে মিলিত হয় ; দেখাও যে $\overline{PT}$ নাভিতে সমকোণ ধারণ করে।

7. $\overline{NP}$ হইল কোন বিন্দু P এর কোটি, যেখানে P নিম্নের পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত, যথা :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$$

P বিন্দুগামী স্পর্শক তির্যক অক্ষের সহিত T বিন্দুতে মিলিত হয় ; মূলবিন্দু O হইলে দেখাও যে $\overline{ON}.\overline{OT}=a^2$; আরও প্রমাণ কর যে $\overline{ON'}.\overline{OT'}=-b^2$, যদি P বিন্দুগামী স্পর্শকটি অনুবন্ধ অক্ষের সহিত T′ বিন্দুতে মিলিত হয় এবং যদি অনুবন্ধ অক্ষের উপর লম্ব $\overline{PN'}$ ঐ অক্ষের সহিত N′ বিন্দুতে মিলিত হয়।

8. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ এই পরাবৃত্তের উপর P একটি সঞ্চারমান বিন্দু এবং S নাভি ; P বিন্দুতে $\overline{PT}$ স্পর্শক এবং $\overline{PT}$র উপর $\overline{ST}$ লম্ব ; দেখাও যে Tর সঞ্চারপথ হইল $x^2+y^2=a^2$ এই বৃত্ত।

9. P এবং Q হইল যথাক্রমে $(a\sec\theta, b\tan\theta)$, এবং $(-a\,\text{cosec}\,\theta, -b\cot\theta)$ বিন্দুদ্বয় ; দেখাও যে P ও Q বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি পরস্পরকে নিম্নস্থ পরাবৃত্তের উপর ছেদ করে, যথা :

$$\frac{2x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

10. $2x^2-3y^2=6$ এই পরাবৃত্তের যে স্পর্শকসমূহ $x+y-2=0$ এই রেখার সমান্তরাল, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

11. পরাবৃত্ত $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$ এবং বৃত্ত $x^2+y^2=1$ এর সাধারণ স্পর্শকগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

12. P একটি গতিশীল বিন্দু, যাহা নিম্নের পরাবৃত্তটির উপর অবস্থিত, যথা :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ ;$$

P বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব অনুবদ্ধ অক্ষের সহিত θ বিন্দুতে মিলিত হয় ; $\overline{\text{QP}}$ কে R পর্যন্ত এইরূপে বর্ধিত করা হইল যেন বর্ধিত অংশ $\overline{\text{QP}}$র সমান হয় ; দেখাও যে R এর সঞ্চার-পথ হইল এই পরাবৃত্ত, যথা :

$$\frac{x^2}{4a^2}-\frac{b^2y^2}{(a^2-b^2)^2}=1.$$

13. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এই পরাবৃত্তের উপর P একটি সঞ্চারমান বিন্দু ; P বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব $\overrightarrow{\text{CX}}$ এবং $\overrightarrow{\text{CY}}$ অক্ষদ্বয়ের সহিত যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে মিলিত হয় এবং CAQB একটি আয়তক্ষেত্র ; দেখাও যে Q এর সঞ্চারপথ হইল একটি পরাবৃত্ত, যথা :

$$a^2x^2-b^2y^2=(a^2+b^2)^2.$$

14. দেখাও যে $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ এই পরাবৃত্তস্থ $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ বিন্দুতে অভিলম্বটি পরাবৃত্তটিকে পুনরায় $(a\sec\phi, b\tan\phi)$ বিন্দুতে ছেদ করে, যেখানে

$$a^2\sin\theta\sin\frac{\theta+\phi}{2}+b^2\cos\frac{\theta-\phi}{2}=0.$$

15. $\overline{\text{CP}}$, $\overline{\text{CD}}$ হইল পরাবৃত্ত $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ এর অনুবদ্ধ অর্ধ-ব্যাস ; দেখাও যে

$$\overline{\text{CP}}^2\sim\overline{\text{CD}}^2=a^2-b^2.$$

16. যদি কোন পরাবৃত্তের এবং উহার অনুবদ্ধ পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা e এবং e' হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e'^2}=1.$$

[সম-পরাবৃত্ত বিষয়ক সংক্ষিপ্ত বিবরণ (Rectangular or Equilateral hyperbola)

পরাবৃত্তকে সম-পরাবৃত্ত বলা হয় যখন উহার তির্যক ও অনুবদ্ধ অক্ষদ্বয় দৈর্ঘ্যে পরস্পর সমান হয়।

সুতরাং অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্ক-অক্ষ হইলে $x^2-y^2=a^2$ এই সমীকরণ একটি সম-পরাবৃত্তকে নির্দেশ করে।

সম-পরাবৃত্তের সমীকরণের একটি প্রয়োজনীয় আকার হইল নিম্নরূপ, যথা :

$$xy = \text{ধ্রুবক} = c^2 \text{ (ধরা যাক্)।}$$

এই বিশেষ আকারটি পাওয়া যায়, যদি $x^2-y^2=a^2$ এর অসীমপথ দুইটিকে (যথা : $x^2-y^2=0$ বা, $y=\pm x$ কে) স্থানাঙ্ক-অক্ষ ধরা হয় ; তবে পাঠ্যক্রমের বহির্ভূত বলিয়া প্রক্রিয়াটি প্রদর্শিত হইল না, কিন্তু ছাত্রছাত্রীদের এই আকারটি স্মরণ রাখিতে বলা যাইতেছে, যথা :

'প্যারামিটার'গত আকার : t এর যে কোন মানে $x=ct$, $y=c/t$ বক্ররেখা $xy=c^2$ এর উপর অবস্থিত। উহারা একত্রে বক্ররেখাটির 'প্যারামিটার'গত রূপ প্রদান করে। $(ct, c/t)$ বিন্দুকে বিন্দু "t" বলিয়া উল্লেখ করা হয়।]

17. সম-পরাবৃত্ত $xy=c^2$ এর ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে

(i) (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক জ্যা এর সমীকরণ হইল

$$c^2x+x_1x_2y=c^2(x_1+x_2)$$

এবং ইহা হইতে দেখাও যে (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ দুইটি হইল যথাক্রমে

$$xy_1+x_1y=2c^2 \text{ এবং } xx_1-yy_1=x_1^2-y_1^2.$$

(ii) সম-পরাবৃত্তের ('প্যারামিটার'গত রূপের) t_1 এবং t_2 বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক জ্যাএর সমীকরণ হইবে

$$x+t_1t_2y=c(t_1+t_2) \text{ ;}$$

এখন দেখাও যে t_1 বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ দুইটি হইল যথাক্রমে

$$x+t_1^2y=2ct_1,$$

এবং $t_1x-\dfrac{y}{t_1}=\left(t_1^2-\dfrac{1}{t_1^2}\right)$.

(iii) যে জ্যা এর মধ্য-বিন্দু (x_1, y_1) তাহার সমীকরণ হইল

$$xy_1+x_1y=2x_1y_1$$

(iv) m প্রবণতাবিশিষ্ট জ্যাগুলির সমদ্বিখণ্ডক ব্যাসের সমীকরণ হইল $y=-mx$.

18. দেখাও যে

$$xy+2x-y-6=0$$

এই সমীকরণ একটি সম-পরাবৃত্তের সমীকরণ ; ইহার অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ইঙ্গিত : সমীকরণটিকে নিম্নের আকারে প্রকাশ কর, যেমন $(x-1)(y+2)=4$; অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ হইল : $x=1$ এবং $y=-2$.]

19. নির্দিষ্ট বিন্দু (h, k) গামী একটি সরলরেখা x-অক্ষ এবং y-অক্ষকে যথাক্রমে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করিল; দেখাও যে PQ এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ হইল একটি সম-পরাবৃত্ত, যাহার কেন্দ্র $(h/2, k/2)$।

20. P এবং Q হইল $xy=c^2$ এর উপর অবস্থিত যথাক্রমে t_1 এবং t_2 বিন্দু; $\overline{TP}$, $\overline{TQ}$ হইল স্পর্শক; দেখাও যে মূলবিন্দু ও T এর সংযোজক রেখা $\overline{PQ}$ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

21. $xy=c^2$ পরাবৃত্তের P (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্ব ঐ পরাবৃত্তকে পুনরায় Q (x_2, y_2) বিন্দুতে ছেদ করে; দেখাও যে

$$x_1x_2=-{y_1}^2\ ;\ y_1y_2=-{x_1}^2.$$

22. পরাবৃত্ত $xy=c^2$ এর উপর অবস্থিত t_1 এবং t_2 বিন্দু দুইটি হইল যথাক্রমে P ও Q; PQ হইল P বিন্দুতে পরাবৃত্তটির অভিলম্ব; দেখাও যে

$${t_1}^3t_2=-1.$$

23. পরাবৃত্ত $xy=c^2$ এর উপর চলমান বিন্দু Pতে অঙ্কিত অভিলম্ব x-অক্ষকে Q বিন্দুতে ছেদ করে; দেখাও যে $\overline{PQ}$ এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল

$$8y^4=c^2(c^2-2xy).$$

উত্তরমালা

1. $y=x+\sqrt{2}\ ;\ y=-x-\sqrt{2}.$

3. $2x-y\pm1=0.$

10. $x+y\pm1=0.$

11. $y=\pm x\pm\sqrt{2},$

পরিশিষ্ট—I

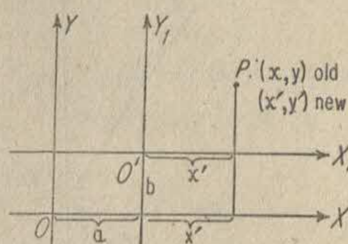
প্রতিফলন, চলন ও ঘূর্ণনের বিশ্লেষণ-জ্যামিতিগত রূপ

(Analytical representation of reflexion, translation and rotation)

স্থানাঙ্কের রূপান্তর (Transformation of co-ordinates)

1. **সমান্তরাল অক্ষদ্বয়।** কখনও কখনও এইরূপ ঘটে যে প্রদত্ত কোন কার্টেজীয় অক্ষদ্বয়ের স্থান পরিবর্তন বাঞ্ছনীয় হইয়া পড়িতেছে—নূতন অবস্থানের অক্ষদ্বয়কে পূর্বতন অক্ষদ্বয়ের সহিত সমঅভিমুখে রাখিয়া তখন নূতন একটি মূলবিন্দু লওয়া হয়।

ধরা যাক্, P সমতলস্থ কোন বিন্দু; এবং পুরাতন অক্ষদ্বয় $(\overleftrightarrow{OX}, \overleftrightarrow{OY})$ সম্পর্কে P এর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং নূতন অক্ষদ্বয় $(\overleftrightarrow{O'X_1}, \overleftrightarrow{O'Y_1})$ সম্পর্কে উহার স্থানাঙ্ক (x', y') [চিত্র 8.5]। ধরা যাক্, নূতন মূলবিন্দু O′ এর পুরাতন অক্ষদ্বয়



চিত্র 8.5

সম্পর্কে স্থানাঙ্ক হইল (a, b)। তাহা হইলে সন্নিহিত চিত্র হইতে ইহা সহজেই দেখা যায় যে

$$\left.\begin{array}{l} x=a+x' \\ y=b+y' \end{array}\right\} \quad \cdots \quad (1)$$

উদা.: নূতন সমান্তরাল অক্ষ ও নূতন মূলবিন্দু $(2, -1)$ সম্পর্কে $y^2+2y-4x+9=0$ এই বক্ররেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

এখানে, $x=x'+2,\ y=y'-1$

সুতরাং নূতন ব্যবস্থায় বক্ররেখাটির সমীকরণ এইরূপ হইবে, যথা :

$$(y'-1)^2+2(y'-1)-4(x'+2)+9=0$$

বা, $y'^2=4x'$ (অর্থাৎ একটি অধিবৃত্ত যাহার শীর্ষ নূতন মূলবিন্দু)

পুরাতন অক্ষদ্বয় সম্পর্কে শীর্ষটি হইল $(2, -1)$ বিন্দু এবং নাভি $(3, -1)$.

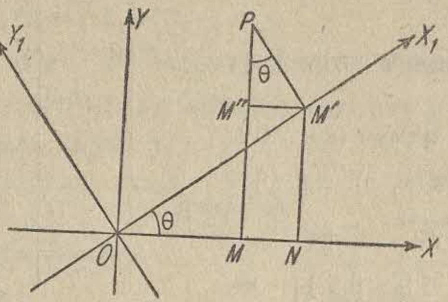
অনুরূপভাবে চেষ্টা কর :

(i) $9x^2+4y^2+18x-16y=11$; নূতন মূলবিন্দু $(-1, 2)$ সহ সমান্তরাল অক্ষদ্বয়।

(ii) $x^2-4y^2-6x-32y-59=0$; $(3,-4)$ বিন্দুতে নূতন মূলবিন্দু সহ সমান্তরাল অক্ষদ্বয়।

2. অক্ষদ্বয়ের ঘূর্ণন

ধরা যাক্, $\overleftrightarrow{OX}$ এবং $\overleftrightarrow{OY}$ একপ্রস্ত প্রাথমিক আয়ত স্থানাঙ্ক অক্ষ। একই মূলবিন্দু O লইয়া এইরূপ অপর আর এক প্রস্থ আয়ত স্থানাঙ্ক অক্ষ $\overleftrightarrow{OX_1}$ এবং $\overleftrightarrow{OY_1}$ লওয়া হইল যেন $\overrightarrow{OX}$ হইতে $\overrightarrow{OX_1}$ পর্যন্ত কোণটি θ হয়।



চিত্র 8.6

ধরা যাক্, পুরাতন ও নূতন অক্ষ সম্পর্কে যে কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x, y) এবং (x', y')। ধরা যাক্, $\overleftrightarrow{OX}$ এবং $\overleftrightarrow{OX_1}$ এর উপর P র অভিক্ষেপ যথাক্রমে M এবং M′ (চিত্র 8.6 দ্রষ্টব্য)।

তাহা হইলে প্রাসঙ্গিক চিত্র হইতে পাওয়া যায় যে

$$x=\overline{OM}=\overline{CN}-\overline{MN}=\overline{CN}-\overline{M''M'}$$

$$=\overline{OM'}\cos\theta-\overline{M'P}\sin\theta=x'\cos\theta-y'\sin\theta$$

$$y=\overline{MP}=\overline{MM''}+\overline{M''P}=\overline{NM'}+\overline{M''P}$$

$$=\overline{OM'}\sin\theta+\overline{M'P}\cos\theta=x'\sin\theta+y'\cos\theta.$$

সুতরাং

$$\left.\begin{array}{l} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta \end{array}\right\}.$$

উদা. : নূতন অক্ষদ্বয় সম্পর্কে $x^2-y^2=a^2$ এই সমীকরণটিকে রূপান্তরিত কর, যেখানে মূলবিন্দু অপরিবর্তিত আছে এবং x এর ধনাত্মক অক্ষ হইতে x' এর ধনাত্মক অক্ষ পর্যন্ত কোণ -45° করা হইয়াছে।

এখানে $x=x'\cos(-45^\circ)-y'\sin(-45^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$

$$y=x'\sin(-45^\circ)+y'\cos(-45^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x'+y')$$

$\therefore$ $x^2-y^2=a^2$ এর রূপান্তরিত আকার হইল নিম্নরূপ, যথা :

$$\tfrac{1}{2}(x'^2+2x'y'+y'^2)-\tfrac{1}{2}(x'^2-2x'y'+y'^2)=a^2$$

বা, $2x'y'=a^2$.

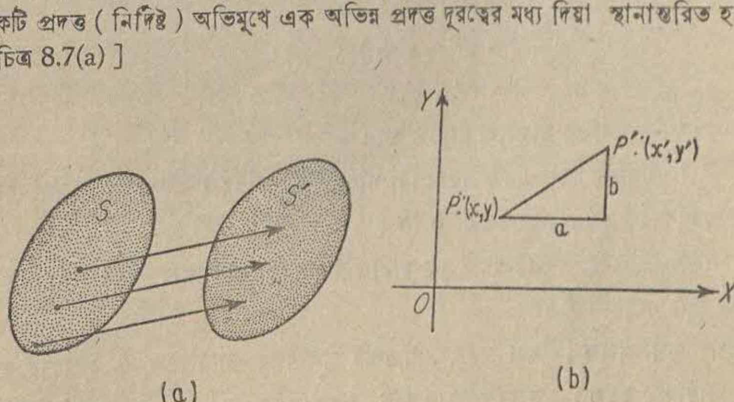
ইহা সম-পরাবৃত্তের সমীকরণ, যখন উহার অসীমপথ দুইটিকে স্থানাঙ্ক অক্ষ ধরা হয়।

অনুরূপ পদ্ধতিতে চেষ্টা কর :

প্রদত্ত সমীকরণ	যে কোণের মধ্য দিয়া পুরাতন অক্ষদ্বয়ের আবর্তন হয়
(i) $x^2-2xy+y^2+2x-4y+3=0$	$+45^\circ$
(ii) $x^2+4xy+y^2+3=0$	$+45^\circ$

সমতলটির রূপান্তর বা পরিবর্তন
(Transformations of the Plane)

1. চলন (Translations) : কোন সামতলিক অঞ্চল S এর **চলন** বলিতে বুঝায়, S এর এইরূপ সরণ (displacement) যাহাতে S এর প্রত্যেক বিন্দু একটি প্রদত্ত (নির্দিষ্ট) অভিমুখে এক অভিন্ন প্রদত্ত দূরত্বের মধ্য দিয়া স্থানান্তরিত হয়। [চিত্র 8.7(a)]



(a) (b)

চিত্র 8.7

যেমন, একটি জানালা যখন উত্থিত হয়, তখন ঐ জানালা-মধ্যস্থ কোন সামতলিক কাচখণ্ডের চলন ঘটে।

বিশ্লেষণ-জ্যামিতিগত রূপ ঃ ধরা যাক্, P : (x, y) কোন সমতলস্থ একটি অনির্দিষ্ট যে কোন বিন্দু এবং ধরা যাক্, সমতলটির চলনের ফলে P স্থানান্তরিত হইয়া যে বিন্দুতে উপস্থিত হয় তাহা P' : (x',y') [চিত্র 8.7 (b)]। ধরা যাক্, x-অক্ষ ও y-অক্ষের উপর দিক-নির্দেশিত রেখাংশ $\overline{PP'}$ এর অভিক্ষেপ যথাক্রমে a এবং b ; তাহা হইলে

$$x'=x+a$$
$$y'=y+b$$

নূতন অক্ষদ্বয় পুরাতন অক্ষদ্বয়ের সহিত সমান্তরাল ও উহাদের সহিত যথাক্রমে সম-অভিমুখী হইলে স্থানাঙ্কের রূপান্তরঘটিত যে সম্পর্ক পূর্বে প্রাপ্ত হওয়া গিয়াছিল, এই ক্ষেত্রেও ঐ একই সম্পর্কদ্বয় পাওয়া যায় বলিয়া দেখা গেল। কিন্তু উভয় ক্ষেত্রে প্রাপ্ত অনুরূপ ফলগুলির তাৎপর্যগত ব্যাখ্যা পরস্পর হইতে **সম্পূর্ণ ভিন্ন**। পূর্বের ক্ষেত্রে P বিন্দুর অবস্থান অপরিবর্তিত ছিল ; তবে নূতন অক্ষদ্বয় সম্পর্কে উহার নূতন স্থানাঙ্ক ধার্য হইয়াছিল। কিন্তু এক্ষেত্রে অক্ষদ্বয়ের কোন পরিবর্তন হয় নাই ; বিন্দু P এরই অবস্থানের পরিবর্তন হইয়াছে।

উদা. ঃ ধরা যাক্, বক্ররেখা C : $y=x^2-x+\frac{3}{2}$ চলনের ফলে y এর ঋণাত্মক অক্ষের অভিমুখে $\frac{3}{2}$ একক দূরত্বের মধ্য দিয়া স্থানান্তরিত হইল। নূতন বক্ররেখা C' এর সমীকরণ কি হইবে ?

এখানে $x'=x$, $y'=y-\frac{3}{2}$ (বা, $y=y'+3/2$)

∴ নূতন বক্ররেখা C' এর সমীকরণ হইল

$$y'+\tfrac{3}{2}=x'^2-x'+\tfrac{3}{2}$$
$$\text{বা,}\quad y'=x'^2-x'.$$

বিশ্লেষণ-জ্যামিতির সাহায্যে যাচাই কর :

(*i*) চলনের ফলে একটি সরলরেখা সাধারণভাবে একটি সমান্তরাল সরলরেখার উপর স্থানান্তরিত হয়। ব্যতিক্রম কি কি ?

(*ii*) চলনের ফলে একটি বৃত্ত স্থানান্তরিত হইয়া সমব্যাসার্ধবিশিষ্ট অপর একটি বৃত্তের উপর সমাপতিত হয়।

2. ঘূর্ণনসমূহ। ধরা যাক্, সমতলটি মূলবিন্দুর চারিদিকে θ কোণের মধ্য দিয়া আবর্তিত হইল। তাহা হইলে কোন প্রদত্ত বিন্দু P : (x, y) যে P' বিন্দুতে

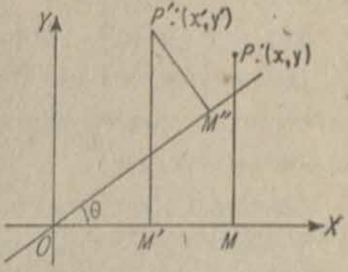
স্থানান্তরিত হইবে তাহার (x', y') স্থানাঙ্ক কিভাবে পূর্ব স্থানাঙ্কদ্বয় (x, y) ও θ'র সহিত সম্পর্কযুক্ত হইবে ?

অক্ষদ্বয়ের ঘূর্ণনের (বা আবর্তনের) ক্ষেত্রে প্রাপ্ত সূত্রের ন্যায় অনুরূপ সূত্র এস্থলেও নিরূপণ করা যায় (চিত্র 8.8 দ্রষ্টব্য), যথা :

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

বা, x, y নির্ণয়ের জন্য সমাধান দ্বারা ইহাও পাওয়া যায় যে

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\theta + y'\sin\theta \\ y &= -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{aligned}\right\}.$$



চিত্র 8.8

উদা. : নিম্নলিখিত সমীকরণটির উপর ঘূর্ণনের ফল বিচার কর :

$$x^2 + y^2 = a^2$$

উপরের সূত্র অনুসারে x এবং y এর পরিবর্তে উহাদের মান বসাইলে ইহা পাওয়া যায় যে

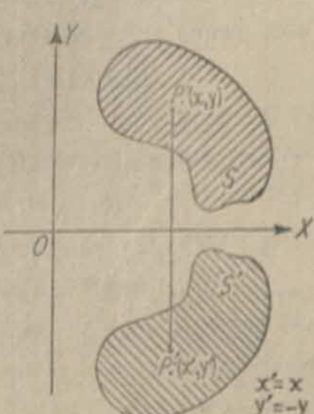
$$(x'\cos\theta + y'\sin\theta)^2 + (-x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 = a^2$$
$$\text{বা,}\quad x'^2 + y'^2 = a^2.$$

অর্থাৎ, যে বৃত্ত প্রাপ্ত হওয়ার কথা, ইহা তাহাই ($\because$ সমতলের এইরূপ ঘূর্ণনের ফলে স্থানান্তরিত একটি বৃত্ত উহার হুবহু অনুরূপ বৃত্তের উপর সমাপতিত হয়)।

উদা. : মূলবিন্দুর চারিদিকে অধিবৃত্ত $y^2 = 2mx$ কে $-90°$'র মধ্য দিয়া আবর্তিত কর।

3. অক্ষদ্বয়ের উপর প্রতিফলন

ধরা যাক্, সমতলটি x-অক্ষে প্রতিফলিত হইল ; প্রকারান্তরে বলা যায় যে উহা x-অক্ষের চারিদিকে 180° কোণের মধ্য দিয়া আবর্তিত হইল বলিয়া ধরা হইল। ধরা যাক্, P : (x, y) যে কোন একটি বিন্দু এবং P' : (x', y') হইল সেই বিন্দু যাহার উপর P স্থানান্তরিত হইল।



চিত্র 8.9

তাহা হইলে স্পষ্টত

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (1)$$

অনুরূপে, y-অক্ষে প্রতিফলন নিম্নে প্রদত্ত সূত্রের সাহায্যে প্রকাশিত হয়, যথা :

$$\left.\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= y \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (2)$$

যে কোন একটি অক্ষে কোন বক্ররেখার প্রতিসম থাকিবার সর্তটি এই রূপান্তরগুলি হইতে সঙ্গে সঙ্গে প্রাপ্তব্য।

উদা. : $C : y^4 + x^2 = 2y^2 + x^3$.

(1) রূপান্তরের ফলে C এর সমীকরণ অপরিবর্তিত থাকে ; সুতরাং C, x-অক্ষে প্রতিসম থাকে। কিন্তু (2) রূপান্তরের ফলে সমীকরণটি পরিবর্তিত হয়, সুতরাং C, y-অক্ষে প্রতিসম হয় না।

নিম্নলিখিত উক্তিটির সহিত এই সংক্ষিপ্ত বিবরণ শেষ করা হইল, যথা :

মূলবিন্দুর চতুর্দিকে সাধারণ ঘূর্ণন ও পরে সাধারণ চলন সম্মিলিতভাবে সাধারণ **দৃঢ় গতি (rigid motion)** বলিয়া পরিচিত।

এইরূপ রূপান্তরের (transformation) সমীকরণ দুইটি হইল নিম্নরূপ, যথা :

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta + a \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta + b \end{aligned}\right\}.$$

আরও অগ্রবর্তী অবস্থায় এইরূপ রূপান্তর জ্যামিতি (Transformation Geometry)র সহিত ছাত্রছাত্রীদের পরিচয় ঘটিবে।

অনুশীলনী

1. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির নূতন স্থানাঙ্ক কি হইবে তাহা নির্ণয় কর, যদি অক্ষদ্বয়কে $+45°$ কোণে (মূলবিন্দু স্থির রাখিয়া) আবর্তিত করা হয় :

$(2, 0), (3, 1), (-2, 4)$ এবং $(-5, -8)$.

2. নিম্নের বিন্দুগুলির নূতন স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর, যদি অক্ষদ্বয়ের মূলবিন্দু $(2, 1)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করিয়া অক্ষদ্বয়কে $+45°$ কোণে আবর্তিত করা হয় :

$(0, 0), (1, 2), (-3, 4), (-2, -5)$.

3. যদি মূলবিন্দু স্থির রাখিয়া θ কোণে অক্ষদ্বয় আবর্তিত করা হয় তাহা হইলে $(x_1y_2 - x_2y_1)$ রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে [(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) ঘূর্ণনের পূর্বে দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক]। ইহার জ্যামিতিক তাৎপর্য কি ?

পরিশিষ্ট—II

ছক (Determinant)

1. নিম্নলিখিত সমীকরণ দুইটি, যথা :

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{array}\right\} \text{এর}$$

সমাধান হিসাবে এইরূপ লেখা যায় যে

$$\frac{x}{c_1b_2-c_2b_1}=\frac{y}{a_1c_2-a_2c_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1} \quad \cdots \qquad (i)$$

যদি $(a_1b_2-a_2b_1)\neq 0$ হয়।

$a_1b_2-a_2b_1$, এই প্রকার রাশিকে নির্দেশ করিতে ছক (Determinant) বলিয়া কথিত নিম্নে প্রদত্ত প্রতীক ব্যবহার করা প্রায়ই সুবিধাজনক হইয়া থাকে, যথা :

$$a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

এইভাবে দুইটি সারি, যথা : $(a_1\ b_1)$ এবং $(a_2\ b_2)$ এবং দুইটি স্তম্ভ, যথা :

$$\begin{array}{ccc} a_1 & \text{এবং} & b_1 \\ a_2 & & b_2 \end{array}$$

লইয়া a_1, a_2, b_1, b_2 এই রাশি চারিটির বর্গাকারে সজ্জা (arrangement)কে **দ্বিতীয় ক্রমের ছক** (a determinant of the second order) বলা হয়। এবং $a_1b_2-a_2b_1$ হইল এই ছকের মান।

(*i*) সমাধান এখন তাহা হইলে এইভাবে লেখা যায়, যেমন

$$\frac{x}{-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}=\frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

উদা. : যাচাই কর :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}=-4\,; \quad \begin{vmatrix} 19 & 39 \\ 23 & 48 \end{vmatrix}=15.$$

$$\begin{vmatrix} x+y & x+2y \\ x-y & x-2y \end{vmatrix}=-2xy.$$

2. $a_1x+b_1y+c_1=0,\ \ a_2x+b_2y+c_2=0,\ \ a_3x+b_3y+c_3=0$ এই সমীকরণ তিনটির x এবং y এর একই মান দ্বারা সিদ্ধ হওয়ার শর্তটি নিম্নলিখিতভাবে নির্ণয় করা যায়, যথা :

শেষের দুইটি সমীকরণ সমাধান করিয়া পাওয়া যায় :

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{y}{-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}$$

যদি $a_2b_3 - a_3b_2 \neq 0$ হয়।

যদি $a_2b_3 - a_3b_2 = 0$ হয়, তবে সমীকরণ দুইটি সমঞ্জস (consistent) হয় না, যদি না

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{b_2}{b_3} = \frac{c_2}{c_3} \text{ হয়}$$

এবং সেক্ষেত্রে সমীকরণ দুইটি অভিন্ন হইয়া যায়।

এখন x এবং y এর মান প্রথম সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে, যদি

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ হয় ;}$$

এবং ইহা নিম্নপ্রকারে লিখিত হইয়া থাকে, যেমন

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

উপরে প্রদর্শিত তিনটি সারি এবং তিনটি স্তম্ভ লইয়া a_1, a_2, a_3 ; b_1, b_2, b_3 ; c_1, c_2, c_3 এই নয়টি রাশির এইরূপ বর্গাকারে সজ্জাকে **তৃতীয় ক্রমের ছক** (determinant of third order) বলা হয়, এবং ইহার মানকে নিম্নপ্রকারে প্রকাশ করা যাইতে পারে, যথা :

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_2 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & t_3 \end{vmatrix}$$

এইরূপ বিস্তৃতিকে বুঝাইতে এই পুস্তকে প্রায়ই ছক-প্রতীক ব্যবহার করা হইয়াছে : **প্রসঙ্গত লক্ষ্য করা যায় যে উপরে প্রদত্ত রেখা তিনটি সমবিন্দু হয় যদি উহাদের সহগগুলির ছক শূন্য হয়।**

উদা. : উভয় পক্ষের সমতা যাচাই কর :

$$(i) \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3' \\ -4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & -9 \end{vmatrix} = -18 \; ;$$

(ii) $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2.$

(iii) $\begin{vmatrix} -a & b & c \\ a & -b & c \\ a & b & -c \end{vmatrix} = 4abc.$

(iv) $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

উদা. : kর মান কত হইলে $kx+2y+3z=0$, $2x-3y+4z=0$, $5x+7y-8z=0$, এই সমীকরণ তিনটি যুগপৎ সত্য হইতে পারে ? [উঃ $k=39\frac{3}{4}$]

প্রচ্ছদপট মুদ্রণ ॥ কুইক প্রিন্টিং সার্ভিস ॥ কলিকাতা ৯